

6.4 Grundzüge der Rekursionstheorie

Folgerungen aus der Existenz universeller Funktionen

$$\begin{array}{ll} \Phi^{(n)} : \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N} & \text{Zeitkomplexitätsfunktion} \\ \varphi^{(n)} : \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N} & \text{Universelle Funktion} \end{array}$$

6.53 Lemma Eigenschaften von $\Phi^{(n)}$ bzw. $\varphi^{(n)}$:

$\Phi^{(n)}$ und $\varphi^{(n)}$ haben denselben Definitionsbereich.

Die Relationen **Beschränkte Laufzeit** $BLZ \subset \mathbb{N}^{n+2}$

$$BLZ = \{(p, \vec{x}, b) \in \mathbb{N}^{n+2} : \Phi^{(n)}(p, \vec{x}) \leq b\}$$

und **Beschränkte Berechenbarkeit** $BBER \subset \mathbb{N}^{n+3}$

$$BBER =$$

$$\{(p, \vec{x}, b, y) \in \mathbb{N}^{n+3} : \Phi^{(n)}(p, \vec{x}) \leq b \wedge \varphi^{(n)}(p, \vec{x}) = y\}$$

sind primitiv rekursiv.

Beweis:

Definitionsbereiche gleich folgt aus Definition von $\Phi^{(n)}$ bzw. $\varphi^{(n)}$.

Relationen primitiv rekursiv, da

$$BLZ = \exists t \leq b. \underbrace{\text{first}(i^t(\text{inp}^{(n)}(p, \vec{x}))) = 0}_{\text{rel}(p, \vec{x}, t) \text{ primitiv-rekursiv}}$$

bzw.

$$BBER = \exists t \leq b.$$

$$\underbrace{(\text{first}(i^t(\text{inp}^{(n)}(p, \vec{x}))) = 0 \wedge \text{out}(i^t(\text{inp}^{(n)}(p, \vec{x}))) = y)}_{\text{rel}(p, \vec{x}, t, y) \text{ primitiv-rekursiv}}$$

Folgerungen

6.54 Satz s-m-n Theorem

Zusammenhang zwischen universellen Funktionen. Zu jedem Paar $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gibt es eine primitiv rekursive Funktion $s_{m,n} : \mathbb{N}^{m+1} \rightarrow \mathbb{N}$, so dass für alle $p \in \mathbb{N}$, $\vec{x} \in \mathbb{N}^n$ und $\vec{y} \in \mathbb{N}^m$ gilt:

$$\varphi^{(n+m)}(p, \vec{x}, \vec{y}) = \varphi^{(n)}(s_{m,n}(p, \vec{y}), \vec{x}) = \varphi_{s_{m,n}(p, \vec{y})}^{(n)}(\vec{x})$$

Beweis:

In Abhängigkeit von \vec{y} ist der Programmcode p so abzuändern, dass die Werte \vec{y} nicht über die Eingabe eingelesen, sondern im Programm zugewiesen werden. Hierbei ist zu beachten, dass die Eingabezahlen durch geeignete Terme dargestellt werden.

Ist $p = \text{code}(\alpha)$ muss $s_{m,n}(p, \vec{y})$ der Code zum Programm

$$V_{n+1} := \text{succ}^{y_1}(0); \dots; V_{n+m} := \text{succ}^{y_m}(0); \alpha \quad \text{sein.}$$

Sei

$$s_{m,n}(p, \vec{y}) := [[7, n+1, h(y_1)], \dots, [7, n+m, h(y_m)]] * p$$

Mit $*$ die Folgenverkettungsfunktion von Beispiel 6.30 und $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ wobei

$$h(0) = [1] \text{ (code von 0),} \quad h(y+1) = [3, h(y)],$$

$$\text{d.h. } h(y) = \text{code}(\text{succ}^y(0))$$

Folgerungen - Programmtransformatoren

Beachte:

Bei obiger Situation gilt auch für beliebige $n \in \mathbb{N}$ und l mit $1 \leq l \leq m$ die Aussage

$$\varphi^{(n+m)}(p, \vec{x}, \vec{y}) = \varphi^{(n+l)}(s_{m,n}(p, \vec{y}), \vec{x}, \vec{z})$$

für alle $\vec{z} \in \mathbb{N}^l$.

6.55 Lemma

Es gibt eine primitiv rekursive Funktion $compose : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$, so dass für alle $p, q \in \mathbb{N}$ gilt

$$\varphi_{compose(p,q)}(x) = \varphi_p(\varphi_q(x))$$

Beweis:

Die Funktion $f(x, p, q) = \varphi_p(\varphi_q(x))$ ist μ -rekursiv. Sei a Index zu einem f berechnenden Programm. D. h.

$$\begin{aligned}\varphi_a^{(3)}(x, p, q) &= f(x, p, q) \text{ für } (x, y, q) \in \mathbb{N}^3 \\ &= \varphi_{s_{2,1}(a,p,q)}^{(1)}(x)\end{aligned}$$

D. h. $compose(p, q) = s_{2,1}(a, p, q)$ ist primitiv rekursiv.

Lässt sich auf andere Operationen übertragen:

Primitive Rekursion, Beschränkte Minimierung, Minimierung, Wertverlaufsrekursion.

Rekursiv aufzählbare Relationen

Wir haben bisher Relationen betrachtet, die entweder primitiv rekursiv oder rekursiv entscheidbar waren. Eine weitere Klasse von Relationen sind die effektiv aufzählbaren Relationen.

6.56 Definition

Eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^n$ heißt **rekursiv aufzählbar**, wenn es eine berechenbare (μ -rekursive) Funktion f mit Definitionsbereich R gibt, d. h.

$R \subseteq \mathbb{N}^n$ rekursiv aufzählbar gdw $\exists f \in \mathcal{R}_p(\mathbb{N}) : \text{dom}(f) = R$
also $(f(\vec{x}) \downarrow \text{ gdw } R\vec{x} \text{ (} x \in \mathbb{N}^n \text{)})$

6.57 Lemma

$R \subseteq \mathbb{N}^n$ ist entscheidbar gdw R und $\neg R$ rekursiv aufzählbar.

Beweis:

Sei R entscheidbar. Dann ist auch $\neg R$ entscheidbar.

R ist Definitionsbereich der Funktion

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } R\vec{x} \\ \uparrow & \text{sonst} \end{cases}$$

$f \in \mathcal{R}_p(\mathbb{N})$ (Beachte dabei $\uparrow(x) = \uparrow$ alle x ist in $\mathcal{R}_p(\mathbb{N})$).

R.a. Relationen - Charakterisierungen

Seien R und $\neg R$ rekursiv aufzählbar und a bzw. b Programmindizes von Funktionen, die als Definitionsbereich R und $\neg R$ haben.

Sei

$$f(\vec{x}) = \mu t. (\Phi_a^{(n)}(\vec{x}) \leq t \vee \Phi_b^{(n)}(\vec{x}) \leq t)$$

$f \in \mathcal{R}_p(\mathbb{N})$ und total, da jedes \vec{x} entweder in $R = \text{dom}(\varphi_a^{(n)})$ oder in $\neg R = \text{dom}(\varphi_b^{(n)})$ liegt.

Weiterhin ist $R\vec{x}$ gdw $\Phi_a^{(n)}(\vec{x}) \leq f(\vec{x})$ entscheidbar.

6.58 Lemma R.a. Relationen und entscheidbare Relationen

$R \subseteq \mathbb{N}^n$ ist rekursiv aufzählbar gdw es gibt eine entscheidbare Relation $S \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ mit $R\vec{x}$ gdw $\exists y S\vec{x}y$.

Beweis:

- Sei R rekursiv aufzählbar. Sei a Index mit $R = \text{dom}(\varphi_a^{(n)})$. Dann gilt

$$R\vec{x} \text{ gdw } \varphi_a^{(n)}(\vec{x}) \downarrow \text{ gdw } \exists y \Phi_a(\vec{x}) \leq y$$

Die Relation $S\vec{x}y$ gdw $\Phi_a(\vec{x}) \leq y$ ist entscheidbar (sogar primitiv rekursiv entscheidbar).

- Gelte $R\vec{x}$ gdw $\exists y S\vec{x}y$ mit S entscheidbar. Dann ist $f(\vec{x}) = \mu y. S\vec{x}y$ berechenbar und hat als Definitionsbereich genau R .

(Lemma gilt auch, wenn entscheidbar durch primitiv rekursiv ersetzt wird.)

Zusammenhänge

6.59 Lemma

$f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ ist berechenbar gdw der Graph von f rekursiv aufzählbar ist. D. h.

$graph(f) = \{(\vec{x}, y) \in \mathbb{N}^{n+1} : f(\vec{x}) \downarrow \wedge f(\vec{x}) = y\}$ rekursiv aufzählbar.

Beweis:

- Sei $f = \varphi_a^{(n)}$. Dann gilt für alle \vec{x}, y .

$$(\vec{x}, y) \in graph(f) \text{ gdw } \underbrace{\exists b (\Phi_a^{(n)}(\vec{x}) \leq b \wedge \varphi_a^{(n)}(\vec{x}) = y)}_{S\vec{x}yb \text{ entscheidbar nach 6.53}}$$

also rekursiv aufzählbar nach Lemma 6.58.

- Sei $graph(f)$ rekursiv aufzählbar: $graph(f) = dom(\varphi_b^{(n+1)})$, dann gilt

$$f(\vec{x}) = \text{first}(\mu y. (\Phi_b^{(n+1)}(\vec{x}, \text{first}(y)) \leq \text{rest}(y)))$$

Dafür betrachte man $y = \langle z, t \rangle$ als Codierung eines Paares (z, t) . Ist $(\vec{x}, z) \in graph(f)$, so gibt es ein t mit $\Phi_b^{(n+1)}(\vec{x}, z) = t$ und der μ -Operator liefert y mit $y = \langle z, t \rangle$. Für $f(\vec{x}) = \uparrow$ gibt es kein solches y .

Folgerungen - Weitere Charakterisierungen

6.60 Lemma

Sei f eine totale Funktion. Dann gilt $f \in \mathcal{R}_p(\mathbb{N})$ gdw $graph(f)$ ist entscheidbar.

Beweis:

Sei f total, berechenbar. Dann ist die Menge $\{(\vec{x}, y) : f(\vec{x}) = y\}$ entscheidbar, d.h. $graph(f)$ ist entscheidbar (siehe auch Beispiel 6.44).

Ist $graph(f)$ entscheidbar, so ist auch $graph(f)$ rekursiv aufzählbar und somit f berechenbar.

Einfacher: $f(\vec{x}) = \mu y \cdot \chi_{graph(f)}(x, y) = 1$.

6.61 Lemma Effektive Aufzählungen r.a. Relationen

$R \subseteq \mathbb{N}^n$ ist rekursiv aufzählbar gdw $R = \emptyset$ oder es gibt totale berechenbare Funktionen $f_1, \dots, f_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit

$$R = \{(f_1(i), \dots, f_n(i)) : i \in \mathbb{N}\}.$$

Man kann also R mit Hilfe der Funktionen f_i „effektiv“ aufzählen.

Ist $n = 1$, so ist $R = im(f_1)$, d.h. R ist Bild einer totalen berechenbaren Funktion.

Weitere Charakterisierungen (Fort.)

Beweis:

Sei $R \subseteq \mathbb{N}^n$ rekursiv aufzählbar, $R \neq \emptyset$. Sei $R = \text{dom}(\varphi_a^{(n)})$, $\vec{b} \in R$ fest. Definiere Funktionen f_i $i = 1, \dots, n$ durch

$$f_i(x) = \begin{cases} x[i] & \text{falls } \Phi_a^{(n)}(x[1], \dots, x[n]) \leq x[0] \\ b_i & \text{sonst} \end{cases}$$

Durchläuft x alle natürlichen Zahlen, so werden alle möglichen Parameter für $\Phi_a^{(n)}$ durchlaufen. Die Relation $\Phi_a^{(n)}(x[1], \dots, x[n]) \leq x[0]$ ist nach Lemma 6.53 primitiv rekursiv. Somit sind die f_i primitiv rekursiv, also total, und liefern alle Werte von R .

Umgekehrt ist $R = \emptyset$, so ist R rekursiv aufzählbar als Definitionsbereich der nirgends definierten Funktion. Sei also $R = \{(f_1(i), \dots, f_n(i)) : i \in \mathbb{N}\}$ $f_i \in \mathcal{R}_p(\mathbb{N})$ totale Funktionen, dann liefert

$$R\vec{x} \text{ gdw } \exists i(x_1 = f_1(i) \wedge \dots \wedge x_n = f_n(i))$$

R ist rekursiv aufzählbar nach Lemma 6.58.

Abschlusseigenschaften r.a. Relationen

6.62 Lemma Abschlusseigenschaften

Die r.a. Relationen sind

a) Abgeschlossen gegen **existentielle Quantifizierung**

$R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ $n \geq 1$ sei rekursiv aufzählbar. Dann auch S mit

$$S\vec{x} \text{ gdw } \exists y R\vec{x}y$$

b) Abgeschlossen gegen **Vereinigung und Durchschnitt**

Sind $R, S \subseteq \mathbb{N}^n$ rekursiv aufzählbar. Dann sind auch $R \cup S$,
 $R \cap S$ rekursiv aufzählbar.

Beweis:

a) Sei R rekursiv aufzählbar. Also $R\vec{a}$ gdw $\exists z T\vec{a}z$ für eine entscheidbare Relation T . Dann ist $S\vec{x}$ gdw

$$\exists y R\vec{x}y \text{ gdw } \exists y \exists z T\vec{x}yz \text{ gdw } \exists b T\vec{x}\text{first}(b)\text{rest}(b)$$

b) Sei $R\vec{x}$ gdw $\exists y T\vec{x}y$ und $S\vec{x}$ gdw $\exists y V\vec{x}y$ mit T, V entscheidbare Relationen. Dann gilt

$$(R \wedge S)\vec{x} \text{ gdw}$$

$$\exists y \exists z (T\vec{x}y \wedge V\vec{x}z) \text{ gdw } \exists u (T\vec{x}\text{first}(u) \wedge V\vec{x}\text{rest}(u))$$

und

$$(R \vee S)\vec{x} \text{ gdw}$$

$$\exists y \exists z (T\vec{x}y \vee V\vec{x}z) \text{ gdw } \exists u (T\vec{x}\text{first}(u) \vee V\vec{x}\text{rest}(u))$$

Zusammenfassung Charakterisierungen der r.a Relationen

Sei $R \subseteq \mathbb{N}^n$, dann sind äquivalent:

- $R \subseteq \mathbb{N}^n$ ist rekursiv aufzählbar.
- $R = \text{dom}(f)$ für ein $f \in \mathcal{R}_p(\mathbb{N})$.
- $R = \emptyset \vee R = \text{im}(f_1, \dots, f_n)$ für $f_i \in \mathcal{R}(\mathbb{N})$.
- $R = \emptyset \vee R = \text{im}(f_1, \dots, f_n)$ für $f_i \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
- R endlich $\vee R = \text{im}(f_1, \dots, f_n)$ für $f_i \in \mathcal{R}(\mathbb{N})$ mit f_i injektiv.
- $R\vec{x}$ gdw $\exists y S\vec{x}y$ für eine entscheidbare Relation S .
- $R\vec{x}$ gdw $\exists y S\vec{x}y$ für eine primitiv rekursive Relation S .

R ist entscheidbar gdw R und $\neg R$ sind rekursiv aufzählbar.

Rekursiv aufzählbare Relationen sind abgeschlossen gegen \cup, \cap, \exists .

Was mit \neg und \forall ?

Weitere Funktionsdefinitionen

6.63 Lemma Funktiondefinition auf r.a. Relationen

Sei $g : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ berechenbar, $R \subseteq \mathbb{N}^n$ rekursiv aufzählbar. Dann ist auch

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} g(\vec{x}) & \text{falls } R\vec{x} \\ \uparrow & \text{sonst} \end{cases}$$

berechenbar.

Beweis: Es gilt $f(\vec{x}) = \text{sgn}(\text{succ}(h(\vec{x}))) \cdot g(\vec{x})$, sofern $\text{dom}(h) = R$.

Da R rekursiv aufzählbar ist, gibt es ein $h \in \mathcal{R}_p(\mathbb{N})$ mit $\text{dom}(h) = R$, also auch $f \in \mathcal{R}_p(\mathbb{N})$.

Führt jede Definition einer Funktion durch Fallunterscheidung mit paarweise disjunkten r.a. Relationen wieder zu berechenbaren Funktionen?

Sind die r.a. Relationen eine echte Obermenge der entscheidbaren Relationen. Gibt es r.a. Relationen die nicht rekursiv entscheidbar sind?

Unentscheidbare Relationen

Wichtige Probleme

- Das **allgemeine Halteproblem**: $K_0 \subseteq \mathbb{N}^2$

$$K_0 = \{(a, x) \in \mathbb{N}^2 : \varphi_a(x) \downarrow\}$$

- Das **spezielle Halteproblem (Selbstanwendungsproblem)**:
 $K \subseteq \mathbb{N}$

$$K = \{a \in \mathbb{N} : \varphi_a(a) \downarrow\}$$

- Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f \in \mathcal{R}(\mathbb{N})$, d. h. total.
Spez(f) = $\{a \in \mathbb{N} : \varphi_a = f\}$ Menge der „Indizes von f “
- **Äquiv** $\subseteq \mathbb{N}^2$ Äquivalenz von Indizes
 $\text{Äquiv} = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : \varphi_a = \varphi_b\}$

Beachte: K_0 und K sind rekursiv aufzählbar. Wie stehen diese Probleme in Beziehung?

Erinnerung: $R \subseteq \mathbb{N}^n$, $S \subseteq \mathbb{N}^l$. S kann auf R **rekursiv reduziert** werden (schreibe $\mathbf{S} \leq_m \mathbf{R}$), falls es totale berechenbare Funktionen $f_1, \dots, f_n : \mathbb{N}^l \rightarrow \mathbb{N}$ gibt, so dass gilt

$$S\vec{x} \text{ gdw } Rf_1(\vec{x}) \cdots f_n(\vec{x})$$

Wir hatten gezeigt: Ist R entscheidbar, so auch S .

Eigenschaften der Many-one Reduzierbarkeit

6.64 Lemma Es gilt

- \leq_m ist reflexiv und transitiv.
- Ist $S \leq_m R$, R entscheidbar, so ist S entscheidbar.
- Ist $S \leq_m R$, R rekursiv aufzählbar, so ist S rekursiv aufzählbar.
- $S \leq_m R$, so ist $\neg S \leq_m \neg R$.

Beweis:

Sei $R = \text{dom}(f)$, dann ist $S = \text{dom}(f \circ (f_1, \dots, f_n))$.

Die anderen Eigenschaften sind leicht zu beweisen.

6.65 Lemma

Es gilt

- $K \leq_m K_0$
- $K \leq_m \text{spez}(f)$
- $\text{Spez}(\text{succ}) \leq_m \text{Äquiv}$

Beweis:

- Es ist $a \in K$ gdw $(a, a) \in K_0$ (f_1, f_2 Identität auf \mathbb{N}).
- Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ total berechenbar. Definiere

$$\psi(x, p) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } p \in K \\ \uparrow & \text{sonst} \end{cases}$$

ψ ist berechenbar, also gibt es ein $a \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_a^{(2)} = \psi$.

Rekursiv aufzählbare Relationen, die nicht entscheidbar sind

Nach Definition von ψ gilt

$$p \in K \Rightarrow \varphi_a^{(2)}(x, p) = f(x)$$

$$p \notin K \Rightarrow \varphi_a^{(2)}(x, p) \uparrow$$

Nach s-m-n Theorem gibt es primitiv rekursive Funktion

$$g(p) = s_{1,1}(a, p) : \varphi_a^{(2)}(x, p) = \varphi_{g(p)}(x).$$

• Dann ist $p \in K$ gdw $g(p) \in \text{Spez}(f)$.

• Sei $a \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_a = \text{succ}$:

$b \in \text{Spez}(\text{succ})$ gdw $(a, b) \in \text{Äquiv}$.

6.66 Satz

$K = \{a \in \mathbb{N} : \varphi_a(a) \downarrow\}$ ist nicht entscheidbar.

Beweis: Angenommen K wäre entscheidbar. Wende Diagonalisierungsargument an: Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_x(x) + 1 & \text{falls } x \in K \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$f \in \mathcal{R}_p(\mathbb{N})$ und f ist total. Es gibt einen Index $p \in \mathbb{N}$ für f , d. h. $f = \varphi_p$. Insbesondere $f(p) = \varphi_p(p)$. Dies ist ein Widerspruch, da

- Ist $p \in K$, so $\varphi_p(p) \downarrow$ und $f(p) = \varphi_p(p) + 1 \not\downarrow$
- Ist $p \notin K$, so $\varphi_p(p) \uparrow$ und $f(p) = 0 \not\downarrow$

Folgerungen

6.67 Folgerung Es gilt

- $K_0, Spez(f) (f \in \mathcal{R})$ und $\ddot{A}quiv$ sind unentscheidbar.
- $\neg K, \neg K_0$ sind nicht rekursiv aufzählbar.
- Die rekursiv aufzählbaren Relationen sind nicht abgeschlossen gegenüber Komplementbildung und Allquantifizierung.
- Die entscheidbaren Relationen sind nicht abgeschlossen gegenüber existentielle- und Allquantifizierung.

6.68 Lemma

Sei R rekursiv aufzählbar. Dann gilt $R \leq_m K_0$.

Beweis: Sei $R \subseteq \mathbb{N}^n$ rekursiv aufzählbar. $R = dom(\varphi_a^{(n)})$ für ein $a \in \mathbb{N}$.

Es gilt

$$\begin{aligned} \vec{x} \in R & \text{ gdw } \varphi_a^{(n)}(\vec{x}) \downarrow \\ & \text{ gdw } \varphi_{s_{n-1,1}(a, x_2, \dots, x_n)}(x_1) \downarrow \\ & \text{ gdw } (s_{n-1,1}(a, x_2, \dots, x_n), x_1) \in K_0 \end{aligned}$$

Seien $f_1(x_1, \dots, x_n) = s_{n-1,1}(a, x_2, \dots, x_n)$ und $f_2(x_1, \dots, x_n) = x_1$. $f_1, f_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, also $R \leq_m K_0$.

Die Relation K_0 ist also die „schwerste“ r.a. Relation.

Vollständige rekursiv aufzählbare Relationen

6.69 Definition

Eine Relation $S \subseteq \mathbb{N}^n$ heißt vollständig bzgl. \leq_m , falls S rekursiv aufzählbar ist, und für jede andere rekursiv aufzählbare Relation $R \subseteq \mathbb{N}^m$ ($m \geq 1$), $R \leq_m S$ gilt.

S ist eine „schwerste“ rekursiv aufzählbare Relation.

6.70 Satz Existenz vollständiger, r.a. Relationen.

K_0 ist vollständig für die rekursiv aufzählbaren Relationen.

6.71 Lemma

Ist S vollständig für rekursive aufzählbare Relationen und gilt $S \leq_m R$ für R rekursiv aufzählbar, dann ist auch R vollständig.

Beweis:

Sei T rekursiv aufzählbar, dann ist $T \leq_m S \leq_m R$. D. h. $T \leq_m R$.

6.72 Folgerung K ist auch vollständig.

Anwendung des s-m-n-Theorems. Zu zeigen:

$$K_0 = \{(a, x) \in \mathbb{N}^2 : \varphi_a(x) \downarrow\} \leq_m K = \{a : \varphi_a(a) \downarrow\}$$

Betrachte $Rzax$ gdw K_0ax . Dann ist R rekursiv aufzählbar, d. h. $R = \text{dom}(\varphi_b^{(3)})$. Das s-m-n-Theorem liefert:

$$\varphi_b^{(3)}(z, a, x) \downarrow \text{ gdw } \varphi_{s_{2,1}(b,a,x)}(z) \downarrow$$

Vollständige rekursiv aufzählbare Relationen Die Sätze von Rice

Dann gilt mit $z = s_{2,1}(b, a, x)$

$$\begin{aligned} \varphi_a(x) \downarrow & \text{ gdw } \varphi_b^{(3)}(s_{2,1}(b, a, x), a, x) \downarrow \\ & \text{ gdw } \varphi_{s_{2,1}(b, a, x)}(s_{2,1}(b, a, x)) \downarrow \\ & \text{ gdw } K s_{2,1}(b, a, x) \end{aligned}$$

Da $h(a, x) = s_{2,1}(b, a, x)$ primitiv rekursiv ist, gilt die Behauptung $K_0 \leq_m K$.

Methoden für den Nachweis von Unentscheidbarkeit und nicht rekursive Aufzählbarkeit.

6.73 Satz (Rice) Entscheidbare Indextmengen

Sei $S \subset \mathcal{R}_p^{(1)}(\mathbb{N})$ Menge einstelliger Funktionen. Dann ist die **Indexmenge** der Funktionen in S , die Menge $S_\mu = \{a \in \mathbb{N} : \varphi_a \in S\}$, genau dann entscheidbar, wenn $S = \emptyset$ oder $S = \mathcal{R}_p^{(1)}(\mathbb{N})$.

Also ist eine Indexmenge $R \subseteq \mathbb{N}$ entscheidbar gdw $R = \emptyset$ oder \mathbb{N} .

Beweis:

Ist $S = \emptyset$ oder $S = \mathcal{R}_p^{(1)}(\mathbb{N})$, so ist $S_\mu = \emptyset$ oder $S_\mu = \mathbb{N}$ und somit entscheidbar.

Sei $S \neq \emptyset, \neq \mathcal{R}_p^{(1)}(\mathbb{N})$. Angenommen S_μ ist entscheidbar.

O.b.d.A. $\uparrow \notin S$ (sonst statt S_μ wähle $\neg S_\mu$).

Die Sätze von RICE (Fort.)

Nach Vor. gibt es eine Funktion $f \in S$.

Definiere

$$F(x, y) = \begin{cases} f(y) & \text{falls } Kx \\ \uparrow & \text{sonst} \end{cases}$$

F ist berechenbar, also gibt es ein $a \in \mathbb{N}$ mit $F(x, y) = \varphi_a^{(2)}(y, x) = \varphi_{s_{1,1}(a,x)}^{(1)}(y)$. Die Funktion $g(x) = s_{1,1}(a, x)$ ist primitiv rekursiv und es gilt

$$x \in K \Rightarrow \varphi_{g(x)} = f \in S \text{ gdw } g(x) \in S_\mu$$

$$x \notin K \Rightarrow \varphi_{g(x)} = \uparrow \notin S \text{ gdw } g(x) \notin S_\mu$$

Es gilt somit $x \in K$ gdw $g(x) \in S_\mu$, d.h. $K \leq_m S_\mu \not\leq$

Nichttriviale Indexmengen sind also nicht rekursiv entscheidbar. Sind sie überhaupt rekursiv aufzählbar?

6.74 Definition

$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ heißt **endliche Restriktion** von $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, falls $\text{dom}(f)$ endlich ist und $f \sqsubseteq g$, d.h.

$$\text{dom}(f) \text{ endlich und } f(x) \downarrow \Rightarrow (g(x) \downarrow \wedge f(x) = g(x))$$

Die Sätze von Rice (Fort.)

6.75 Satz (Rice-Shapiro) Rekursiv aufzählbare Indexmengen

Sei $S \subset \mathcal{R}_p^{(1)}(\mathbb{N})$. Ist die Menge $S_\mu = \{a \in \mathbb{N} : \varphi_a \in S\}$ rekursiv aufzählbar, dann folgt für $f \in \mathcal{R}_p^{(1)}(\mathbb{N})$:

- $f \in S$ gdw es gibt eine endliche Restriktion g von f in S .

Insbesondere sind $\text{spez}(f)$ (f total berechenbar) und somit auch Äquiv nicht rekursiv aufzählbar.

Es gibt keine effektive Aufzählung aller while-Programme, die nur primitiv rekursive oder nur totale μ -rekursive-Funktionen berechnen.

Beweis:

Sei S_μ rekursiv aufzählbar und $f \in \mathcal{R}_p^{(1)}(\mathbb{N})$.

• Sei g endliche Restriktion von f und $g \in S$.

Angenommen $f \notin S$. Betrachte die Funktion:

$$F(x, y) = \begin{cases} f(y) & \text{falls } Kx \\ g(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

Behauptung: F ist berechenbar. Da

$$F(x, y) = \begin{cases} g(y) & \text{falls } y \in \text{dom}(g) \\ \text{sgn}(\text{succ}(\varphi_x(x))) \cdot f(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweisfortsetzung

Sei $a \in \mathbb{N}$ mit $F(x, y) = \varphi_a^{(2)}(y, x) = \varphi_{s_{1,1}(a,x)}(y)$

$x \in K \Rightarrow F(x, \cdot) = f$

$x \notin K \Rightarrow F(x, \cdot) = g$

d.h. $x \notin K$ gdw $s_{1,1}(a, x) \in S_\mu$, d.h. S_μ ist nicht r.a. \downarrow

• Sei umgekehrt $f \in S$. Angenommen es gebe keine endliche Restriktion von f in S .

Betrachte die Funktion:

$$F(x, y) = \begin{cases} f(y) & \text{falls } \neg\Phi_x(x) \leq y \\ \uparrow & \text{sonst} \end{cases}$$

F ist berechenbar.

Sei $a \in \mathbb{N}$ mit $F(x, y) = \varphi_a^{(2)}(y, x) = \varphi_{s_{1,1}(a,x)}(y)$.

Es gilt:

• $x \in K \Rightarrow F(x, \cdot)$ ist eine endlichen Restriktion von f :

Da $\varphi_x(x) \downarrow$, d.h. $\Phi_x(x) = t_0$ und für

$y < t_0 \quad F(x, y) = f(y)$

$y \geq t_0 \quad F(x, y) \uparrow$

• $x \notin K \Rightarrow F(x, \cdot) = f$, da $\neg\Phi_x(x) \leq y$ gültig.

$x \notin K$ gdw $s_{1,1}(a, x) \in S_\mu$, d.h. S_μ ist nicht r.a. \downarrow

Nicht rekursiv aufzählbare Mengen

6.76 Folgerung Der Satz erlaubt uns zu zeigen, dass gewisse Indexmengen nicht r.a. sind.

Ist nämlich A eine Indexmenge partiell rekursiver Funktionen und $p \in A$ für die gilt:

- a) Es gibt ein $q \in \neg A$ mit $\varphi_p \sqsubseteq \varphi_q$ oder
- b) Es gibt kein Index einer endliche Restriktion von φ_p in A .

Insbesondere sind folgende Mengen A_i nicht rekursiv aufzählbar:

$$\begin{aligned} A_0 &= \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x = \uparrow, \text{ d. h. } \text{dom}(\varphi_x) = \emptyset\} \\ A_1 &= \{x \in \mathbb{N} \mid \text{dom}(\varphi_x) \text{ endlich}\} \\ A_2 &= \{x \in \mathbb{N} \mid \text{im}(\varphi_x) \text{ endlich}\} \\ A_3 &= \{x \in \mathbb{N} \mid \text{dom}(\varphi_x) = \mathbb{N}, \text{ d. h. } \varphi_x \text{ total}\} \\ A_4 &= \{x \in \mathbb{N} \mid \text{im}(\varphi_x) = \mathbb{N}, \text{ d. h. } \varphi_x \text{ surjektiv}\} \\ \neg A_5 &= \{x \in \mathbb{N} \mid a \in \text{dom}(\varphi_x) \text{ } a \text{ fest, d. h. } \varphi_x(a) \downarrow\} \\ \neg A_6 &= \{x \in \mathbb{N} \mid a \in \text{im}(\varphi_x) \text{ } a \text{ fest, d. h. } \exists y \varphi_x(y) = a\} \end{aligned}$$

Wende Satz 6.75 an.

Beachte $\neg A_0, \neg A_5, \neg A_6$ sind rekursiv aufzählbar.

Existenz von Programmen (berechenbare Funktionen) mit bestimmten Eigenschaften

6.77 Satz Fixpunktsatz - Rekursionsatz

- a) **FPS.** Zu jedem $f \in \mathcal{R}^{(1)}(\mathbb{N})$ (totale μ -rekursive Funktion) gibt es ein $p \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_{f(p)} = \varphi_p$.
D.h. die „Programme“ p und $f(p)$ berechnen die gleiche Funktion.
Es muss **nicht** $f(p) = p$ gelten.
- b) **RS.** Zu jeder Funktion $G \in \mathcal{R}^{(2)}(\mathbb{N})$, $G : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$, gibt es ein $q \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_q = G(\cdot, q)$.
D.h. $\varphi_q(x) = G(x, q)$ für alle $x \in \mathbb{N}$.

Beweis:

- a) Betrachte die Funktion $F(x, y) = \varphi_{f(s_{1,1}(y,y))}(x)$

$F \in \mathcal{R}^{(2)}(\mathbb{N})$. Sei q Index von F , d. h.

$$F(x, y) = \varphi_q^{(2)}(x, y) \stackrel{s-m-n}{=} \varphi_{s_{1,1}(q,y)}(x)$$

Setze $p = s_{1,1}(q, q)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi_{f(p)}(x) &= \varphi_{f(s_{1,1}(q,q))}(x) = F(x, q) = \varphi_{s_{1,1}(q,q)}(x) \\ &= \varphi_p(x). \end{aligned}$$

Beachte: wählt man für $f(y) = s_{1,1}(y, y)$, so gibt es ein p mit $\varphi_{s_{1,1}(p,p)} = \varphi_p$.

Anwendungen

b) Sei $G \in \mathcal{R}_p^{(2)}(\mathbb{N})$ und a Index von G , d. h.

$$G(x, y) = \varphi_a^{(2)}(x, y) \stackrel{s-m-n}{=} \varphi_{s_{1,1}(a,y)}(x).$$

Sei $f(y) = s_{1,1}(a, y)$. Nach a) gibt es $q \in \mathbb{N}$ mit

$$\varphi_q(x) = \varphi_{f(q)}(x) = \varphi_{s_{1,1}(a,q)}(x) = G(x, q)$$

6.78 Folgerung Existenz spezieller Programme!

- Es gibt ein while-Programm, das für jede Eingabe seine eigene Co-dezahl ausgibt.

Sei $G(x, y) = f_{proj(2)}^{(2)}(x, y) = y$. Dann liefert RS $q \in \mathbb{N}$ mit

$$\varphi_q(x) = G(x, q) = q$$

- Es gibt eine primitiv rekursive Funktion f mit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, so dass $\forall x \in \mathbb{N}. \text{dom}(\varphi_{f(x)}) = \{x^2\}$.

„Implizite Definition von Programmen“

$$\text{Sei } h(x, y) = \mu z. (\chi_{\{x^2\}}(y) = 1) = \begin{cases} 0 & y = x^2 \\ \uparrow & \text{sonst} \end{cases}$$

$h \in \mathcal{R}_p$, d. h. $h(x, y) = \varphi_a^{(2)}(y, x) = \varphi_{s_{1,1}(a,x)}(y)$.

Wähle $f(x) = s_{1,1}(a, x)$.

- FPS liefert sogar Existenz von $p_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\varphi_{p_0} = \varphi_{f(p_0)}, \text{ d. h. } \text{dom}(\varphi_{p_0}) = \text{dom}(\varphi_{f(p_0)}) = \{p_0^2\}$$

6.5 Die Churchsche These

Maschinennahe Programme: Register- und Turing-Maschinen.

Bisher: $\mathcal{R}_p(\mathbb{N}) = \text{While-programmierbar über } N$.

$= \text{While-rekursiv programmierbar über } N$.

Wichtige Ergebnisse

Existenz **universeller** berechenbarer-Funktionen:

$\Phi^{(n)} : \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$ **Zeitkomplexitätsfunktion.**

- $\Phi^{(n)}(p, \vec{x}) = \mu t. \text{first}(i^t(\text{inp}^{(n)}(p, \vec{x}))) = 0$
 $\text{inp}^{(n)}, i, \text{first} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$\varphi^{(n)} : \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$ **universelle Funktion** für n -stellige Funktionen.

- $\varphi^{(n)}(p, \vec{x}) = \text{out}(i^{\Phi^{(n)}(p, \vec{x})}(\text{inp}^{(n)}(p, \vec{x})))$
Kleenesche Normalform für μ -rekursive Funktionen.
- $\Phi^{(n)}, \varphi^{(n)} \in \mathcal{R}_p(\mathbb{N})$ (d. h. berechenbar)
- $\forall f \in \mathcal{R}_p^{(n)}(\mathbb{N}) \exists p \in \mathbb{N} : f = \varphi_p^{(n)}$

Jede berechenbare Funktion hat einen „Index“.

Sätze: „Programmtransformationen“

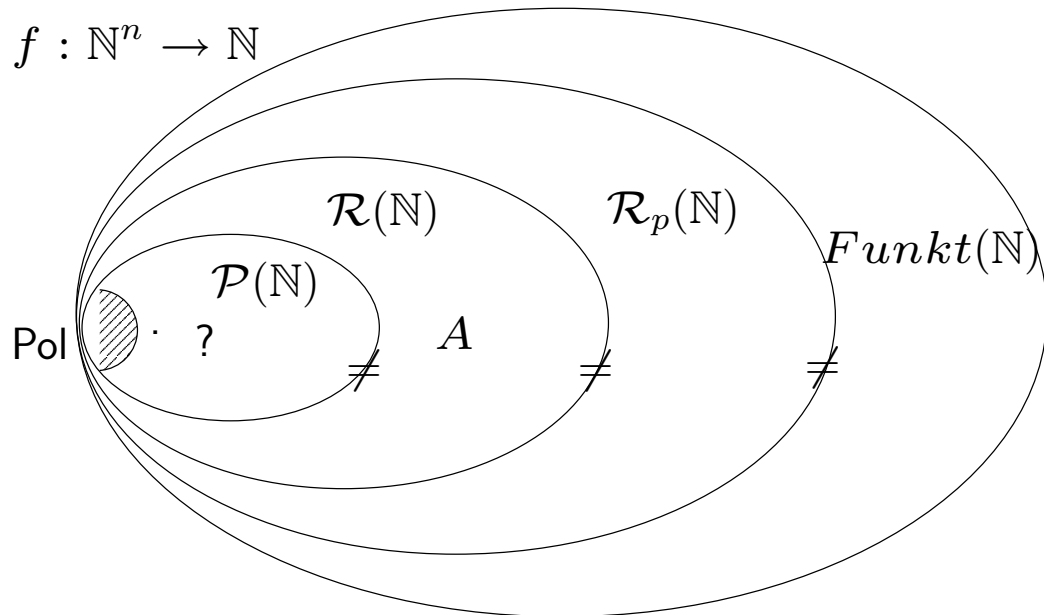
s-m-n Theorem: $\exists s_{m,n} \in \mathcal{P}^{m+1} \varphi_p^{n+m}(\vec{x}, \vec{y}) = \varphi_{s_{m,n}(p, \vec{y})}^n(\vec{x})$

Fixpunktsatz: $\forall f \in \mathcal{R}^{(1)}(\mathbb{N}) \exists p \in \mathbb{N} \varphi_{f(p)} = \varphi_p$

Rekursionstheorem: $\forall G \in \mathcal{R}_p^{(2)}(\mathbb{N}) \exists p \in \mathbb{N} \varphi_p = G(\cdot, p)$

Die Sätze von Rice: Entscheidbarkeit und r.a. von Indexmengen.

Klassifizierung von Funktionen und Relationen



$R \subset \mathbb{N}^n$ Relationen:

