SS 2002 19. April 2002

Übungen zur Vorlesung

Logik

Prof. Dr. Klaus Madlener Blatt 2

5. Aufgabe: [Substitution] Seien $A, B, C \in F$. Ferner sei $A \models\!=\!\!\mid B$ und A ein Teilterm von C.

Beweisen Sie: Entsteht C' aus C durch Ersetzen ein oder mehrerer Vorkommen von A durch B, so gilt $C \models\!=\!\!\mid C'$.

6. Aufgabe: [logische Äquivalenz] Seien $A, B \in F$. Zeigen Sie: Genau dann gilt $A \models\!=\!\!\mid B$, wenn $f_A = f_B$ ist.

7. Aufgabe: [vollständige Operatormengen] Es sei OP eine Menge von Operatoren. Die Menge $F(\mathrm{OP})$ der Formeln in den Operatoren aus OP ist definiert durch:

1. $V \subseteq F(\mathrm{OP})$.
2. Ist $A \in F(\mathrm{OP})$, und ist $\# \in \mathrm{OP}$ ein einstelliger Operator, so ist $(\# A) \in F(\mathrm{OP})$.
3. Sind $A, B \in F(\mathrm{OP})$, und ist $\star \in \mathrm{OP}$ ein zweistelliger Operator, so ist $(A \star B) \in F(\mathrm{OP})$.
4. Sind $A_1, \ldots, A_n \in F(\mathrm{OP})$, und ist $\star \in \mathrm{OP}$ ein n-stelliger Operator ($n \geq 3$), so ist $(\star A_1 \ldots A_n) \in F(\mathrm{OP})$.
5. $F(\mathrm{OP})$ ist die kleinste Menge mit diesen Eigenschaften.

Zeigen Sie, dass folgende Aussagen über OP äquivalent sind:

1. OP ist eine vollständige Operatormenge.
2. Für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und alle Funktionen $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ gibt es ein $A \in F(\mathrm{OP})$ mit $f = f_A$.
3. Für alle Funktionen $f : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ gibt es ein $A \in F(\mathrm{OP})$ mit $f = f_A$.

8. Aufgabe: [vollständige Operatormengen] Geben Sie einen zweistelligen Operator $\star$ an, so dass $\{\star\}$ vollständig ist.

9. Aufgabe: [logische Äquivalenz von Mengen] $X \subseteq F$ und $Y \subseteq F$ heißen *logisch äquivalent* mit der Schreibweise $X \models\!\!=\!\!| Y$, falls $\mathrm{Folg}(X) = \mathrm{Folg}(Y)$ gilt.

$X \subseteq F$ heißt *unabhängig,* falls für kein $A \in X$ die Aussageform A logisch aus $X \setminus \{A\}$ folgt, d.h. es gibt kein $A \in X$ mit $X \setminus \{A\} \models A$.

Zeigen Sie:

1. Es gibt einen Algorithmus, der zu einer endlichen Menge $X \subseteq F$ eine logisch äquivalente unabhängige Teilmenge $Y \subseteq X$ bestimmt.
2. Es gibt eine Menge $X \subseteq F$, die keine logisch äquivalente unabhängige Teilmenge $Y \subseteq X$ enthält.