Übungen zur Vorlesung

Logik

Prof. Dr. Klaus Madlener Blatt 9

36. Aufgabe:

1. Definieren Sie für $n \in \mathbb{N}$ eine Formel $\varphi_{\geq n}$ der Prädikatenlogik erster Stufe, mit der Eigenschaft, dass eine Interpretation $I = (D, I_c, I_v)$ genau dann ein Modell von $\varphi_{\geq n}$ ist, wenn D mindestens n Elemente enthält.
2. Definieren Sie für $n \in \mathbb{N}$ eine Formel $\varphi_{\leq n}$ der Prädikatenlogik erster Stufe, mit der Eigenschaft, dass eine Interpretation $I = (D, I_c, I_v)$ genau dann ein Modell von $\varphi_{\leq n}$ ist, wenn D höchstens n Elemente enthält.
3. Definieren Sie für $n \in \mathbb{N}$ eine Formel $\varphi_{=n}$ der Prädikatenlogik erster Stufe, mit der Eigenschaft, dass eine Interpretation $I = (D, I_c, I_v)$ genau dann ein Modell von $\varphi_{=n}$ ist, wenn D genau n Elemente enthält.

37. Aufgabe:

1. Definieren Sie eine Formel φ_{∞} der Prädikatenlogik zweiter Stufe, mit der Eigenschaft, dass eine Interpretation $I = (D, I_c, I_v)$ genau dann ein Modell von φ_{∞} ist, wenn D unendlich viele Elemente enthält.
2. Definieren Sie eine Formel $\varphi_{\text{üab}}$ der Prädikatenlogik zweiter Stufe, mit der Eigenschaft, dass eine Interpretation $I = (D, I_c, I_v)$ genau dann ein Modell von $\varphi_{\text{üab}}$ ist, wenn D überabzählbar viele Elemente enthält.
3. Definieren Sie eine Formel φ_{abz} der Prädikatenlogik zweiter Stufe, mit der Eigenschaft, dass eine Interpretation $I = (D, I_c, I_v)$ genau dann ein Modell von φ_{abz} ist, wenn D abzählbar unendlich viele Elemente enthält.

38. Aufgabe: Benutzen Sie die Formeln aus den Aufgaben 36 und 37, um zu zeigen, dass für die Prädikatenlogik zweiter Stufe

1. der Kompaktheitssatz nicht gilt,

2. es kein deduktives System $\mathcal{F}_{\mathrm{II}}$ gibt, so dass für $\Sigma \subseteq \mathrm{Form}$ und $\varphi \in \mathrm{Form}$ genau dann $\Sigma \models \varphi$ gilt, wenn $\Sigma \vdash_{\mathcal{F}_{\mathrm{II}}} \varphi$ gilt und
3. der absteigende Satz von Löwenheim und Skolem nicht gilt.

39. Aufgabe: Finden Sie einen Beweis im deduktiven System $\mathcal{F}$ für

1. $\forall x A \to \forall y\ A_x[y]$, falls $A_x[y]$ eine erlaubte Substitution ist,
2. $\forall x \forall y\ A \to \forall y \forall x\ A$,
3. $\forall x\ (A \to B) \to (A \to \forall x\ B)$, falls x nicht frei in A vorkommt,
4. $\forall x \forall y\ A \to \forall x A_y[x]$, falls $A_y[x]$ eine erlaubte Substitution ist,
5. $\forall x\ A \to (\forall x\ (A \to B) \to \forall x\ B)$
6. $\forall x \forall y\ A \to (\forall x \forall y\ (A \to B) \to \forall x \forall y\ B)$
7. $\forall x\ s = t \to \forall x\ t = s$,
8. $\forall x\ r = s \to (\forall x\ s = t \to \forall x\ r = t)$.

40. Aufgabe: Es sei

$$\Sigma = \{\forall x \forall y \forall z\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \quad \forall x\ x \cdot 1 = x, \quad \forall x\ x \cdot x = 1\}.$$

Zeigen Sie $\Sigma \vdash_{\mathcal{F}} \forall x\ 1 \cdot x = x$.