Deduktionstheorem - Generalisierungstheorem

3.24 Satz Hauptsätze für $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$

Seien $\Gamma \subseteq \mathbf{Form}$, $A, B \in \mathbf{Form}$.

a) **Deduktionstheorem**:
   1) $\Gamma \underset{\mathcal{F}}{\vdash} A \to B$ gdw $\Gamma, A \underset{\mathcal{F}}{\vdash} B$
   2) $\Gamma \underset{\mathcal{F}'}{\vdash} A \to B$ gdw $\Gamma, A \underset{\mathcal{F}'}{\vdash} B$, falls die Generalisierung nicht auf eine in A frei vorkommende Variable angewandt wurde.
   3) $\Gamma, A \underset{\mathcal{F}'}{\vdash} B$ gdw $\Gamma \underset{\mathcal{F}'}{\vdash} \tilde{A} \to B$,
      wobei $\tilde{A}$ ein universeller Abschluss von A ist.

b) **Generalisierungstheorem:**
   1) Falls $\Gamma \underset{\mathcal{F}}{\vdash} A$ und x nicht frei in Γ vorkommt, so $\Gamma \underset{\mathcal{F}}{\vdash} \forall x\ A$
   2) $\Gamma \underset{\mathcal{F}'}{\vdash} A$ gdw $\Gamma \underset{\mathcal{F}'}{\vdash} \forall x\ A$

c) **Kontrapositionstheorem:** Für $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$
   $\Gamma, A \vdash \neg B$ gdw $\Gamma, B \vdash \neg A$

Es gelten somit für die hier vorgestellten prädikatenlogischen Systeme die für das deduktive System der Aussagenlogik entsprechenden Sätze. Vorsicht muss man beim System $\mathcal{F}'$ mit dem Deduktionstheorem haben, da wir dafür eine allgemeinere Generalisierungsregel zugelassen haben die semantisch nicht immer korrekt ist.

Hinzu kommt das Generalisierungstheorem in den zwei Varianten.

Beweis

1. „$\curvearrowright$“ Aus $\Gamma \vdash A \to B$ folgt auch $\Gamma, A \vdash A \to B$. Da auch $\Gamma, A \vdash A$ gilt, folgt $\Gamma, A \vdash B$, wegen MP ($\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$).
   „$\curvearrowleft$“ Ang. $\Gamma, A \underset{\mathcal{F}}{\vdash} B$. Behauptung: $\Gamma \underset{\mathcal{F}}{\vdash} A \to B$
   Induktion über Beweislänge: Axiom oder Hypothese
   $$\begin{array}{ll} \Gamma \vdash B & \text{(Ax)} \\ \Gamma \vdash B \to (A \to B) & \text{(Ax)} \\ \Gamma \vdash A \to B & \text{(MP)} \end{array}$$
   Schritt ist MP-Schritt
   $$\begin{array}{rll} \vdots & \vdots & \\ \text{Schritt } j: & \Gamma, A \vdash C & \text{IV:}\Gamma \vdash A \to C \\ \vdots & \vdots & \\ \text{Schritt } k: & \Gamma, A \vdash C \to B & \text{IV}: \Gamma \vdash A \to (C \to B) \\ \vdots & \vdots & \text{Ax2+MP} \\ \text{Schritt } n+1: & \Gamma, A \vdash B & \Gamma \vdash A \to B \end{array}$$
2. In $\mathcal{F}'$ „$\curvearrowleft$“ Generalisierungsregel
   $$\begin{array}{ll} \Gamma, A \vdash C & \\ \quad\vdots & \\ \Gamma, A \vdash \forall x C & x \text{ nicht frei in } A \end{array}$$
   Dann IV:
   $$\begin{array}{ll} \Gamma \vdash A \to C & \\ \Gamma \vdash \forall x (A \to C) & \text{(Gen)} \\ \Gamma \vdash \forall x (A \to C) \to (A \to \forall x C) & \text{(Ax5)} \\ & x \text{ nicht frei in } A \\ \Gamma \vdash A \to \forall x C & \end{array}$$

Vollständigkeit der Axiomatisierung

3.25 Definition

Sei $\Gamma \subseteq \mathbf{Form}$, Γ heißt **konsistent**, falls es kein $A \in \mathbf{Form}$ gibt, mit $\Gamma \underset{\mathcal{F}}{\vdash} A$ und $\Gamma \underset{\mathcal{F}}{\vdash} \neg A$.

3.26 Bemerkung

- Γ ist konsistent gdw jede endliche Teilmenge von Γ ist konsistent.
- Ist Γ inkonsistent, dann gilt $\Gamma \underset{\mathcal{F}}{\vdash} A$ für jede Formel A.
- $\Gamma \cup \{\neg A\}$ inkonsistent gdw $\Gamma \vdash A$.
- $\Gamma \cup \{A\}$ inkonsistent gdw $\Gamma \vdash \neg A$.
- Ist Γ inkonsistent, so ist Γ nicht erfüllbar: Sei nämlich A mit $\Gamma \vdash A$ und $\Gamma \vdash \neg A$. I Interpretation, die Γ erfüllt (wegen $\Gamma \models A$ und $\Gamma \models \neg A$) folgt aber I erfüllt $\{A, \neg A\}$ $\lightning$
- Die Menge der allgemeingültigen Formeln ist konsistent.
- Die Menge der Theoreme von $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F}'$) ist konsistent.

3.27 Satz (Gödel): Vollständigkeit der Axiomatisierung

Seien $A \in \mathbf{Form}$, $\Sigma \subseteq \mathbf{Form}$, dann gilt:

a) $\models A \;\; \text{gdw} \;\; \underset{\mathcal{F}}{\vdash} A \;\; \text{gdw} \;\; \underset{\mathcal{F}'}{\vdash} A$.

b) Σ konsistent $\;\text{gdw}\;$ Σ erfüllbar.

c) $\Sigma \underset{\mathcal{F}}{\vdash} A \;\; \text{gdw} \;\; \Sigma \models A$.

Beweis: Siehe Yashuhara oder Enderton.

3.6 Theorien erster Stufe

3.28 Definition

Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache erster Stufe (fixiert durch die Funktions- und -Prädikatskonstanten). $\Gamma \subseteq \mathbf{Form}(\mathcal{L})$ heißt **logische Theorie erster Stufe**, falls Γ abgeschlossen ist gegenüber logischer Folgerung, d. h. $A \in \mathbf{Form} \quad \Gamma \models A$, so $A \in \Gamma$.

Beachte: Alternative Definitionen in Literatur:

- Γ Theorie, falls Γ abgeschlossen gegen MP und Generalisierung.
- Γ Menge **abgeschlossener Formeln**, abgeschlossen gegen logische Folgerung.

  T als generische Bezeichnung für Theorien.

3.29 Bemerkung Sei $\mathcal{L}$ Sprache 1-Stufe.

a) $T_{\mathcal{L}} = \{A \mid A \in \mathbf{Form}(\mathcal{L})$, allgemeingültig$\}$ ist Theorie. Sie ist in jeder Theorie über $\mathcal{L}$ enthalten.

b) $T_{\Sigma} = \{A \mid A \in \mathbf{Form}(\mathcal{L}), \quad \Sigma \models A\}$ für $\Sigma \subseteq \mathbf{Form}(\mathcal{L})$ ist eine Theorie, **die von Σ erzeugte Theorie** oder durch die Axiome Σ definierte Theorie.

c) Ist T eine Theorie, so $T \underset{\mathcal{F}}{\vdash} A \text{ gdw } A \in T$. T inkonsistent gdw es gibt A mit $A, \neg A \in T$, d. h. $T = \mathbf{Form}$.

d) Sei $\mathcal{R}$ Relationalsystem (Struktur) für $\mathcal{L}$ $I = (D, I_c)$. Dann ist $T_{\mathcal{R}} = \{A \mid A \in \mathbf{Form}(\mathcal{L}), \quad \mathcal{R} \models A\}$ eine Theorie: **Die Theorie von $\mathcal{R}$** Schreibe auch: $Th(\mathcal{R})$.

Theorien erster Stufe (Forts.)

Verwende hier $\mathcal{R} \models A$, falls für jede Interpretation der Variablen gilt $\mathcal{R}, I_v \models A$. Insbesondere $\mathcal{R} \models A$ gdw $\mathcal{R} \models \hat{A}$, wobei $\hat{A}$ ein universeller Abschluss von A ist.

($T_{\mathcal{R}} \models A$ zeige $\mathcal{R} \models A$ klar, da $\mathcal{R} \models T_{\mathcal{R}}$)

Insbesondere:

•$T_{\mathcal{R}}$ ist konsistent für jede Struktur $\mathcal{R}$.

e) $T \subseteq \mathbf{Form}(\mathcal{L})$ ist Theorie gdw $\{A \mid A \in \mathbf{Form}(\mathcal{L}), \models A\} \subseteq T$ und T ist abgeschlossen gegenüber MP.

3.30 Definition Sei T eine Theorie erster Stufe über $\mathcal{L}$

a) T heißt **vollständig**, falls für jede abgeschlossene Formel A gilt: $A \in T$ oder $\neg A \in T$.

b) T heißt **(endlich) rekursiv axiomatisierbar**, falls es eine (endliche) rekursive Teilmenge $\Sigma \subseteq \mathbf{Form}$ gibt mit $T_\Sigma = \{A \in \mathbf{Form}(\mathcal{L}) \mid \Sigma \models A\} = T$.

c) T heißt **entscheidbar**, falls T eine rekursiv entscheidbare Teilmenge von $\mathbf{Form}$ ist.

Fragen: Finde (endliche) Axiomatisierungen wichtiger Theorien. Insbesondere wann gilt $T_{\mathcal{R}} = T_\Sigma$ für Σ rekursiv.

Folgerungen

3.31 Bemerkung

a) $T_{\mathcal{R}}$ ist vollständig für jede Struktur $\mathcal{R}$. $T_{\mathcal{R}}$ ist somit konsistent und vollständig.

b) T erfüllbar (T hat eine Modell) gdw T konsistent.

c) T ist rekursiv axiomatisierbar, so T rekursiv aufzählbar.

d) Ist T vollständig, konsistent und rekursiv axiomatisierbar. Dann ist die Menge der Aussagen von T rekursiv entscheidbar.

   $\bullet A$ abgeschlossen, so A oder $\neg A$ in T. Da T rekursiv aufzählbar, findet man A oder $\neg A$ in dieser Aufzählung effektiv.

e) Ist T vollständig und konsistent, dann gilt $T = T_{\mathcal{R}}$ für eine Struktur $\mathcal{R}$.

   $\bullet \mathcal{R} \models T$ existiert, da T erfüllbar, d. h. $T \subseteq T_{\mathcal{R}}$. Angenommen $T \subsetneq T_{\mathcal{R}}$. Dann gibt es abgeschlossene Formel $A \in T_{\mathcal{R}}$ mit $A \notin T$. Da T vollständig ist, muss $\neg A \in T$ gelten, d. h. $A, \neg A \in \Gamma_{\mathcal{R}}$ $\lightning$

Frage: Wann ist T_{Σ} vollständig für rekursive Σ?
$\rightsquigarrow$ Entscheidbarkeit!

Beispiele

3.32 Beispiel

1. $Th(\mathbb{N})$ Theorie der natürlichen Zahlen.
   $\mathcal{R} = \langle \mathbb{N};\ 0, S, +, *, = \rangle$ natürliche Interpretation der Sprache der Arithmetik Konst. $0, S, +, *$ Funktionskonstante $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{n} \equiv S(S \cdots (S(0) \cdots)$ Schreibe auch: $(S^n 0)$.
   Gödel:
   a) $Th(\mathbb{N})$ ist nicht rekursiv entscheidbar.
   b) $Th(\mathbb{N})$ ist nicht rekursiv axiomatisierbar.
      Oder jede rekursive Axiomenmenge ist nicht vollständig für $Th(\mathbb{N})$.

   Insbesondere: **Peano Axiome**
   - P_1 $\quad \forall x \forall y\ (S(x) = S(y) \rightarrow x = y)$
   - P_2 $\quad \forall x\ S(x) \neq 0$
   - P_3 $\quad \forall x\ x + 0 = x$
   - P_4 $\quad \forall x \forall y\ x + S(y) = S(x + y)$
   - P_5 $\quad \forall x\ x * 0 = 0$
   - P_6 $\quad \forall x \forall y\ x * S(y) = x * y + x$
   - P_7 $\quad A_x[0] \rightarrow (\forall x\ (A \rightarrow A_x[S(x)]) \rightarrow \forall x\ A)$,
     (A Formel mit x als einzige frei vorkommende Variable in A)

   Sind keine Axiomatisierung von $Th(\mathbb{N})$.

2. **Elementare Arithmetik** (Arith. 1-Stufe). Basis der Sprache: $(\{0, 1, +, *\}, \{<\})$ Interpretation: $I_A = (\mathbb{N}, I_c)$ natürliche Interpretation I_c
   $Th(I_A)$ vollständig nicht rekursiv axiomatisierbar.

Beispiele (Forts.)

3. **Pressburger Arithmetik**: Sprache $(\{0, 1, +\}, \{<\})$
   Interpretation $I_{PA} = (\mathbb{N}, I_c)$, I_c wie gehabt.
   $Th(I_{PA})$ ist vollständig, entscheidbar und endlich axiomatisierbar.

$$Ax < \begin{cases} \forall x \neg(x < 0) \\ \forall x \forall y \; x < Sy \leftrightarrow x < y \vee x = y \\ \forall x \forall y \; x < y \vee x = y \vee y < x \end{cases}$$

4. $\mathbb{R}$ reelle Zahlen, Sprache $(\{0, 1, +, *, \cdots\}, \{<\})$
   Sprache der Körpertheorie.
   $Th(\mathbb{R})$ ist rekursiv entscheidbar (Quantorenelimination).
   $Th(\mathbb{R})$ ist rekursiv axiomatisierbar.
   Axiomatisierung:
   - Axiome für Körper
   - Nullstellen für Polynome mit ungeradem Grad + Ordnungsaxiom:

$$\begin{array}{l} \forall x \;\; \neg(x < x) \\ \forall x \forall y \;\; \forall z((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z) \\ \forall x \forall y \;\; x < y \vee y = x \vee y < x \\ \forall x \forall y \forall z \;\; x < y \rightarrow x + z < y + z \\ \forall x \forall y \;\; 0 < x \wedge 0 < y \rightarrow 0 < x * y \\ \forall x \;\; 0 < x \rightarrow \exists y(y * y = x) \end{array}$$

Beispiele (Forts.)

Reell abgeschlossene Körper
$\mathbb{R}$ ist „Beispiel“ dafür, Tarski

Wichtige Folgerungen: Entscheidbarkeit der Ebenen euklidische Geometrie!

5. Theorie der Ordnung mit Gleichheit $(<, =)$ sind weitere Beispiele entscheidbarer Theorien.

3.7 Aufzählungsverfahren für PL-1

Σ rekursiv, $\Sigma \subseteq \mathbf{Form}$, $T_\Sigma = \{A \mid \Sigma \models A\}$ r.a.

$\mathcal{R}$ Struktur, $T_\mathcal{R} = \{A \mid \mathcal{R} \models A\}$ i. Allg. nicht r.a. (vollst.)

1. Deduktive Beweismethoden (T_Σ)
2. Induktive Beweismethoden $(T_\mathcal{R})$

Hier nur 1. Grundlage: $\Sigma \models A \text{ gdw } \{\Sigma, \neg A\}$ nicht erfüllbar.