Tableaux-Methode für Pl-1

3.33 Definition

Sprache: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists$ (zunächst ohne $=$)

Formeln der Sprache in Klassen einteilen:

- Atomare und negierte atomare Formeln.
- α-Formeln (wie in A-Logik)
  $A \wedge B, \neg(A \vee B), \neg(A \rightarrow B), \neg\neg A, \alpha_1, \alpha_2$ wie gehabt.
- β-Formeln (wie A-Logik)
  $\neg(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B)$
- γ-Formeln
  $\forall x A, \neg\exists x A \quad (A \in \mathbf{Form})$
- δ-Formeln
  $\exists x A, \neg\forall x A \quad (A \in \mathbf{Form})$

Regeln zur Tableau-Konstruktion:

α, β Regeln zur Verarbeitung α, β Formeln.

γ-Regeln:

$$\begin{array}{c|c|c} \gamma & \forall x\ A & \neg\exists x\ A \\ \hline \gamma[t] & A_x[t] & \neg A_x[t] \end{array}$$

t beliebiger Term, Substitution erlaubt.

Tableaux-Methode für Pl-1 (Forts.)

δ-Regeln:

δ	$\exists x\ A$	$\neg\forall x\ A$
$\delta[y]$	$A_x[y]$	$\neg A_x[y]$

y Variable (oder Konstante 0-stellig) „y neu“. y kommt noch nicht in Formeln im Ast zu $A_x[y]$ frei vor und die Substitution ist erlaubt.

Systematische Konstruktion eines Modells:

Falls die Sprache keine F-Symbole enthält reichen die „Bezeichner“ für Elemente des Definitionsbereichs aus. Sonst wähle als Definitionsbereich für die Interpretation eine geeignete abgeschlossene Termmenge. Führe soviele „Terme“ ein wie notwendig. Existentielle Formeln benötigen „Lösungen“, solche dürfen nicht eingeschränkt werden.

δ-Formeln brauchen nur einmal „erfüllt“ zu werden. γ-Formeln hingegen müssen für alle Objekte die eingeführt wurden garantiert werden, müssen somit immer weiterhin beachtet werden.

3.34 Lemma Sei Γ eine Menge von Formeln über einer abgeschlossenen Termmenge (Universum) $\mathcal{U}$ mit

1. Für keine Formel A gilt $A \in \Gamma$ und $\neg A \in \Gamma$.
2. Für jede α-Formel in Γ gilt $\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma$.
3. Für jede β-Formel in Γ gilt $\beta_1 \in \Gamma$ oder $\beta_2 \in \Gamma$.
4. Für jede γ-Formel in Γ gilt $\gamma[t] \in \Gamma$ für alle $t \in \mathcal{U}$.
5. Für jede δ-Formel in Γ gibt es ein $t \in \mathcal{U}$ mit $\delta[t] \in \Gamma$.

Dann ist Γ erfüllbar.

Tableaux-Methode für Pl-1 (Forts.)

Problem: $\mathcal{U}$ kann unendlich sein. Erst recht wenn F-Symbole vorhanden!

Sprachen mit „=“ dann Funktionskonstanten und Terme.

<u>ϵ-Regel</u>

$$\frac{t_1 = t_2}{A[t_1 \leftarrow t_2]}$$

In einer Formel A kann ein Term t_1 durch einen „gleichen“ Term t_2 ersetzt werden, wenn im Ast zu A der Knoten mit der Markierung $t_1 = t_2$ vorkommt. $\forall x \;\; x = x$ als Wurzel der $=$ Tableaux zulassen.

Problematische Regel, da sie zu einer Formelexplosion führt.

3.35 Satz Sei $A \in \mathbf{Form}(\mathcal{L})$, $\Sigma \subseteq \mathbf{Form}(\mathcal{L})$

a) $\models A$ gdw es gibt ein abgeschlossenes Tableau für $\neg A$.

b) $\Sigma \models A$ gdw es gibt ein abgeschlossenes Tableau für $\Sigma \cup \{\neg A\}$.

Systematische Tableaux-Konstruktion:

$\Sigma, \qquad \alpha, \;\; \delta, \;\; \gamma, \;\; \beta$

Beachte: $t \;\; A_x[t]$ muss erlaubt sein.

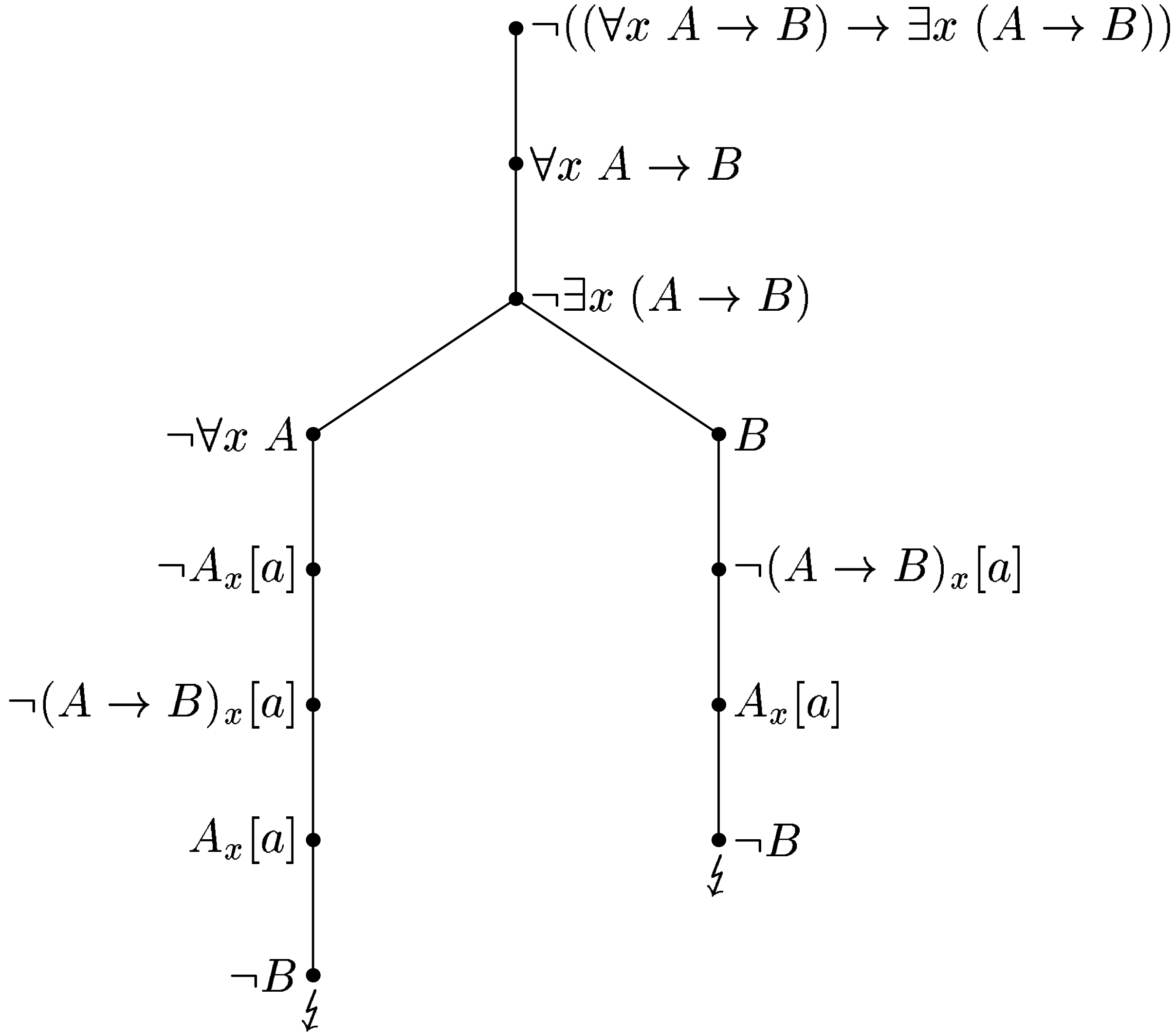
y neu bei δ-Regel beachten (frei).

Falls keine Funktionskonstanten in $\mathcal{L}$ Interpretation mit $\{c_1, c_2, \ldots\}$ als Konstanten.

Beispiele

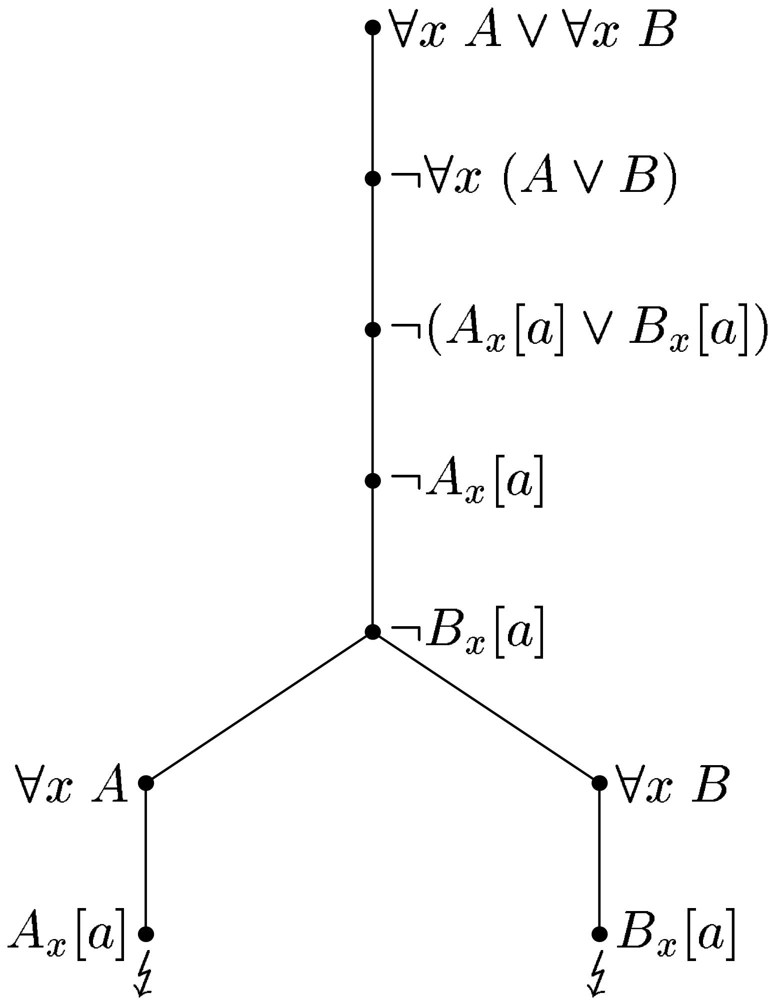
3.36 Beispiel

1. $\models (\forall x A \to B) \to \exists x(A \to B)$, x nicht frei in B:



Beispiele

2. $\Gamma = \{\forall x A \vee \forall x B\}$, $A \equiv \forall x(A \vee B)$. Gilt $\Gamma \models A$?



γ-Formeln dürfen nicht abgehakt werden, da man immer wieder neue Terme einführen kann und $\gamma[t]$ erfüllt werden muss!

Beispiele (Fort.)

3. $\exists x \, \neg p(x,x) \models \neg \forall x \exists y p(x,y)$
   Gibt es Modelle für $\{\exists x \, \neg p(x,x), \forall x \exists y \; p(x,y)\}$

$\exists x \, \neg p(x,x)$

$\forall x \exists y \; p(x,y)$

$\neg p(a,a)$

$\exists y \; p(a,y)$

$p(a,b)$

$\exists y \; p(b,y)$

$p(b,c)$

$\vdots$

Beispiele (Fort.)

Interpretation:

$p(x, y)$	a	b	c	d	e	$\cdots$
a	0	1				
b			1			
c				1		
d					1	
e						1
						$\ddots$

Es gibt Interpretation mit nur 2 Elementen
$\neg p(a, a), p(a, b), p(b, a), p(b, b)$

Vorschrift „neu“ kann aufgeweicht werden.

Erst alle Konstanten verwenden, falls diese Wahl zu $\lightning$ führt müssen neue Konstanten einführt werden, sonst Modell gefunden.

$$\exists x\ \neg p(x,x)$$

$$\forall x \exists y\ p(x,y)$$

$$\neg p(a,a)$$

$$\exists y\ p(a,y)$$

$$p(a,b)$$

$$\exists y\ p(b,y)$$

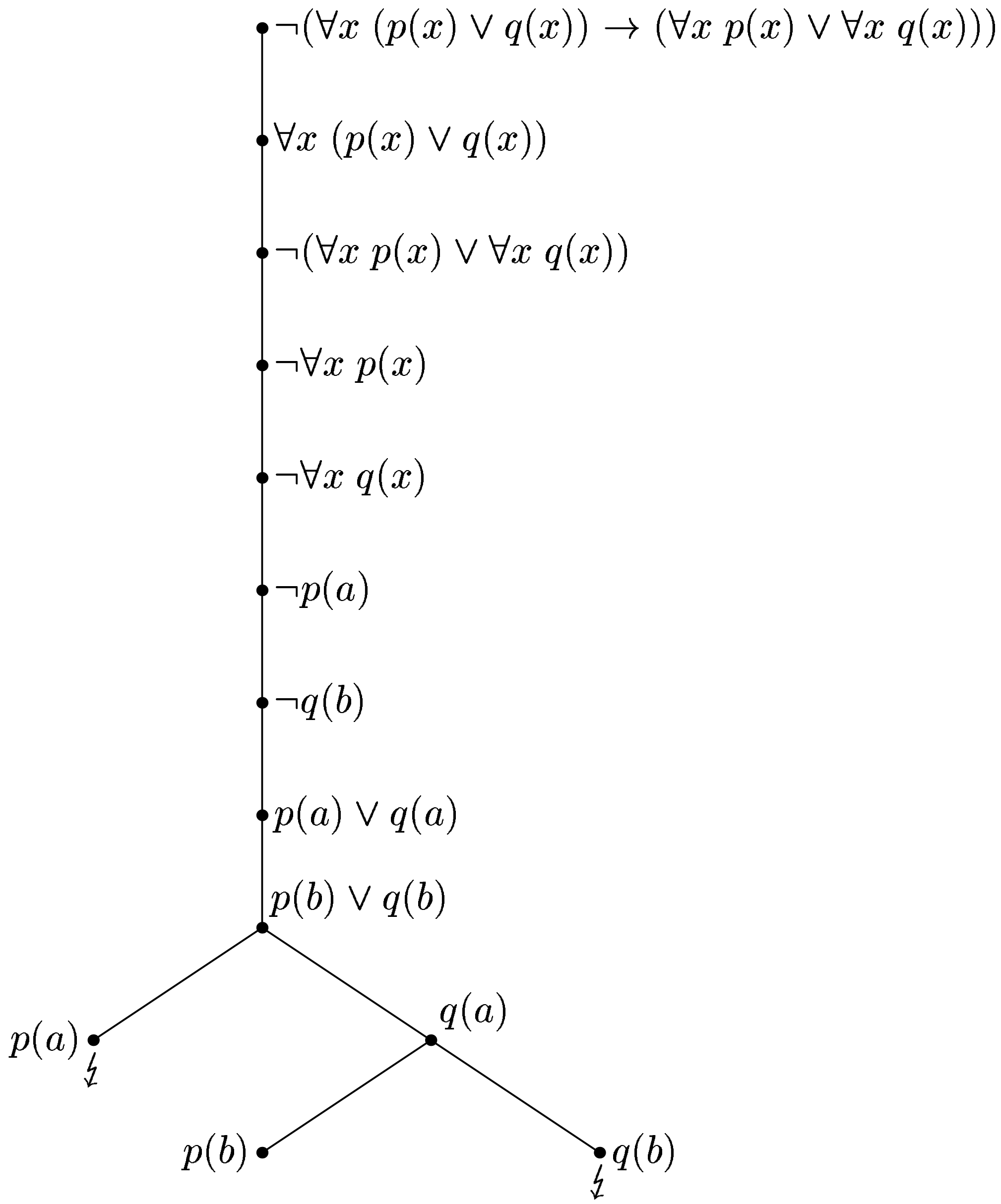
$$p(b,a)$$

Interpretation:

	a	b
a	0	1
b	1	0

Beispiele (Fort.)

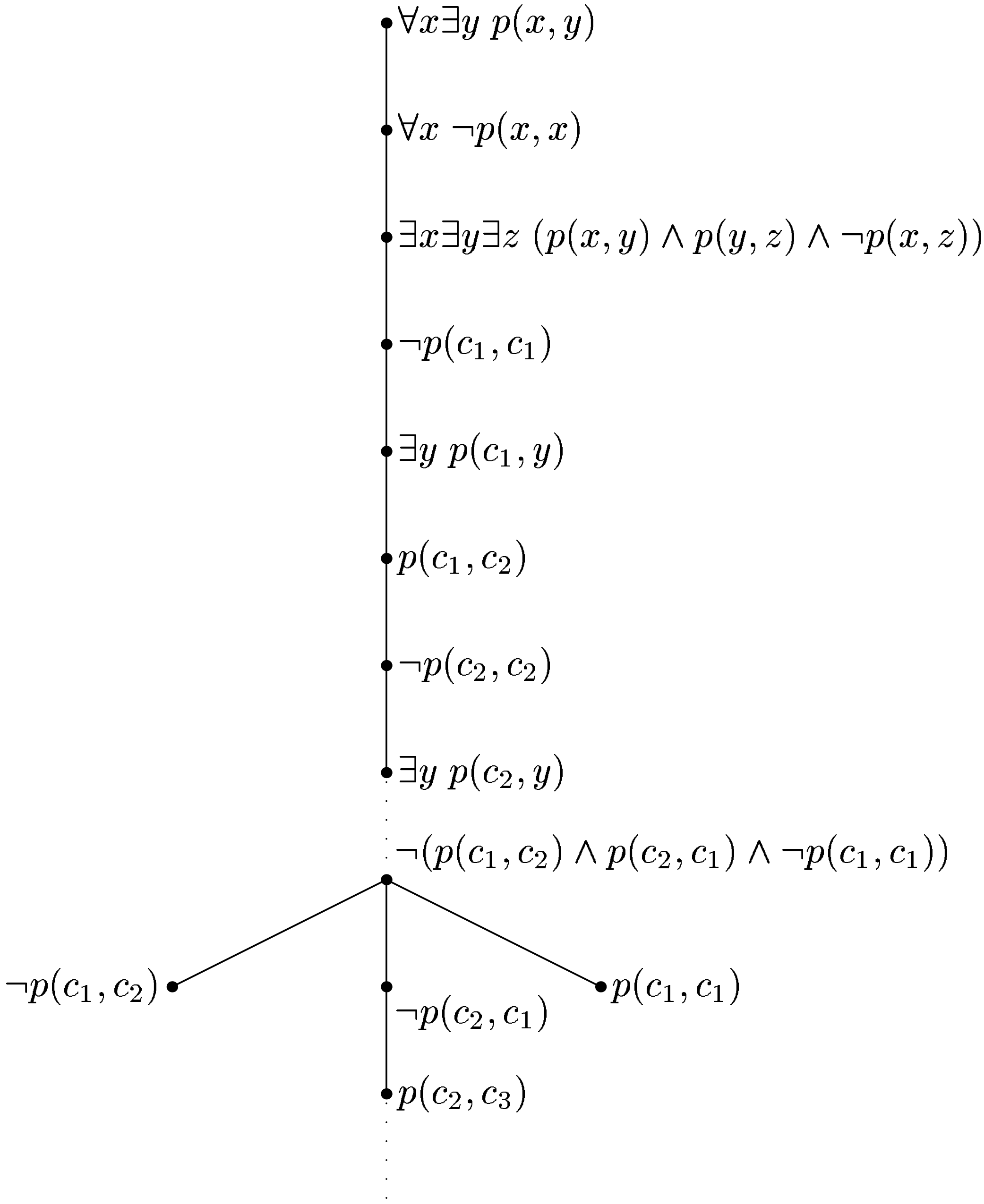
4. $\models \forall x(p(x) \vee q(x)) \rightarrow (\forall x p(x) \vee \forall x q(x))$



$$I = (\{a, b\} : I(p)(a) = I(q)(b) = F,$$
$$I(p)(b) = I(q)(a) = W)$$

Beispiele (Fort.)

5. $\forall x \exists y\; p(x,y), \forall x\; \neg p(x,x) \models \exists x \exists y \exists z\; (p(x,y) \wedge p(y,z) \wedge \neg p(x,z))$



Interpretation:

$$p(c_1, c_1) = F \quad p(c_1, c_2) = W \quad p(c_2, c_2) = F$$
$$p(c_2, c_1) = F \quad p(c_2, c_3) = W \quad p(c_3, c_3) = F \ldots$$

	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
c_1	0	1			
c_2	1	0			
c_3			0		
c_4				0	
$\vdots$					

6. $\{\forall x \forall y \forall z\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \forall x\ x \cdot 1 = x, \forall x\ x \cdot \bar{x} = 1\}$

$\models \forall x\ 1 \cdot x = x$ und $\models \forall x\ \bar{x} \cdot x = 1$

$\forall x\; x = x$

Axiome

$\neg\forall x\; 1 \circ x = x$

$\neg\forall x\; \bar{x} \circ x = 1$

$\neg\bar{b} \circ b = 1$

$b \circ \bar{b} = 1$

$(\bar{b} \circ b) \circ 1 = \bar{b} \circ b)$

$\bar{b} \circ \bar{\bar{b}} = 1$

$(\bar{b} \circ b) \circ (\bar{b} \circ \bar{\bar{b}}) = \bar{b} \circ b$

$(\bar{b} \circ b) \circ (\bar{b} \circ \bar{\bar{b}}) = ((\bar{b} \circ b) \circ \bar{b}) \circ \bar{\bar{b}}$

$(\bar{b} \circ b) \circ \bar{b} = \bar{b} \circ (b \circ \bar{b})$

$(\bar{b} \circ b) \circ \bar{b} = \bar{b} \circ 1$

$\bar{b} \circ 1 = \bar{b}$

$\bar{b} \circ (b \circ \bar{b}) = \bar{b}$

$(\bar{b} \circ b) \circ \bar{b} = \bar{b}$

$(\bar{b} \circ b) \circ (\bar{b} \circ \bar{\bar{b}}) = \bar{b} \circ \bar{\bar{b}}$

$(\bar{b} \circ b) \circ (\bar{b} \circ \bar{\bar{b}}) = 1$

$\bar{b} \circ b = 1$

Entscheidbare Fälle (Präfixe) Allgemeingültigkeit
$\mathcal{L}$ Sprache ohne Funktionskonstanten
abgeschlossene Formeln

1. $\forall x_1 \cdots \forall x_m \exists y_1 \cdots \exists y_m$ A — A quantorenfrei
2. $\forall x_1 \cdots \forall x_m \exists y \forall z_1 \cdots \forall z_n A$
3. $\forall x_1 \cdots \forall x_m \exists y_1 \exists y_2 \forall z_1 \cdots \forall z_n A$
4. $\exists y_1 \cdots \exists y_n \forall x_1 \cdots \forall x_m \exists z A$ — $n, m \geq 1$ n. entsch.
5. $\forall x_1 \cdots \forall x_m \exists y_1 \exists y_2 \exists y_3 \forall z_1 \cdots \forall z_n A$ — $m, n \geq 0$ n. entsch.

Beispiel: Typ 2. Formel

$$\neg \forall x_1 \forall x_2 \exists y \forall z \ A$$

$$\neg \forall x_2 \exists y \forall z \ A_{x_1}[a]$$

$$\neg \exists y \forall z \ A_{x_1, x_2}[a, b]$$

$$\neg \forall z \ A_{x_1, x_2, y}[a, b, a]$$

$$\neg \forall z \ A_{x_1, x_2, y}[a, b, b]$$

$$A_{x_1, x_2, y, z}[a, b, a, a_1]$$

$$A_{x_1, x_2, y, z}[a, b, b, a_2]$$