3.8 Resolventenmethode (Allg. Resolutionsverfahren)

Formeln in Klauselnormalform auf Erfüllbarkeit testen.

3.37 Definition

Eine Formel $A \in \mathbf{Form}(\mathcal{L})$ ist in **Klauselform** (KLF), wenn sie die Gestalt

$$A \equiv \forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n [C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k]$$

hat. Dabei sind die C_j Klauseln (d. h. Disjunktionen von Literalen ohne Wiederholungen) und die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ sind alle Variablen, die in den C_j vorkommen.

$\forall x_1, \ldots, \forall x_n$ Präfix $\quad [C_1 \wedge \cdots \wedge C_k]$ Mantisse (Matrix).

PKNF und Präfix enthält kein $\exists$ Quantor.

Beachte: In Literalen kommen nun Variablen vor. L und M sind konjugierte Literale, wenn $L = \bar{M}$ (A Atom, $\neg A \equiv \bar{A}$, $\bar{\bar{A}} \equiv A$).

$p(x)$, $\neg p(y)$ sind nicht konjugiert oder komplementär. Nach Substitution z. B. $x \leftarrow a$, $y \leftarrow a$, $p(a), \neg p(a)$ sind konjugiert. Aber auch $x \leftarrow x$, $y \leftarrow x$, $p(x), \neg p(x)$.

Ziel: Resolventenmethode verallgemeinern auf Formeln mit Variablen und Funktionen (d.h. Terme).

Skolemisierung

3.38 Lemma Skolem

Jede Formel A der P-Logik erster Stufe kann effektiv in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel A' in Klauselform transformiert werden.

A ist erfüllbar gdw A' ist erfüllbar.

Anwendung: Nachweis der Allgemeingültigkeit

$\models B \ \mathrm{gdw}\ \{\neg B\}$ unerfüllbar $\mathrm{gdw}\ (\neg B)'$ unerfülllbar.

Beweis: A gegeben. Transformiere A wie folgt:

Schritt 1: Bilde den existentiellen Abschluss von A.

Schritt 2: Eliminiere alle überflüssigen Quantoren.

Schritt 3: Umbenennung mehrfach quantifizierter Variablen.

Schritt 4: Ersetze Operatoren, die von $\wedge, \vee, \neg$ verschieden sind. z. B. $\rightarrow$, **<u>if</u>** $\ldots, \leftrightarrow \ldots$

Schritt 5: Schiebe $\neg$ nach innen, bis sie vor den Atomen stehen. Insbesondere $\neg\neg A$ durch A ersetzen.

$\neg\forall x A \rightsquigarrow \exists x \neg A$, $\neg(A \vee B) \rightsquigarrow (\neg A \wedge \neg B)$

$\neg(A \wedge B) \rightsquigarrow (\neg A \wedge \neg B)$

Skolem (Forts.)

Schritt 6: Schränke Quantoren auf ihren Wirkungsbereich ein:

$$\begin{aligned} Qx(A * B) &\rightsquigarrow A * QxB \\ & x \text{ nicht frei in } A \\ &\rightsquigarrow QxA * B \\ & x \text{ nicht frei in } B \end{aligned}$$

Schritt 7: Eliminiere existentielle Quantoren durch Einführung von Skolem Funktionen.

Wähle dabei die erste Teilformel (von links) der Form $\exists y B(y)$ und ersetze sie durch $B_y[f(x_1, \ldots, x_n)]$, $n \geq 0$, wobei

a) $x_1 \ldots x_n$ alle unterschiedlichen freien Variablen in $\exists y B(y)$ sind, die links von $\exists y B(y)$ universell quantifiziert sind.

b) f eine „frische“ n-stellige Funktionskonstante.

Schritt 8: Schiebe $\forall$ Quantoren nach links.

Schritt 9: Bringe Matrix in KNF.

Korrektheit $A_j \equiv \cdots \exists y B(y) \rightsquigarrow A_{j+1} \equiv \cdots B_y[f(x_1, \ldots, x_n)]$

Behauptung: A_j ist erfüllbar gdw A_{j+1} ist erfüllbar.

Sei I Modell für A_j: Für jede mögliche Belegung der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ muss es ein oder mehrere Werte für y geben, mit denen A_j wahr wird.

I' wie I zusätzlich eine n-stellige Funktionskonstante $f : f(x_1, \ldots, x_n)$ gibt für Wertetupel für $x_1 \ldots x_n$ ein (den) y Wert als Funktionsergebnis.

Beispiele

3.39 Beispiel

$$\forall x \ \{p(x) \to \exists z \ \{\neg\forall y \ [q(x,y) \to p(f(x_1))] \\ \wedge\forall y \ [q(x,y) \to p(x)]\}\}$$

1. Existentieller Abschluss und Elimination von überf. Quantoren:

$$\exists x_1 \forall x \ \{p(x) \to \{\neg\forall y \ [q(x,y) \to p(f(x_1))] \wedge \forall y \ [q(x,y) \\ \to p(x)]\}\}$$

2. Umbenennung von y:

$$\exists x_1 \forall x \ \{p(x) \to \{\neg\forall y \ [q(x,y) \to p(f(x_1))] \wedge \forall z \ [q(x,z) \\ \to p(x)]\}\}$$

3. Elimination von $\to$:

$$\exists x_1 \forall x \ \{\neg p(x) \vee \{\neg\forall y \ [\neg q(x,y) \vee p(f(x_1))] \wedge \forall z \ [\neg q(x,z) \\ \vee p(x)]\}\}$$

4. $\neg$ nach innen:

$$\exists x_1 \forall x \ \{\neg p(x) \vee \{\exists y \ [q(x,y) \wedge \neg p(f(x_1))] \wedge \forall z \ [\neg q(x,z) \\ \vee p(x)]\}\}$$

5. Quantoren auf Geltungsbereich einschränken:

$$\exists x_1 \forall x \ \{\neg p(x) \vee \{[\exists y \ q(x,y) \wedge \neg p(f(x_1))] \wedge [\forall z \ \neg q(x,z) \\ \vee p(x)]\}\}$$

Beispiele (Forts.)

6. Eliminieren der Ex.-Quantoren $\exists x_1$ und $\exists y$ (0 - stellige bzw. 1-stellige Funktionseinführung):

$$\forall x\ \{\neg p(x) \vee \{[q(x, g(x)) \wedge \neg p(f(a))] \wedge [\forall z\ \neg q(x, z) \vee p(x)]\}\}$$

7. Quantoren nach links:

$$\forall x \forall z\ \{\neg p(x) \vee \{[q(x, g(x)) \wedge \neg p(f(a))] \wedge [\neg q(x, z) \vee p(x)]\}\}$$

8. KNF:

$$\forall x \forall z\ \{[\neg p(x) \vee q(x, g(x))] \wedge [\neg p(x) \vee \neg p(f(a))] \wedge [\neg p(x) \\ \vee \neg q(x, z) \vee p(x)]\}$$

$$\rightsquigarrow A' \equiv \forall x\ \{[\neg p(x) \vee q(x, g(x))] \wedge \neg p(f(a))\}$$

Beispiele (Forts.)

$A' \equiv \forall x[[\neg p(x) \vee q(x, g(x))] \wedge [\neg p(f(a))]]$
Erfüllbar?

Tableaux:
Siehe nächste Seite.

Terme: $a, f(a), g(a), g(f(a)), g(g(a)), g(g(f(a))), g(g(g(a)))$.

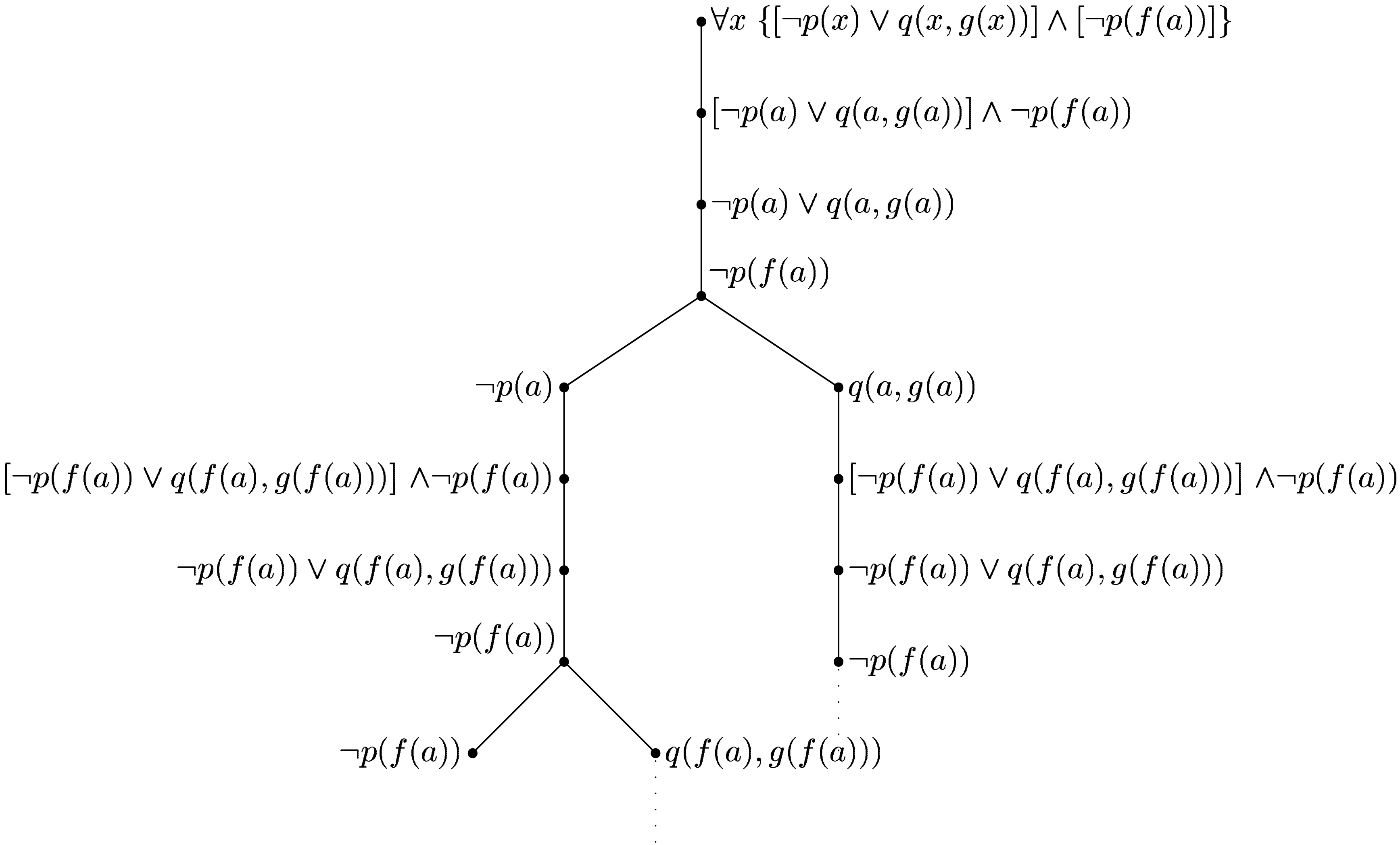
$$\mathcal{T} = \{a, g^n(a), g^n(f(a)) \;\; n \geq 0\} \text{ Definitionsbereich}$$

Erfüllbar:

$$I = (\{a\}, f(a) := a, g(a) := a, p(a) = 0, q(a, a) = 1)$$

Bei nicht Erfüllbarkeit: im endlich abgeschlossenen Tableau kommen nur endlich viele Grundterme (Terme ohne Variablen) vor, d. h. eine endliche Menge von Grundinstanzen der Matrix ist unerfüllbar.

$\leadsto$**Herbrand-Interpretationen**.


$\forall x\ \{[\neg p(x) \vee q(x, g(x))] \wedge [\neg p(f(a))]\}$
$[\neg p(a) \vee q(a, g(a))] \wedge \neg p(f(a))$
$\neg p(a) \vee q(a, g(a))$
$\neg p(f(a))$
$\neg p(a)$
$q(a, g(a))$
$[\neg p(f(a)) \vee q(f(a), g(f(a)))] \wedge \neg p(f(a))$
$[\neg p(f(a)) \vee q(f(a), g(f(a)))] \wedge \neg p(f(a))$
$\neg p(f(a)) \vee q(f(a), g(f(a)))$
$\neg p(f(a)) \vee q(f(a), g(f(a)))$
$\neg p(f(a))$
$\neg p(f(a))$
$\neg p(f(a))$
$q(f(a), g(f(a)))$

Das Herbrand-Universum

3.40 Definition

Sei $A \in \mathbf{Form}$. Das **Herbrand-Universum** H_A ist die Menge aller Terme, die aus den Individuenkonstanten (0-stellige Funktionskonstanten) und den Funktionskonstanten, die A vorkommen, gebildet werden können.

(enthält A keine Individuenkonstante, so wird eine hinzugenommen).

Beispiel: $A \equiv \forall x\{[\neg p(x) \vee q(x, g(x))] \wedge \neg p(f(a))\}$

$$H_A = \{a, f(a), g(a), g(g(a)), g(f(a)), \cdots\}$$

Die Menge der Grundterme in a, f 1-stellig, g 1-stellig.

$$B \equiv \forall x \exists y[p(f(x), y, g(x, y))]$$

$$H_B \equiv \{a, f(a), g(a, a), f(g(a, a)), g(a, f(a)), \ldots\}$$

Das Herbrand-Universum (Forts.)

3.41 Definition

Eine **Herbrand-Interpretation** für eine (abgeschlossene) Formel A ist eine Interpretation $I = (H_A, \ldots)$, die

a) jeder Individuenkonstante a in A den Term $a \in H_A$ zuordnet.

b) jeder n-stelligen Funktionskonstante f, die in A vorkommt, eine Funktion $I(f) : H_A^n \to H_A$ zuordnet, die die Terme $t_1, \ldots, t_n \in H_A$ auf den Term $f(t_1, \ldots, t_n) \in H_A$ abbildet.

3.42 Satz

• Eine Formel A in Klauselform ist erfüllbar gdw A ist in einer Herbrand-Interpretation erfüllbar.

•A ist unerfüllbar gdw A unerfüllbar in allen Herbrand-Interpretationen.

Festlegung der Definitionsbereiche der Interpretationen.

Sei $A \equiv \forall x_1 \cdots \forall x_n [C_1 \wedge \cdots \wedge C_k]$. Eine **Grundinstanz** einer Klausel C_j $(1 \leq j \leq k)$ von A ist eine Klausel, die man erhält, wenn man alle Individuenvariablen in C_j durch Terme aus H_A ersetzt, d. h. eine Grundsubstitution $x_i \leftarrow t_i$ auf C_j anwendet. Solche Klauseln, die keine Individuenvariablen enthalten heißen **Grundklauseln**.

Herbrand-Prozeduren

3.43 Satz von Herbrand

Eine Formel A in Klauselform ist genau dann unerfüllbar, wenn es eine endliche Konjunktion von Grundinstanzen ihrer Klauseln gibt, die unerfüllbar ist.

Konjunktionen von Grundklauseln sind wie aussagenlogische Formeln in KNF zu behandeln. Tableaux-Davis-Putnam-(Grund)-Resolution.

Herbrand-Prozeduren

A Formel in KLF mit n-Klauseln.

- Erzeuge systematisch alle Grundklauseln G_j aus den Klauseln C_j $(1 \leq j \leq n)$ von A.
- Prüfe, ob die Konjunktion (aller) Grundklauseln unerfüllbar ist.

Probleme:

- Systematische Erzeugung der Grundklauseln.
- Auswahl von Grundklauseln, die man auf Erfüllbarkeit testet.
- Welches Verfahren wählt man.

Grundresolventenmethode

$$A \equiv [\forall x \exists y\ p(x,y) \wedge \forall y \exists z\ q(y,z)] \rightarrow \forall x \exists y \exists z \\ (p(x,y) \wedge q(y,z))$$

gilt $\models A$? Transformiere $\neg A$ in KLF

$$B \equiv \forall x \forall y \forall y_1 \forall z [p(x, f(x)) \wedge q(y, g(y)) \wedge \\ (\neg p(a, y_1) \vee \neg q(y_1, z))]$$

$H_B = \{a, f(a), g(a), f(f(a)), f(g(a)), \ldots$

Bilde Grundinstanzen:

$[p(a, f(a)) \wedge q(a, g(a)) \wedge [\neg p(a,a) \vee \neg q(a,a)]]$

$\wedge$

$\vdots$

$\wedge [p(a, f(a)) \wedge q(f(a), g(f(a))) \wedge [\neg p(a, f(a)) \vee \neg q(f(a), g(f(a)))]$

Teste, ob erfüllbar:

Grundresolventenmethode

1.	$p(a, f(a))$	
2.	$q(f(a), g(f(a)))$	
3.	$\neg p(a, f(a)) \vee \neg q(f(a), g(f(a)))$	
4.	$\neg q(f(a), g(f(a)))$	1R3
5.	$\square$	2R4

Wie wählt man die Klauseln und Substitutionen geschickt!

Substitutionen

1.	$p(x, f(x))$	$x \leftarrow a \quad p(a, f(a))$
2.	$q(y, g(y))$	Substitutionen
3.	$\neg p(a, y_1) \vee \neg q(y_1, z)$	$y_1 \leftarrow f(a)$
		$\neg p(a, f(a)) \vee \neg q(f(a), z)$
4.	$\neg q(f(a), z)$	1R3 $\quad x \leftarrow a \;\; y_1 \leftarrow f(a)$
5.	$\square$	2R4 $\quad y \leftarrow f(a) \;\; z \leftarrow g(f(a))$

3.44 Definition (Erinnerung)

Eine Substitution θ ist eine endliche Menge der Form $\{\langle v_1, t_1\rangle, \ldots, \langle v_n, t_n\rangle\}$, v_i ist Individuenvariable $v_i \neq v_j$, t_i Terme ($\mathbf{Term}(\mathbb{V}, \mathbb{F})$, $\mathbb{F}$ Funktionskonstanten $t_i \not\equiv v_i$, $i = 1, \ldots, n$. $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ist der Definitionsbereich der Substitution $\langle v_i, t_i\rangle$ „Bindung“ für v_i.

θ induziert Abbildungen $\theta : \mathbf{Term}(\mathbb{V}, \mathbb{F}) \to \mathbf{Term}(\mathbb{V}, \mathbb{F})$

bzw. $\qquad \theta : \mathbf{AForm} \to \mathbf{AForm}$

Wie üblich:

$\theta(v_i) \equiv t_i \quad i = 1, \ldots, n$

$\theta(v) \equiv v \quad$ sonst

$\theta(f(t_1, \ldots, t_n)) \equiv f(\theta(t_1), \ldots, \theta(t_n))$

$\theta(p(t_1, \ldots, t_n)) \equiv p(\theta(t_1), \ldots, \theta(t_n))$

Substitutionen (Fort.)

Komposition von Substitutionen: wie üblich. $\theta\sigma$ erst θ, dann σ. Identität als Substitution erlaubt. Betrachte

$t_1 \equiv f(g(x), y)$, $t_2 \equiv f(z, g(a))$

Frage: Gibt es Substitution θ mit

$$\theta(f(g(x), y)) \equiv \theta(f(z, g(a)))$$

θ heißt dann **Unifikator** von t_1 und t_2.

$x \leftarrow a$	$y \leftarrow g(a)$	$z \leftarrow g(a)$	sind
	$y \leftarrow g(a)$	$z \leftarrow g(x)$	Unifikatoren

$\rightsquigarrow$ **Unifikationsalgorithmen**

Allgemeinster Unifikator: σ (MGU) (Most General Unifier).

Eigenschaft: Ist θ Unifikator, so gibt es τ mit $\theta = \sigma\tau$.

3.45 Definition

Sei $S = A_1 \vee \cdots \vee A_n \quad \{A_1, \ldots, A_n\}$ eine Disjunktion (Menge) atomarer Formeln A_j $(1 \leq j \leq n)$. Eine Substitution θ heißt **Unifikator** für S, falls $A_1\theta \equiv A_2\theta \equiv \cdots \equiv A_n\theta$ (insbesondere müssen die Prädikatskonstanten der A_i alle identisch sein).

Gibt es für S einen solchen Unifikator, dann heißt S **unifizierbar**.

Ein Unifikator θ heißt **allgemeinster Unifikator** oder MGU für S, wenn es für jeden Unifikator σ von S eine Substitution τ gibt, so dass $\sigma = \theta\tau$.

Unifikationsalgorithmen

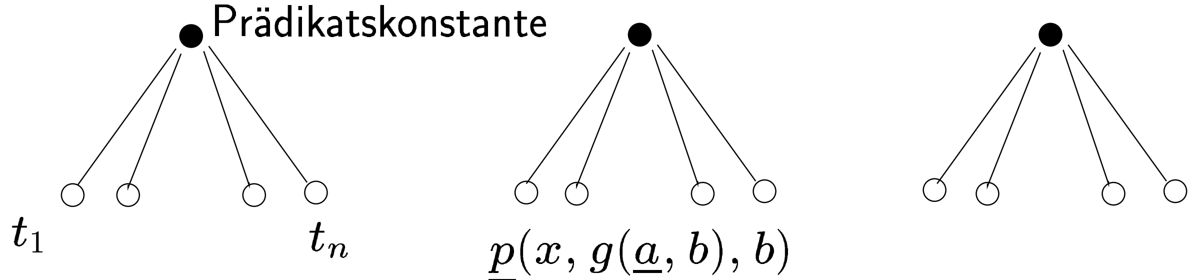
3.46 Satz

Sei $S = \{A_1, \dots, A_n\}$ Menge von atomaren Formeln, dann ist es entscheidbar ob S unifizierbar ist und ein MGU σ lässt sich berechnen.

Beweis: Unifikationsalgorithmen für atomare Formeln in Präfix Notation.

Idee: Bestimme „Disagreement set" durch Tiefensuche.

Darstellung atomarer Formeln



$\underline{p}(x, g(\underline{a}, b), b)$

$\underline{p}(x, g(\underline{f(y, z)}, x), y)$ $\underline{p}(x, g(\underline{g(h(x), a)}, y), h(x))$

DS: $\{f(y, z), a, g(h(x), a)\}$ nicht unifizierbar.

DS: $\{\dots, v, \dots, t, \dots\}$, v kommt nicht in t vor.

Ändere: $\sigma : v \leftarrow t$.

Berechne DSσ dann weiter bis entweder ein Unifikator bestimmt wurde oder nicht-unifizierbar als Ergebnis vorliegt.

Es gibt sehr effiziente Unifikationsverfahren (lineare Zeit).
Siehe hierfür Literatur.

Resolutionsverfahren

3.47 Definition Allgemeine Resolventenregel

Seien C_1 und C_2 Klauseln ohne gemeinsame Variablen.
Seien $A_1 \vee \cdots \vee A_k$ und $\neg B_1 \vee \neg B_2 \vee \cdots \vee \neg B_l$ Teildisjunktionen von C_1 bzw. C_2, so dass $A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_l$ unifizierbar sind, mit allgemeinsten Unifikator θ und sei
$A_i\theta \equiv B_j\theta \equiv p(r_1, \ldots, r_n)$ [**Faktor**]. Die Resolvente von C_1 und C_2 ist dann die Klausel $C_1\theta \backslash p(r_1, \ldots, r_n) \cup C_2\theta \backslash \neg p(r_1, \ldots, r_n)$ als Menge von Literalen.

3.48 Satz Robinson

Eine Formel A in Klauselform ist genau dann unerfüllbar, wenn die leere Klausel $\square$ aus A mit der Resolventenregel hergeleitet werden kann.

[Annahme: Klauseln in A sind variablendisjunkt] Immer erreichbar da

$$\forall \bar{x}[C_1(\bar{x}) \wedge \cdots \wedge C_k(\bar{x})] \models\!\!\!=\!\!\!| \; \forall \bar{x}_1 \forall \bar{x}_2 \cdots \forall \bar{x}_k \; [C_1(\bar{x}_1) \wedge \cdots \wedge C_k(\bar{x}_k)]$$

Beachte allgemeine Resolventenregel $k, l \geq 1$

Viele Varianten, Unit-Resolution, lineare Resolventenregel....

Ziel ist es, so schnell wie möglich die leere Klausel herzuleiten, d. h. soviel Literale wie möglich zu „faktorisieren“.

Beispiel

3.49 Beispiel

$A \equiv \neg\exists y \forall z\ [p(z,y) \leftrightarrow \neg\exists x\ [p(z,x) \wedge p(x,z)]]$

Frage gilt $\models A$?

$\neg A \equiv \neg\neg\exists y \forall z\ [p(z,y) \leftrightarrow \neg\exists x\ [p(z,x) \wedge p(x,z)]]$

KLF($\neg A$)

$$\forall z \forall x\ [[\neg p(z,a) \vee \neg p(z,x) \vee \neg p(x,z)] \wedge [p(z,f(z)) \vee p(z,a)] \wedge [p(f(z),z) \vee p(z,a)]]$$

Klauseln (nach Umbenennen der Variablen, variablendisjunkt)

$$\begin{array}{ll} 1. & \neg p(z_1,a), \neg p(z_1,x_1), \neg p(x_1,z_1) \\ 2. & p(z_2,f(z_2)), p(z_2,a) \\ 3. & p(f(z_3),z_3), p(z_3,a) \end{array}$$

Resolvente von 2. und 1. mit Teildisjunktionen

$\neg p(z_1,a), \neg p(z_1,x_1), \neg p(x_1,z_1)$ in 1. und $p(z_2,a)$ in $2.$

Der Unifikator $\langle x_1,a\rangle, \langle z_2,a\rangle, \langle z_1,a\rangle$ MGU.

$$4. \quad p(a,f(a))$$

Beispiel (Forts.)

Resolvente 3. und 1. mit Teildisjunktionen

$\neg p(z_1, a), \neg p(z_1, x_1), \neg p(x_1, z_1), p(z_3, a)$

DS:

$$\left.\begin{array}{lll} \{z_1, z_1, x_1, z_3\} & x_1 \leftarrow z_1 & z_3 \leftarrow z_1 \\ \{a, z_1\} & z_1 \leftarrow a & \end{array}\right\} \begin{array}{ll} x_1 \leftarrow a & z_1 \leftarrow a \\ z_3 \leftarrow a & \end{array}$$

$$5. \quad p(f(a), a)$$

Resolvente 4., 1. mit Teildisjunktionen

$p(a, f(a)), \neg p(x_1, z_1) \qquad x_1 \leftarrow a, z_1 \leftarrow f(a)$

$$6. \quad \neg p(f(a), a)$$

Resolvente 5., 6.

$$7. \quad \square$$

Also gilt

$\models A \equiv \neg \exists y \forall z \; [p(z, y) \leftrightarrow \neg \exists x \; [p(z, x) \wedge p(x, z)]]$