2.5 Algorithmischer Aufbau der Aussagenlogik

In diesem Abschnitt betrachten wir Verfahren die bei gegebener endlichen Menge Σ und A-Form A entscheiden ob $\Sigma \models A$ gilt. Die bisher betrachteten Verfahren prüfen alle Belegungen der in den Formeln vorkommenden Variablen oder zählen effektiv die Theoreme eines geeigneten deduktiven Systems auf. Dies ist sicherlich recht aufwendig. Obwohl die Komplexität dieses Problems groß ist (Entscheidbarkeit von SAT ist bekanntlich NP-vollständig), ist die Suche nach Verfahren, die „oft" schneller als die „brute force Methode" sind, berechtigt.
Wir betrachten drei solcher Verfahren die alle Erfüllbarkeitsverfahren sind, d.h. sie basieren auf: $\Sigma \models A \quad \mathrm{gdw} \quad \{\Sigma, \neg A\}$ unerfüllbar:

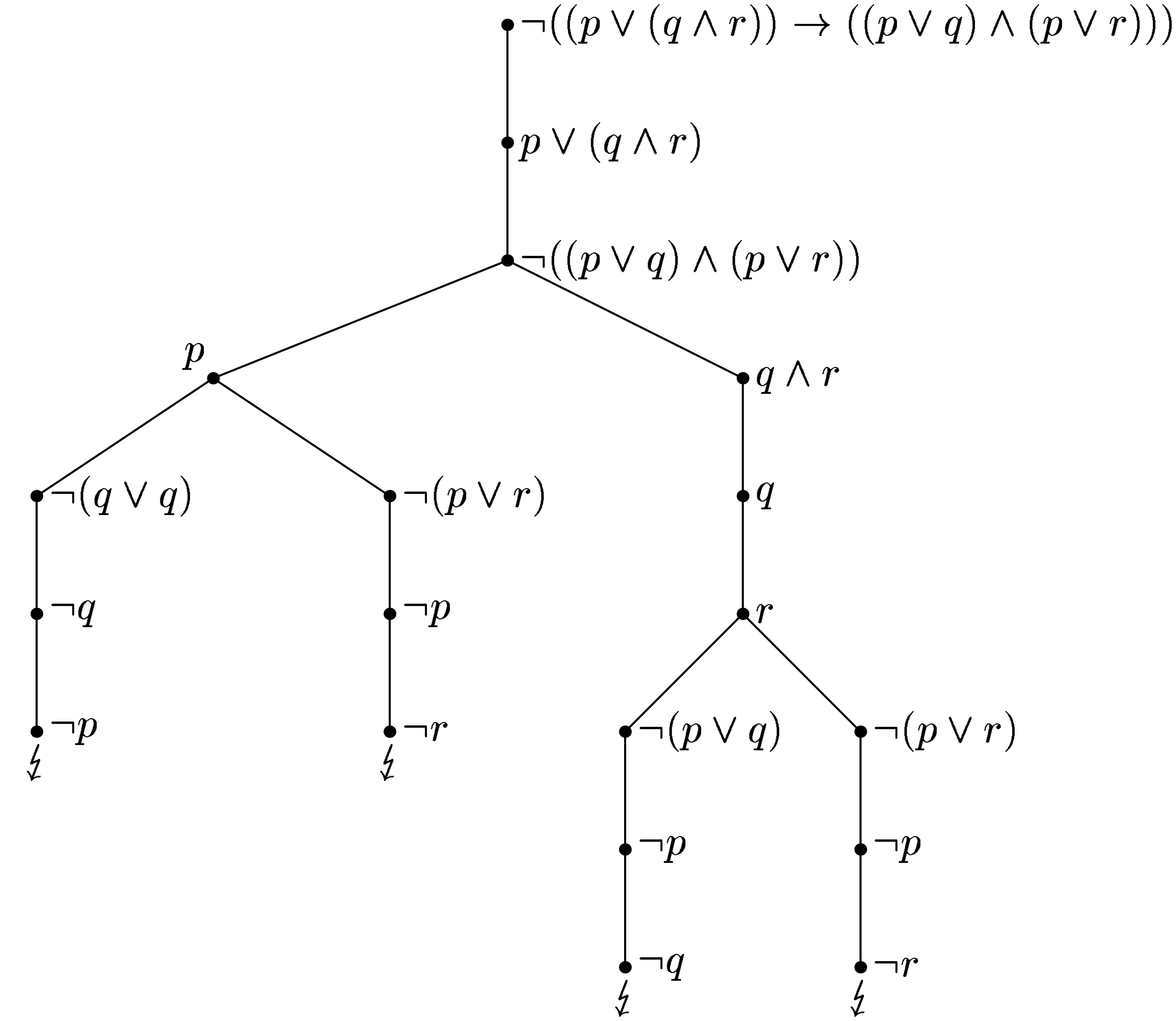
Semantische Tableaux   Davis-Putman   Resolution

2.31 Beispiel Semantische Tableaux

Um die Allgemeingültigkeit einer Formel A zu zeigen, konstruiere einen binären Baum für $\neg A$, dessen Knoten jeweils eine Klasse möglicher Belegungen repräsentieren die diesen Knoten erfüllen. Die Wurzel des Baumes repräsentiert alle möglichen Belegungen und die Vereinigung der Klassen der Söhne eines inneren Knotens des Baumes ist die Klasse der Belegungen, die der Knoten repräsentiert. Gelingt es, einen solchen Baum derart zu konstruieren, dass sämtliche Blätter des Baumes zu einem Widerspruch führen, ist gezeigt, dass es keine Belegung gibt, die $\neg A$ erfüllt. Somit gilt, dass A Tautologie ist.

Beispiel

$\models (p \vee (q \wedge r) \rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r))$ gilt genau dann, wenn $\neg((p \vee (q \wedge r)) \rightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r)))$ unerfüllbar ist.



Da alle Äste zu Widersprüchen führen, gibt es keine Belegung, die die Formel erfüllt!

Feststellungen

Zwei Arten von Formeln, solche, die zu Verzweigungen führen (β-Formeln), und solche, die nicht zu Verzweigungen führen (α-Formeln).

α-Formeln mit Komponenten α_1 und α_2, die zu Knoten mit den Markierungen α_1 und α_2 führen:

α	$\neg\neg A$	$A_1 \wedge A_2$	$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg(A_1 \rightarrow A_2)$
α_1	A	A_1	$\neg A_1$	A_1
α_2	(A)	A_2	$\neg A_2$	$\neg A_2$

β-Formeln mit Komponenten β_1 und β_2, die zu Verzweigungen führen mit Knotenmarkierungen β_1 und β_2:

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\beta} \\ \hline \beta_1 & \beta_2 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\neg(A_1 \wedge A_2)} \\ \hline \neg A_1 & \neg A_2 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{A_1 \vee A_2} \\ \hline A_1 & A_2 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{A_1 \rightarrow A_2} \\ \hline \neg A_1 & A_2 \end{array}$$

Beachte: Jede Aussageform ist entweder atomar (d.h. eine Variable) oder die Negation einer atomaren Formel (d.h. ein **Literal**) oder eine α- oder eine β-Formel, und genau von einem dieser Typen.

Es gilt: Eine α-Formel ist genau dann erfüllbar, wenn beide Komponenten α_1 und α_2 erfüllbar sind. Eine β-Formel ist genau dann erfüllbar, wenn eine der Komponenten β_1 oder β_2 erfüllbar ist.

Feststellungen (Fort.)

Insbesondere gilt für $\Gamma \subseteq F$ und α-Formel α mit Komponenten α_1 und α_2 und β-Formel β mit Komponenten β_1 und β_2:
$\Gamma \cup \{\alpha\}$ erfüllbar gdw $\Gamma \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ erfüllbar und
$\Gamma \cup \{\beta\}$ erfüllbar gdw $\Gamma \cup \{\beta_1\}$ oder $\Gamma \cup \{\beta_2\}$ erfüllbar.

Ein **Literal** ist eine Aussagevariable p_i oder eine negierte Aussagevariable $\neg p_i$. Für eine A-Form A sind A und $\neg A$ **komplementär** oder **konjugiert**.

Enthält Γ komplementäre Formeln (Literale) A und $\neg A$, so ist Γ nicht erfüllbar. Im Beispiel enthält jeder Ast komplementäre Literale, also ist die Astformelmenge für kein Ast erfüllar.

Formalisierung der Tableaux

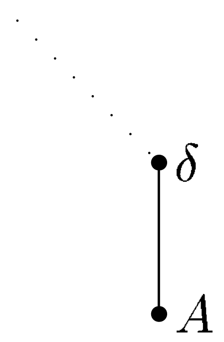
2.32 Definition

Tableaux sind binäre Bäume mit Knoten, die mit Formeln aus F markiert sind. Sei $\Sigma \subseteq F$.

1. Die Menge der Tableaux τ_Σ für Σ wird induktiv definiert durch:
   (a) $\tau_{\{A\}}$ ist der Baum mit einem Knoten, der mit $A \in \Sigma$ markiert ist. In diesem Fall schreibt man auch τ_A statt $\tau_{\{A\}}$.
   Graphisch:

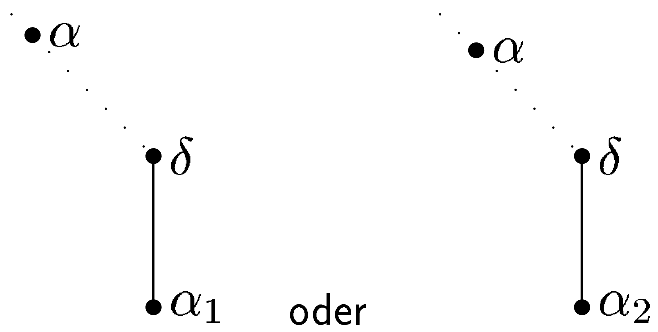
   $$\bullet A$$

   (b) Ist τ Tableau für Σ und δ Marke eines Blattes von τ, so lässt sich τ wie folgt zu einem Tableau τ' für Σ fortsetzen:
   τ' entsteht aus τ indem man als Nachfolger von δ:
   (Σ) einen Knoten hinzufügt, der mit einer Formel $A \in \Sigma$ markiert ist. (A soll nicht bereits als Marke im Ast von δ vorkommen.)
   Graphisch:

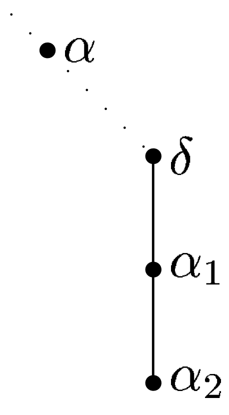


Formalisierung (Fort.)

(α) einen Knoten hinzufügt, der mit α_1 oder α_2 markiert ist, falls eine α-Formel α auf dem Ast zu δ vorkommt und α_1 und α_2 die Komponenten von α sind. Graphisch:

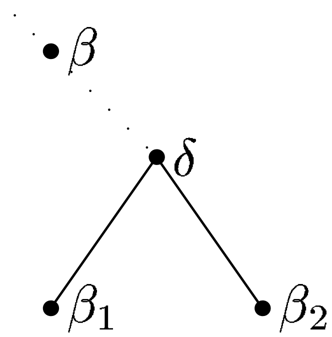


In der Praxis werden jedoch an δ nacheinander die Knoten für beide Komponenten hinzugefügt:



(β) zwei Knoten hinzufügt, die mit den Komponenten β_1 bzw. β_2 einer β-Formel β markiert sind, falls β auf dem Ast zu

δ vorkommt. Graphisch:



Entsteht τ' aus τ durch Anwendung einer der Regeln (Σ), (α) oder (β), so heißt τ' **direkte Fortsetzung** von τ.

(c) $\tau \in \tau_\Sigma$ genau dann, wenn $\tau = \tau_A$ für ein $A \in \Sigma$ oder es gibt eine Folge $\tau_0, \ldots, \tau_n (= \tau)$, $n \in \mathbb{N}$, so dass τ_{j+1} eine direkte Fortsetzung von τ_j ist für $j = 0, \ldots, n-1$ und $\tau_0 = \tau_A$ für ein $A \in \Sigma$.

2. Ein **Ast** eines Tableaus τ heißt **abgeschlossen**, falls er zwei konjugierte Formeln enthält (d.h. für ein $A \in F$ sowohl A als auch $(\neg A)$ enthält), sonst heißt der Ast **offen**.
   Ein Tableau τ heißt **abgeschlossen**, wenn jeder Ast von τ abgeschlossen ist.
   τ heißt **erfüllbar**, wenn τ einen **erfüllbaren Ast** (d.h. die Marken entlang des Ast bilden eine erfüllbare Formelmenge) enthält.
3. Sei $\Gamma \subseteq F$, $A \in F$. Dann ist A **Tableau-Folgerung** aus Γ $(\Gamma \vdash_\tau A)$ genau dann, wenn für $\Sigma = \Gamma \cup \{\neg A\}$ jedes Tableau aus τ_Σ sich zu einem abgeschlossenen Tableau aus τ_Σ fortsetzen lässt.

Folgerungen

2.33 Bemerkung und Beispiele

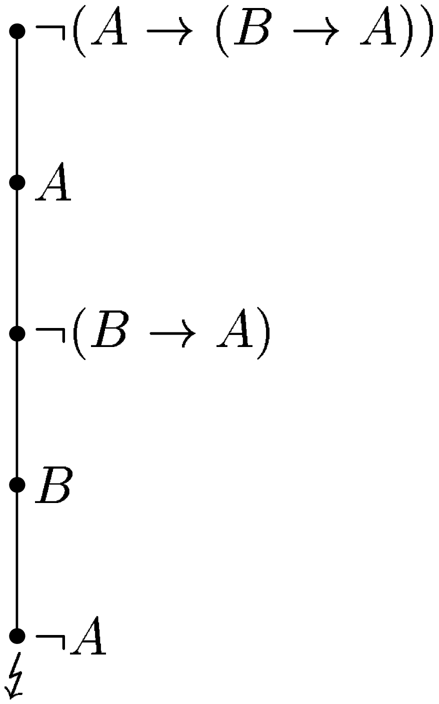
Ziel ist es zu zeigen: $\Gamma \vdash_\tau A \iff \Gamma \models A$.

1. Abgeschlossene Äste sind nicht erfüllbar. Abgeschlossene Tableaux sind nicht erfüllbar.
2. Ist Γ erfüllbar, so ist jedes Tableau aus τ_Γ erfüllbar (und insbesondere nicht abgeschlossen).
3. Gilt $\Gamma \vdash_\tau A$, so ist $\Sigma = \Gamma \cup \{\neg A\}$ nicht erfüllbar. Insbesondere sind Tableau-Folgerungen korrekt (d.h. aus $\Gamma \vdash_\tau A$ folgt $\Gamma \models A$).
4. Gibt es ein abgeschlossenes Tableau in τ_Γ, so lässt sich jedes Tableau aus τ_Γ zu einem abgeschlossenen Tableau fortsetzen.
5. Tableaux sind endliche Bäume. Ist $\tau \in \tau_\Sigma$, so kommen als Marken nur (negierte oder unnegierte) Teilformeln von Formeln aus Σ vor.

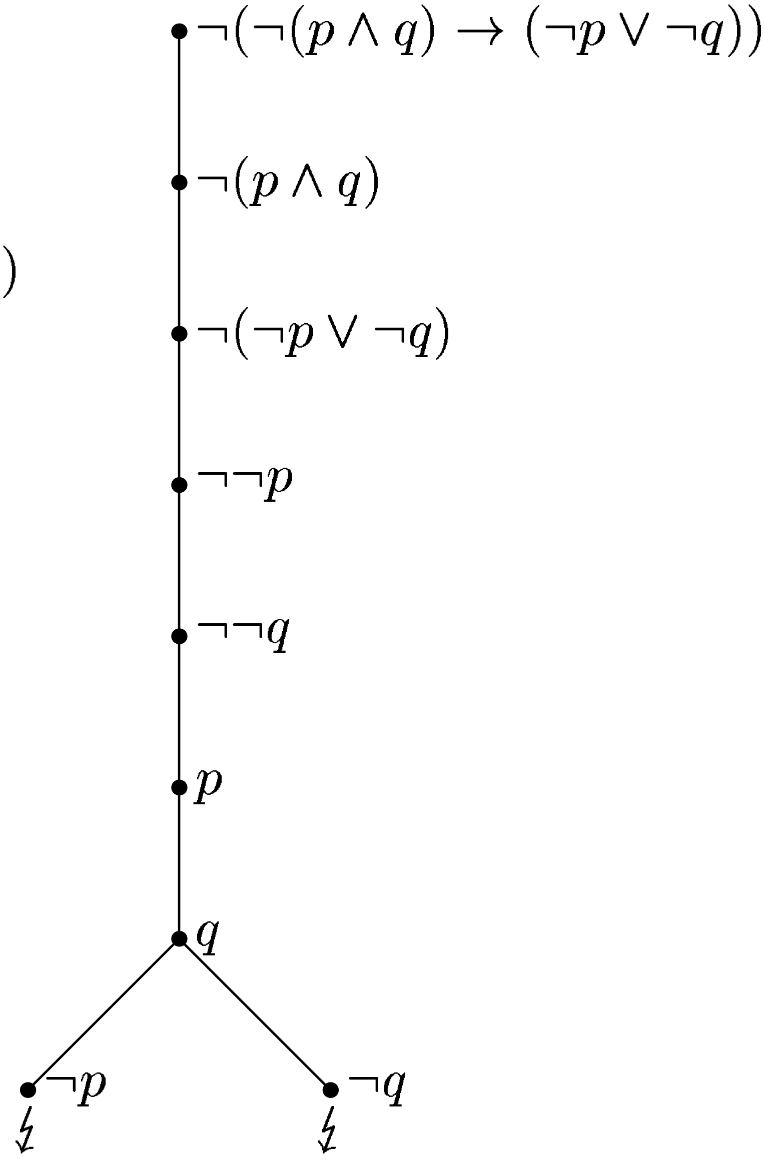
   Unendliche Tableaux können als Grenzfälle (falls Σ unendlich) betrachtet werden.

Beispiele

1. $\vdash_\tau A \to (B \to A)$:

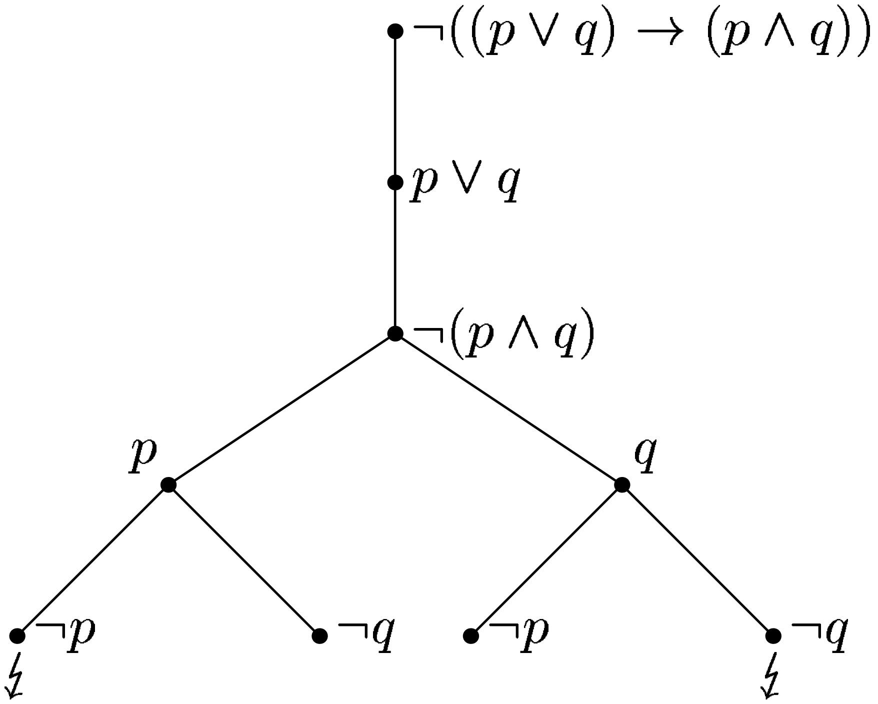


$\vdash_\tau \neg(p \land q) \to (\neg p \lor \neg q)$:



Beispiele (Fort.)

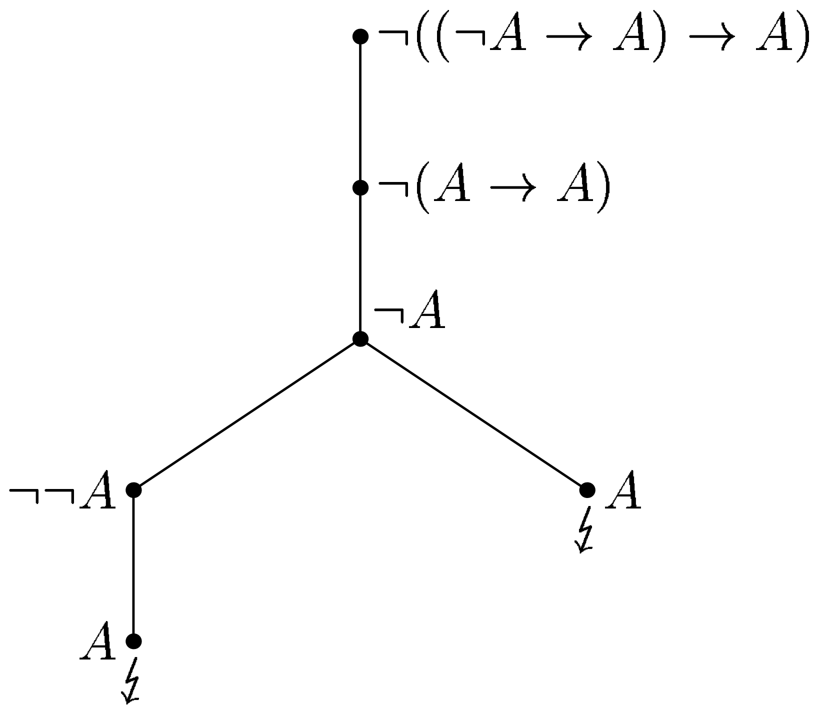
2. $\vdash_\tau (p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$ gilt nicht:



Es gibt Belegungen, die $\neg((p \vee q) \rightarrow (p \wedge q))$ erfüllen, nämlich φ mit $\varphi(p) = 1$ und $\varphi(q) = 0$ und φ' mit $\varphi'(p) = 0$ und $\varphi'(q) = 1$. Also gilt nicht $\vdash_\tau (p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$.

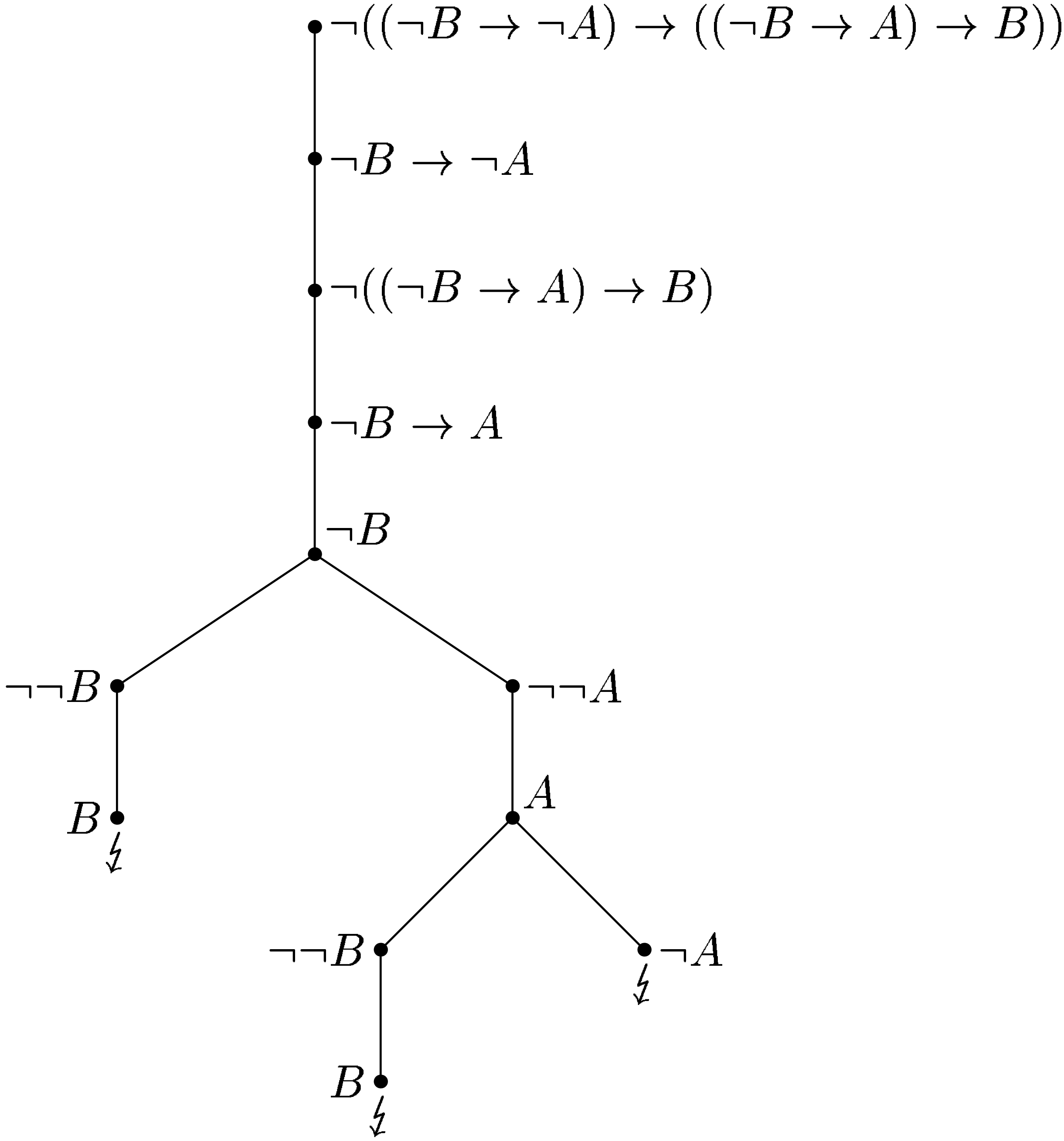
Beispiele (Fort.)

3. $\vdash_\tau (\neg A \to A) \to A$



Beispiele (Fort.)

4. $\vdash_\tau (\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$



Vollständige Tableaux

2.34 Definition Sei τ ein Tableau, Θ ein Ast von τ.

- Θ heißt **vollständig**, falls für die Menge der Formeln in Θ gilt: Mit jeder α-Formel $\alpha \in \Theta$ ist stets $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subseteq \Theta$ und mit jeder β-Formel $\beta \in \Theta$ ist entweder $\beta_1 \in \Theta$ oder $\beta_2 \in \Theta$.
- τ heißt **vollständig**, falls jeder Ast in τ entweder abgeschlossen oder vollständig ist.
- Sei $\Sigma \subseteq F, \Sigma$ endlich. $\tau \in \tau_\Sigma$ heißt **vollständig für** Σ, falls τ vollständig ist und jeder offene Ast Σ enthält.
  Sei $\Sigma \subseteq F, \Sigma$ unendlich, so verallgemeinerte Tableaux erlaubt (d.h. jeder offene Ast ist unendlich und enthält Σ).

2.35 Bemerkung

1. Ist Σ endlich, so lässt sich jedes Tableau aus τ_Σ zu einem vollständigen Tableau für Σ mit Hilfe von Σ-, α- und β-Regeln erweitern. Beachte, dass α- und β- Regeln nur (negierte) Teilformeln einführen und dass eine Formel nur endlich viele Teilformeln enthalten kann. (Gilt entsprechend für Σ unendlich mit verallg. Tableaux).
2. Sei σ die Menge der Formeln eines <u>vollständigen offenen</u> Astes von τ. Dann gilt:
   (a) Es gibt kein $p \in V$ mit $\{p, \neg p\} \subseteq \sigma$.
   (b) Ist $\alpha \in \sigma$, so auch $\alpha_1, \alpha_2 \in \sigma$.
   (c) Ist $\beta \in \sigma$, so ist $\beta_1 \in \sigma$ oder $\beta_2 \in \sigma$.

Vollständige Tableaux (Fort.)

2.36 Lemma Jede Menge Σ von Formeln, die (a), (b) und (c) aus der Bemerkung 2.35.2 genügt, ist erfüllbar. Insbesondere sind vollständige offene Äste von Tableaux erfüllbar.
Gibt es offene vollständige Tableaux für Γ, so ist Γ erfüllbar.

Beweis Definiere:

$$\varphi(p) = \begin{cases} 0, & \neg p \in \Sigma \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

Offensichtlich ist φ wohldefiniert.

Beh.: Falls $A \in \Sigma$, dann $\varphi(A) = 1$. (Induktion)

2.37 Satz Sei $\Gamma \subseteq F$. Dann gilt:

1. Γ ist nicht erfüllbar gdw τ_Γ enthält ein abgeschlossenes Tableau.
2. Äquivalent sind
   - $\Gamma \models A$ (oder $\Gamma \vdash A$)
   - $\tau_{\{\Gamma, \neg A\}}$ enthält ein abgeschlossenes Tableau.
3. Äquivalent sind
   - $\models A$ (oder $\vdash A$)
   - $\tau_{\neg A}$ enthält ein abgeschlossenes Tableau.

Beachte: Der Kompaktheitssatz (2.10) folgt aus 1., denn ist Γ nicht erfüllbar, enthält τ_Γ ein abgeschlossenes Tableau und abgeschlossene Tableaux sind stets endliche Bäume, d.h. eine endliche Teilmenge von Γ ist nicht erfüllbar.

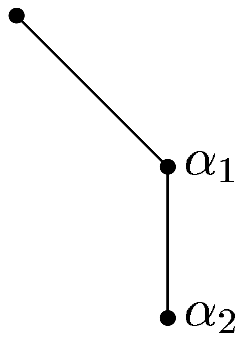
Systematische Tableaukonstruktion

Sei $\Gamma \subseteq F$, dann ist Γ abzählbar. Sei also $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots\}$. Konstruktion einer Folge von Tableaux τ_n $(n \in \mathbb{N})$:

1. $\tau_1 \equiv A_1$. Ist A_1 Literal, dann wird der Knoten markiert.
2. Sind alle Äste von τ_n abgeschlossen, dann Stopp!

τ_{n+1} entsteht aus τ_n wie folgt:

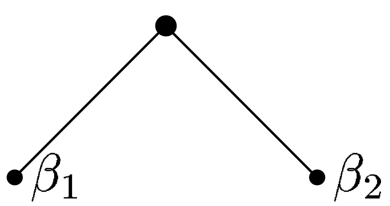
3. Ist Y die erste unmarkierte α-Formel in τ_n, durch die ein offener Ast geht, so markiere Y und erweitere jeden offenen Ast, der durch Y geht, um die Teilformeln α_1 und α_2 von Y.



α_1 und α_2 werden markiert, falls sie Literale sind. Dadurch werden möglicherweise Äste abgeschlossen.

oder:

4. Ist Y die erste unmarkierte β-Formel in τ_n, durch die ein offener Ast geht, so markiere Y und erweitere jeden offenen Ast, der durch Y geht, um

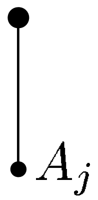


Markiere β_1 und/oder β_2, falls diese Literale sind. Dadurch werden möglicherweise Äste abgeschlossen.

Systematische Tableaukonstruktion (Fort.)

oder:

5. Gibt es eine Formel $A_j \in \Gamma$, die noch nicht in jedem offenen Ast vorkommt, so erweitere alle diese Äste um:



Falls möglich, Knoten markieren und Äste abschließen.

Verfahren: Beginne mit τ_1. Wiederhole 3. solange wie möglich. Dann 4.. Sind weder 3. noch 4. möglich so 5. Geht nichts mehr, so stopp.

Aus τ_n $(n \geq 1)$ erhält man kein weiteres Tableau, falls τ_n abgeschlossen ist oder alle Formeln von τ_n markiert sind und Γ endlich und ausgeschöpft ist.

Setze $\tau_\infty := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tau_n$. Dann ist τ_∞ ein binärer Baum.
Behauptung: τ_∞ ist vollständig! Beweis:

1. $\tau_\infty = \tau_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$.
   Ist τ_k abgeschlossen, gilt die Behauptung.
   Ist τ_k nicht abgeschlossen, ist τ_k vollständig: Alle Formeln sind markiert und Γ muss endlich sein. Alle Formeln von Γ sind in offenen Ästen von τ_k. Somit ist Γ nach Lemma 2.36 erfüllbar.

Systematische Tableaukonstruktion (Fort.)

2. Es gibt kein $k \in \mathbb{N}$ mit $\tau_\infty = \tau_k$. Dann ist τ_∞ ein unendlicher Baum. Es gibt eine Folge von Knoten $\{Y_n\}, n \in \mathbb{N}$, die unendlich viele Nachfolger haben: Setze $Y_1 = A_1$, die Wurzel mit unendlich vielen Nachfolgerknoten. Ist Y_n bereits gefunden, dann hat Y_n entweder einen oder zwei direkte Nachfolger, von denen einer unendlich viele Nachfolger hat. Wähle als Y_{n+1} diesen Knoten. Dann ist der Ast $\{Y_n | n \in \mathbb{N}\}$ in τ_∞, offen, vollständig und enthält Γ, d.h. Γ ist erfüllbar.

2.38 Bemerkung und Folgerung

1. Ist Γ eine rekursiv aufzählbare Menge, so ist das Hinzufügen einer Formel $A_n \in \Gamma$ zu einem Tableau effektiv, d.h. falls Γ rekursiv aufzählbar aber nicht erfüllbar ist, so stoppt die systematische Tableau-Konstruktion. Insbesondere stoppt die systematische Tableau-Konstruktion immer, wenn Γ endlich ist. Sie liefert dann entweder: Γ ist nicht erfüllbar, d.h. es gibt eine $n \in \mathbb{N}$, so dass τ_n abgeschlossen ist, oder: Γ ist erfüllbar und die (offenen) Äste von τ_n liefern alle Belegungen, die Γ erfüllen.

   Die systematische Tableau-Konstruktion liefert also für endliche Mengen in den offennen vollständigen Äste alle Belegungen der wesentlichen Variablen, die Γ erfüllen.

Folgerungen (Fort.)

2. Zur Vereinfachung der systematischen Tableau-Konstruktion für eine Menge $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$ beginne mit

$$\begin{array}{l} \bullet\, A_1 \\ | \\ \bullet\, A_2 \\ | \\ \bullet\, A_3 \\ \vdots \\ \bullet\, A_{n-1} \\ | \\ \bullet\, A_n \end{array}$$

als Anfangstableau.

3.

$$\begin{aligned} \Gamma \models A \quad & \iff \quad \Gamma \cup \{\neg A\} \text{ unerfüllbar} \\ & \iff \quad \tau_{\{\Gamma, \neg A\}} \text{ enthält abgeschlossenes Tableau} \\ & \iff \quad \Gamma \vdash_\tau A \end{aligned}$$

Für Γ endlich beginne also mit Anfangstableau für $\{\neg A, A_1, \ldots, A_n\}$