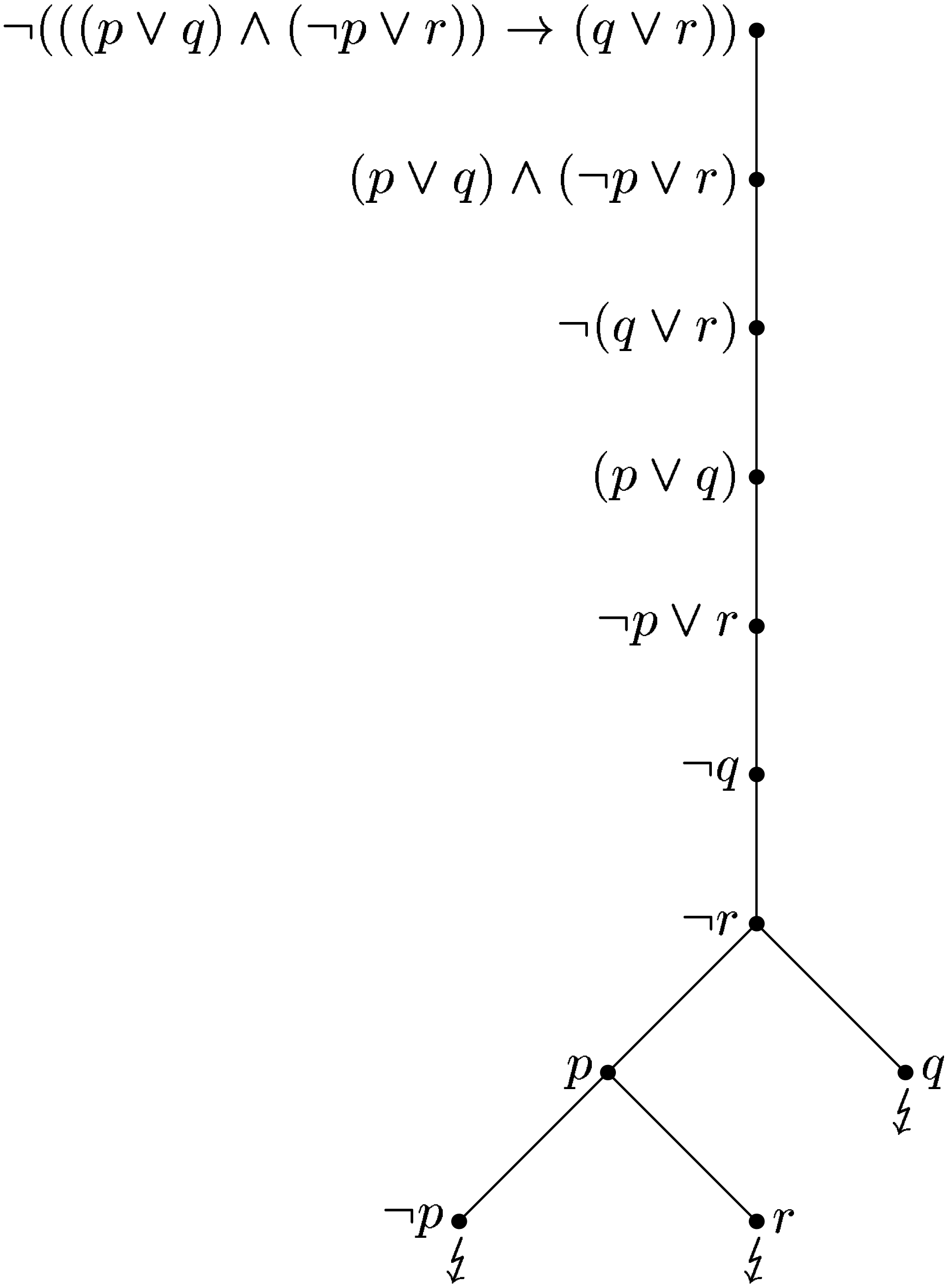
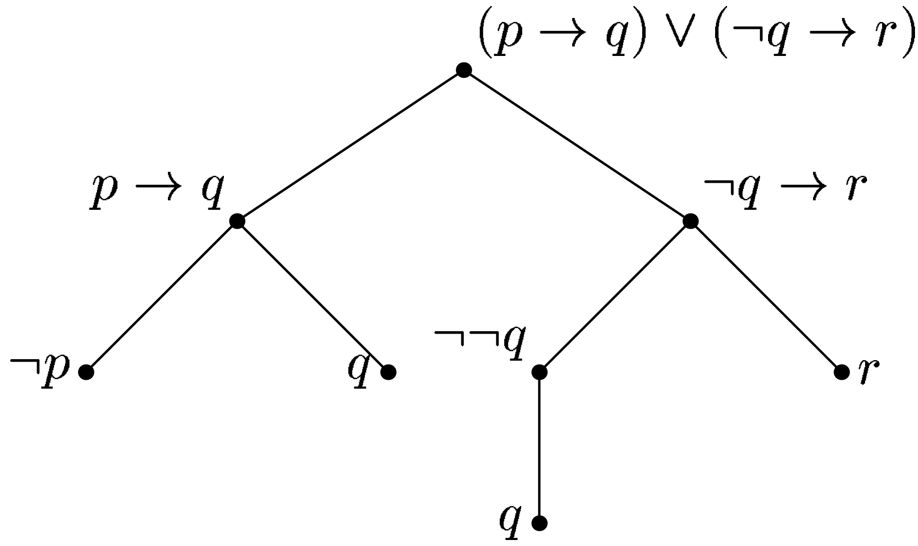
4. **Beispiele**

(a) $\models ((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \rightarrow (q \vee r)$ oder
$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \models (q \vee r)$



(b) Bestimme alle Belegungen, die $A \equiv (p \to q) \lor (\neg q \to r)$ erfüllen!




Demnach ist $\{\varphi \mid \varphi$ ist Bewertung mit $\varphi(p) = 0$ oder $\varphi(q) = 1$ oder $\varphi(r) = 1\}$ die Menge aller Belegungen, die $A$ erfüllen. An den Blättern des Baumes lässt sich auch eine äquivalente Disjunktive Normalform (DNF) zur Formel $A$ ablesen, nämlich $\neg p \lor q \lor r$.

Normalformen haben oft den Vorteil, dass man aus Formeln in dieser Form gewisse Informationen leicht ablesbar sind. So lassen sich z.B. aus einer KDNF (kanonische disjunktive Normalform) alle erfüllende Belegungen aus den Elementarkonjunktionen direkt ablesen. Aus minimalen DNF lassen sich leicht die Schaltnetze (mit UND, ODER, NEG Gattern) herleiten. Die systematische Tableux Konstruktion erlaubt es diese Normalformen aus einem vollständigen Tableau abzulesen.

# Normalformen

Motivation: Oft will man eine beliebige A-Form in eine Form transformieren die „einfachere“ Gestalt hat und spezielle Algorithmen zur Lösung einer bestimmten Fragestellung für Formeln in dieser Gestalt verfügbar sind. Die Transformation sollte nicht zu teuer sein, sonst würde sich der Aufwand dafür nicht lohnen.
Transformiert werden kann in einer

- logisch äquivalenten Formel, d.h. $A \models\!\!\!=\!\!| \; T(A)$ oder
- erfüllungs äquivalenten Formel, d.h.
  $A$ erfüllbar gdw. $T(A)$ erfüllbar

Wir behandeln drei dieser Normalformen:

- Negationsnormalform (**NNF**) Form in $\neg$, $\vee$, $\wedge$
- Konjunktive Normalform (**KNF**) Form in $\neg$, $\vee$, $\wedge$
- Disjunktive Normalform (**DNF**) Form in $\neg$, $\vee$, $\wedge$

**2.39 Definition** Eine Formel $A$ ist in NNF gdw. jedes Negationszeichen direkt vor einem Atom (A-Variable) steht und keine zwei Negationszeichen direkt hintereinander stehen.
Also:

1. Für $p \in V$ sind $p$ und $\neg p$ in NNF
2. Sind $A$, $B$ in NNF, so auch $(A \vee B)$ und $(A \wedge B)$

Beachte $(A \to B)$ wird durch $(\neg A \vee B)$ und $\neg(A \to B)$ durch $(A \wedge \neg B)$ ersetzt.

# Normalformen (Fort.)

**2.40 Lemma** Zu jeder Formel $A \in F$ gibt es eine logisch äquivalente Formel $B \in F(\neg, \vee, \wedge)$ in NNF mit $|B| \in O(|A|)$.

Beweis: Übung. Verwende Doppelnegationsregel, de Morgan.

**2.41 Definition** Eine Formel $A \equiv (L_1 \vee \ldots \vee L_n)$ mit Literalen $L_i$ für $i = 1, \ldots, n$ wird **Klausel** genannt.
Sind alle Literale einer Klausel negativ, so ist es eine **negative** Klausel. Sind alle Literale positiv, so ist es eine **positive** Klausel. Klauseln die maximal ein positives Literal enthalten, heißen **Horn Klauseln**.
$A$ wird $k$-Klausel genannt, falls $A$ maximal $k$ Literale enthält. 1-Klauseln werden auch Unit-Klauseln genannt.
Eine Formel $A$ ist in **KNF** gdw. $A$ eine Konjunktion von Klauseln ist. D.h. $A \equiv (A_1 \wedge \ldots \wedge A_m)$ mit Klauseln $A_i$ für $i = 1, \ldots, m$. Sind die $A_i$ $k$-Klauseln, so ist $A$ in $k$-**KNF**.

**Beispiel** $A \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ ist in 2-KNF (Beachte ist unerfüllbar). Betrachtet man Klauseln als Mengen von Literalen, so lassen sich Formeln in KNF als Mengen von Literalmengen darstellen, etwa $A \equiv \{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$.

**2.42 Lemma** Zu jeder Formel $A \in F$ gibt es eine logisch äquivalente Formel $B$ in KNF mit $|B| \in O(2^{|A|})$.

# Normalformen (Fort.)

Beachte: Es gibt eine Folge von Formeln $A_n$ mit $|A_n| = 2n$, für die jede logisch äquivalente Formel $B_n$ in KNF mindestens die Länge $2^n$ besitzt.

**2.43 Definition** Eine A-Form $A$ ist in **DNF** gdw. $A$ eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen ist, d.h. $A \equiv (A_1 \vee \ldots \vee A_i)$ mit $A_i \equiv (L_{i1} \wedge \ldots \wedge L_{im_i})$.

Die **duale Formel** von $A$, $d(A)$ (auch $A^*$) ist definiert durch:

- $d(p) \equiv p \quad$ für $p \in V$
- $d(\neg A) \equiv \neg d(A)$
- $d(B \vee C) \equiv (d(B) \wedge d(C))$
- $d(B \wedge C) \equiv (d(B) \vee d(C))$

**2.44 Lemma** Für jede A-Form A gilt:

1. Sei $A$ in KNF, dann ist NNF($\neg A$) in DNF.
2. Ist $A$ in KNF, so ist $d(A)$ in DNF.
3. $A$ ist Tautologie gdw. $d(A)$ widerspruchsvoll.
4. $A$ ist erfüllbar gdw. $d(A)$ ist keine Tautologie.

Setzt man $\varphi'(p) = 1 - \varphi(p)$, so gilt $\varphi'(d(A)) = 1 - \varphi(A)$