Allgemeingültigkeit: Entscheidbare Fälle

3.8 Lemma

Die Allgemeingültigkeit für Formeln der quantifizierten A-Logik ist entscheidbar.

Beweis: Methode der **Quantorenelimination**: Finde zu Formel der Q-A-Logik eine logisch äquivalente der A-Logik (Problemreduktion!)).

$(\forall P_i^0)B \leftrightarrow B_{P_i^0}[W] \wedge B_{P_i^0}[F] \qquad (P_i^0 \leftarrow W,\ P_i^0 \leftarrow F)$

$(\exists P_i^0)B \leftrightarrow B_{P_i^0}[W] \vee B_{P_i^0}[F]$

$I(\qquad) = I(\qquad)$

Nach Transformation bleibt eine Formel der A-Logik:
Entscheide, ob diese eine Tautologie ist.

Beispiel:

$\forall P \exists Q((P \leftrightarrow \neg Q) \vee (p \rightarrow Q))$

$\leadsto$

$\exists Q((W \leftrightarrow \neg Q) \vee (p \rightarrow Q)) \wedge \exists Q((F \leftrightarrow \neg Q) \vee (p \rightarrow Q))$

$\leadsto$

$[((W \leftrightarrow \neg W) \vee (p \rightarrow W)) \vee ((W \leftrightarrow \neg F) \vee (p \rightarrow F))]$
$\wedge\ [(F \leftrightarrow \neg W) \vee (p \rightarrow W) \vee ((F \leftrightarrow \neg F) \vee (p \rightarrow F))]$

$\leadsto W \wedge W \qquad \leadsto W$

Allgemeingültigkeit: Entscheidbare Fälle

Andere:

- Gleicheitslogik
- Monadische P-Logik 1-Stufe mit $=$
- Monadische P-Logik 2-Stufe mit $=$
- Pressburgerarithmetik: Gültige PL1-Formeln in $(\mathbb{N}, 0,', +, <)$
- Syntaktisch eingeschränkte Formelnklassen
  $\forall(\quad), \forall\exists, \exists\forall, \ldots ?$

3.3 Transformationen von Termen und Formeln

Einschränkung auf PL1.

3.9 Definition Substitution

$A \in \mathbf{Form}, t, \hat{t} \in \mathbf{Term}$, x Individuen-Variable.

Substitution von x durch t in A bzw. (in $\hat{t}$):
$A_x[t]$ $(\hat{t}_x[t])$ ist die Formel (der Term), die aus A (bzw. $\hat{t}$) entsteht, wenn man jedes freie Vorkommen von x in A (bzw. $\hat{t}$) durch t ersetzt.

Analog simultane Substitutionen
$A_{x_1,\ldots,x_n}[t_1, \ldots, t_n]$ bzw. $t_{x_1,\ldots,x_n}[t'_1, \ldots, t'_n]$
Allgemeiner ist eine Substitution durch $\sigma : \{x_i : i \in \mathbb{N}\} \to \mathbf{Term}$ gegeben. $\sigma(A)$, $\sigma(t)$ können entsprechend durch Induktion über den Aufbau der Formeln bzw. Terme definiert werden.

Die Substitution heißt **erlaubt**, falls kein Vorkommen einer Variablen in t bzw. t_i nach der Substitution in A gebunden vorkommt.
Dies ist der Fall z. B. wenn die Variablen von t nicht in A vorkommen.

3.10 Beispiel Substitutionen

$A \equiv \exists y \;\; x = 2 \cdot y \qquad t \equiv y + 1$

$A_x[t] \equiv \exists y \quad y + 1 = 2 \cdot y$	keine erlaubte Substitution
$A_y[t] \equiv \exists y \quad x \equiv 2 \cdot y$	keine freie Vorkommen
$t_y[t] \equiv (y + 1) + 1$	

Beispiel Substitutionen

Wie Ändert sich die Bedeutung einer Formel bei Substitutionen?

$I = (\mathbb{N}, +, \cdot) \quad x \leftarrow 3 \quad y \leftarrow 2 \quad t \leftarrow 3 \quad I(x) = I(t)$

Ersetzt man x durch t, sollte sich die Bedeutung einer Formel nicht verändern.

$I(A) = I(\exists y\ x = 2 \cdot y) = 0$
$I(A_x[t]) = I(\exists y\ y + 1 = 2y) = 1$ (keine erlaubte Substitution)

Betrachte die Formel:

$B \equiv \forall x(P(x, y) \to Q(x)) \quad t \equiv f(y, z)$

$B_y[t] \equiv \forall x(P(x, f(y, z)) \to Q(x))$ erlaubte Substitution.

3.11 Lemma Substitutionslemma

Sei A Term oder Formel, x Individuenvariable, $t \in \mathbf{Term}$ und $A_x[t]$ eine erlaubte Substitution. Dann gilt für jede Interpretation $I = (D, I_c, I_v)$

$$I(A_x[t]) = I^{x, I(t)}(A)$$

Insbesondere: Sind I, I' Interpretationen, die sich höchstens für x unterscheiden und gilt $I'(x) = I(t)$, so gilt $I'(A) = I(A_x[t])$.

Beweis: Induktion über Aufbau von Formeln bzw. Terme.

Folgerungen aus Substitutionslemma

3.12 Folgerung

Sei $A_x[t]$ erlaubt.

a) Ist A allgemeingültig, so auch $A_x[t]$.
b) $\forall x A \rightarrow A_x[t]$ ist allgemeingültig.
c) Spezialfälle: allgemeingültig sind:
$\forall x A \rightarrow A, \qquad A \rightarrow \exists x A$
d) Falls Substitution nicht erlaubt, so gilt das Lemma nicht:
$A \equiv \exists y(S(x) = y)$, $A_x[y] \equiv \exists y(S(y) = y)$
$I = (\mathbb{N}, \cdots) \quad I(A) = 1 \quad I(A_x[y]) = 0$
$\forall x \exists y(S(x) = y)$ allgemeingültig.
$\forall x \exists y(S(x) = y) \rightarrow \exists y(S(y) = y)$ nicht allgemeingültig.

Beachte: Sei $A(x_1, \ldots, x_n)$ Formel in der $x_1, \ldots, x_n$ frei vorkommen, dann gilt

A allgemeingültig gdw $\forall x_1 \cdots \forall x_n A$ allgemeingültig
(**universeller Abschluss**)

A erfüllbar gdw $\exists x_1 \cdots \exists x_n A$ erfüllbar
(**existentieller Abschluss**)

Sind $A, A \rightarrow B$ allgemeingültig, so ist auch B allgemeingültig.

Semantischer Folgerungsbefriff

3.13 Definition

Sei $\mathcal{L}$ eine (Teil-)Sprache der PL2
$\Gamma \subseteq \mathbf{Form}, A, B \in \mathbf{Form}$

a) A ist **logische Folgerung** aus $\Gamma : \Gamma \models A$. Wenn jede Interpretation, die Γ erfüllt auch A erfüllt $(I(\Gamma) = 1 \rightsquigarrow I(A) = 1)$. Sei $\mathrm{Folg}(\Gamma) = \{A \in \mathbf{Form} : \Gamma \models A\}$.
b) A und B sind **logisch äquivalent** $A \models\!\!\!=\!\!\!| \; B$, falls $A \models B$ und $B \models A$. (Lässt sich auf Mengen verallgemeinern!)

3.14 Bemerkung

1. $\Gamma \models A \text{ gdw } \{\Gamma, \neg A\}$ nicht erfüllbar.
2. $\varnothing \models A \text{ gdw } \models A$ (d.h. A ist allgemeingültig).
3. Γ nicht erfüllbar $\text{gdw } \Gamma \models A$ für alle $A \in \mathbf{Form}$.
4. $\Gamma \subset \Sigma, \Gamma \models A$, so $\Sigma \models A$. (Monotonieeigenschaft)
5. $\Gamma \models\!\!\!=\!\!\!| \; \Sigma$, d. h. $\Gamma \models B$ für $B \in \Sigma$ und $\Sigma \models C$ für $C \in \Gamma$.
   Insbesondere Γ erfüllbar $\text{gdw } \Sigma$ erfüllbar und
   $\Gamma \models A \text{ gdw } \Sigma \models A$. Also $\mathrm{Folg}(\Gamma) = \mathrm{Folg}(\Sigma)$.
6. $A \models\!\!\!=\!\!\!| \; B \text{ gdw } \models A \leftrightarrow B \text{ gdw } I(A) = I(B)$ für jede Interpretation I.
   $A \models\!\!\!=\!\!\!| \; B$ dann $\Gamma \models A \text{ gdw } \Gamma \models B$.

Beispiele

3.15 Beispiel

i) $\forall x Q(x) \models Q(y)$
(Spezialfall von $\forall x A \to A_x[t]$ allgemeingültig)

ii) $A(y) \not\models \forall y A(y)$ (y kommt frei in A vor)
$A(y) \equiv p(y),\ I = (\{0,1\}, I(p)(x) \equiv (x = 0), y \leftarrow 0)$
$I(A(y)) = 1$, jedoch $I(\forall y A(y)) = 0 \quad I(p)(1) = 0$

iii) $\models \exists x(p(x) \to \forall x p(x))$
Sei $\mathcal{I} = (D, I(p))$ eine Interpretation, d. h. $I(p) \subseteq D$
$I(\exists x(p(x) \to \forall x p(x)) = 1$ gdw es gibt $d \in D$, so dass
$I' = (D, I(p), x \leftarrow d)$, $I'(p(x) \to \forall x p(x)) = 1$
gdw $d \not\in I(p)$ oder $I'(\forall x p(x)) = 1$ für ein $d \in D$
gdw es gibt ein $d \in D$ mit $d \not\in I(p)$ oder $I(p) = D$

iv) Beispiele für äquivalente Formeln
- $\neg\neg A \models\!\!\!\!=\!\!\mid A$
- $W \vee A \models\!\!\!\!=\!\!\mid A \vee W \models\!\!\!\!=\!\!\mid W$
  $F \wedge A \models\!\!\!\!=\!\!\mid A \wedge F \models\!\!\!\!=\!\!\mid F$
  $A \vee A \models\!\!\!\!=\!\!\mid A \qquad A \wedge A \models\!\!\!\!=\!\!\mid A$
- $B \wedge QvA \models\!\!\!\!=\!\!\mid Qv(B \wedge A)$ $\qquad Q$ Quantor
- $B \vee QvA \models\!\!\!\!=\!\!\mid Qv(B \vee A)$ $\qquad v$ nicht frei in B
- $\forall v A \models\!\!\!\!=\!\!\mid \neg\exists v(\neg A)$, $\exists v A \models\!\!\!\!=\!\!\mid \neg\forall v(\neg A)$
- $\forall x A(x) \to B \models\!\!\!\!=\!\!\mid \exists y(A(y) \to B)$
  (falls y weder in $A(x)$ noch in B frei vorkommt)

Wichtige Sätze

- $\forall x(A \to B) \models \forall x A \to \forall x B$
- $\forall v A \models\!\!\!=\!\!\!| \forall y A_v[y]$
  $\exists v A \models\!\!\!=\!\!\!| \exists y A_v[y]$ Falls Sub. erlaubt und y nicht frei in A
- **Beachte**: $\forall v B \models\!\!\!=\!\!\!| B \qquad \exists v B \models\!\!\!=\!\!\!| B$
  Falls v nicht frei in B vorkommt.

3.16 Satz Sei $\Gamma \subseteq \mathbf{Form}$, $A, B \in \mathbf{Form}$.

1. **Deduktionstheorem**

$$\Gamma, A \models B \ \text{ gdw } \ \Gamma \models A \to B$$

2. **Modus-Ponens-Regel**

$$\Gamma \models A, \Gamma \models A \to B \ \textsf{ so } \ \Gamma \models B$$

3. **Kontrapositionsregel**

$$\Gamma, A \models \neg B \ \text{ gdw } \ \Gamma, B \models \neg A$$

4. **Generalisierungs-Theorem**
   Kommt $v \in Var$ in keiner Formel von Γ frei vor, so

$$\Gamma \models A \ \text{ gdw } \ \Gamma \models \forall v\ A$$

Insbesondere: $A \models \forall v\ A$ bzw. $\models A \to \forall v\ A$, falls v nicht frei in A vorkommt.

Beispiele

5. **Ersetzungstheorem**
   Sei $A' \in \mathbf{Form}$, A Teilformel von A'. Entsteht B' aus A' indem man einige Vorkommen der Teilformel A durch B ersetzt und gilt $A \models\!=\!\mid B$, so auch $A' \models\!=\!\mid B'$.

3.17 Beispiel Anwendung der Sätze

a) $\models \exists x \forall y A \rightarrow \forall y \exists x A$

$\text{gdw } \exists x \forall y A \models \forall y \exists x A$	Deduktionstheorem
$\text{gdw } \exists x \forall y A \models \exists x A$	Generalisierungstheorem
$\text{gdw } \neg \forall x \neg \forall y A \models \neg \forall x \neg A$	Ersetzungstheorem
$\text{gdw } \forall x \neg A \models \forall x \neg \forall y A$	Kontrapositionsregel
$\text{gdw } \forall x \neg A \models \neg \forall y A$	Generalisierungstheorem
$\text{gdw } \{\forall x \neg A, \forall y A\}$	nicht erfüllbar

b) Variante des Ersetzungstheorems
   A' entstehe aus A durch Substitution (erlaubte) einiger Vorkommen von x in A durch y. Dann gilt
   $\models \forall x \forall y (x = y \rightarrow (A \leftrightarrow A'))$
   (z. B. $A \equiv f(x, y) = g(x) \qquad A' \equiv f(y, y) = g(x)$)

Normalformen

3.18 Definition Normalformen (Präfix Normalformen)

Eine Formel ist in PKNF (Pränex Konjunktiver NF), falls sie die Gestalt

$$\underbrace{(\Delta v_1)\cdots(\Delta v_n)}_{\text{Präfix}}\ \{\underbrace{[A_{11}\vee\cdots\vee A_{1l_1}]\wedge\cdots\wedge[A_{m_1}\vee\cdots\vee A_{ml_m}]}_{\text{Matrix}}\}$$

$\Delta \in \{\exists, \forall\}$, v_j Variablen, die in mindestens einem A_{kl} vorkommen und paarweise verschieden sind.

A_{kl} Literale, d. h. atomare oder negierte atomare Formeln.

Beispiel: $\forall x \exists Q \forall y\{[\neg p \vee x \neq a \vee x = b] \wedge [Q(y) \vee y = b]\}$

3.19 Satz

Jede Formel $A \in \mathbf{Form}$ lässt sich effektiv in eine logisch äquivalente Formel in PKNF (PDNF) transformieren.

(Beachte die Länge der Formel kann exponentiell in der Länge der ursprünglichen Formel wachsen. Dies kann man vermeiden, wenn man nur erfüllungsäquivalente Formeln benötigt!).

Verfahren PKNF - Beispiele

Schritte:

1. Eliminiere überflüssige Quantoren.
2. Umbenennung gebundener Variablen.
3. Eliminiere logische Verknüpfungen und Operatoren.
   $\rightarrow, \leftrightarrow, \textbf{if} \ldots, \textbf{If} \ldots$
4. NNF: Negation vor Atome.
5. Quantoren nach außen.
6. Matrix in KNF (DNF).

Beispiel: $\forall x[(\forall y p(x) \vee \forall z q(z,y)) \rightarrow \neg \forall y r(x,y)]$

1. $\forall x[(p(x) \vee \forall z q(z,y)) \rightarrow \neg \forall y r(x,y)]$
2. $\forall x[(p(x) \vee \forall z q(z,y)) \rightarrow \neg \forall y' r(x,y')]$
3. $\forall x[\neg(p(x) \vee \forall z q(z,y)) \vee \neg \forall y' r(x,y')]$
4. $\forall x[(\neg p(x) \wedge \exists z \neg q(z,y)) \vee \exists y' \neg r(x,y')]$
5. $\forall x \exists z \exists y'[(\neg p(x) \wedge \neg q(z,y)) \vee \neg r(x,y')]$
6. $\forall x \exists z \exists y'[(\neg p(x) \vee \neg r(x,y')) \wedge (\neg q(z,y) \vee \neg r(x,y'))]$
   Ist PKNF
7. PDNF $\forall x \exists z \exists y'[(\neg p(x) \wedge \neg q(z,y)) \vee \neg r(x,y')]$