2 Prädikatenlogik – Formalisierung der Beziehungen zwischen Eigenschaften von Elementen, Funktionen und Prädikaten

Es zeigt sich, dass die Aussagenlogik nicht ausreicht, alle logischen Schlüsse zu beschreiben, insbesondere nicht solche Schlüsse, die die Eigenschaften von Elementen und deren Beziehungen untereinander betreffen.

Ein Beispiel einer Anwendung von logischen Formeln, die keine Formeln der Aussagenlogik sind, ist Hilberts 10. Problem: Gibt es ein Verfahren um zu entscheiden, ob eine diophantische Gleichung eine Lösung hat?

Gegeben eine Polynomgleichung in mehreren Veränderlichen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$, z.B. $3x^2 - 2xy^3 + 5z^3 + 6 = 0$. Frage: Gibt es für diese Gleichung eine Lösung (x, y, z)?

Zunächst wird das Problem in einer geeigneten Sprache formuliert. Ein geeignetes Alphabet für diese Sprache besteht aus den folgenden Mengen von Zeichen:

- für ganze Zahlen die Symbole: $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$
- eine abzählbare Menge von Variablen: $x, y, z, \ldots$
- eine Menge von Funktionszeichen: $+, -, \star, \ldots$
- eine Menge von Prädikatszeichen: $<, >, \ldots$
- eine Menge von logischen Zeichen: $=, \wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \ldots$
- Quantoren: $\forall, \exists$
- Trennzeichen: (und)

Zur Formalisierung einer Aussage der Form: "Jede ganze Zahl ist gerade oder ungerade!" oder "Die Gleichung $3x^2 - 2xy^3 + 5z^3 + 6 = 0$ hat eine Lösung!" werden für die Eigenschaften von Elementen Prädikate definiert. Für die Eigenschaft von x gerade oder ungerade zu sein werden beispielsweise die Prädikate $U(x)$ und $G(x)$ eingeführt. Die Definitionen für diese Prädikate lauten in obiger Sprache dann $G(x) \equiv \exists z\ x = 2 \star z$ und $U(x) \equiv \exists z\ x = 2 \star z + 1$ und die oben erwähnten Aussagen lauten formal: $\forall x\ (U(x) \vee G(x))$ und

$$\exists x \exists y \exists z\ (((3 \star (x \star x)) - ((2 \star (x \star (y \star (y \star y)))) + ((5 \star (z \star (z \star z))) + 6))) = 0).$$

Derartige Aussagen werden Formeln genannt. Formal besteht eine Formel aus logischen Verknüpfungen von Termen. Ein Term wiederum kann bezüglich des obigen Alphabetes wie folgt definiert werden: Jede ganze Zahl ist ein Term, jede Variable ist ein Term und falls t_1 und t_2 Terme sind, dann sind auch $(t_1 + t_2), (t_1 - t_2)$ und $(t_1 \star t_2)$ Terme. Eine Formel hat entweder die Gestalt $t_1 = t_2$ oder $t_1 < t_2$, wobei t_1 und t_2 Terme sind, oder die Gestalt $\exists x\ A$, $\forall x\ A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ oder $(\neg A)$, wobei A und B ihrerseits bereits Formeln sind und x eine Variable ist.

Der nächste Schritt ist es, einer Formel eine Bedeutung zuzuordnen. Welche Bedeutung hat eine Formel der oben definierten Sprache in der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen? Wann ist sie falsch und wann wahr? Eine Formel wie $(x + 5) > y$ oder $\forall x\ (x + 5) = 0$ hat für sich allein noch keine Bedeutung. Erst wenn eine Menge bestimmt wird, deren Werte die Variablen und Konstanten annehmen können, und wenn darüber hinaus den Symbolen wie $5, -1$ und den "freien" Variablen (das sind Variablen, die nicht im Gültigkeitsbereich eines Quantors liegen) ein solcher Wert zugeordnet wird und den Prädikats- und Funktionszeichen eine Bedeutung zugewiesen wird, kann die Bedeutung einer Formel erklärt werden. Das Bestimmen einer solchen Menge, die auch Definitionsbereich genannt wird, sowie die Festlegung der Bedeutung der einzelnen Symbole heißt Interpretation. Durch eine Interpretation wird die Bedeutung einer Formel festgelegt.

Beispiel: Sei I_1 eine Interpretation, die als Definitionsmenge die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen hat, den Zahlensymbolen ihre üblichen Werte aus $\mathbb{Z}$ und den Symbolen $+$ und $=$ die gewohnte arithmetische Bedeutung zuordnet. Für die Variablen x und y lege I_1 die Werte 6 bzw. 3 fest. Die Interpretation I_2 lege für die Variable x den Wert 0 und für y den Wert 5 fest und entspräche im übrigen der Interpretation I_1. Dann ist die Formel $(x + 5) = y$ falsch unter der Interpretation I_1 und wahr unter I_2. Die Formel $\forall x\ (x+5) > 0$ dagegen ist unter beiden Interpretationen falsch. Diese Formel ist falsch, unabhängig davon, wie die Variable x interpretiert wird. Wählt man aber als Definitionsbereich statt $\mathbb{Z}$ die Menge $\mathbb{N}$, wird die Formel wahr, wiederum unabhängig davon, wie die Variable x interpretiert wird.

Es tauchen die Fragen auf, ob es zu einer bestimmten Formel Interpretationen gibt, die die Formel "wahr" machen, oder ob eine Formel für alle Interpretationen wahr ist oder für alle Interpretationen falsch ist. Darüber hinaus stellt sich auch die Frage nach der "logischen Äquivalenz" zweier Formeln. Und natürlich die Frage, ob diese Fragen im allgemeinen überhaupt beantwortet werden können.

Man unterscheidet zwischen Prädikatenlogik erster und zweiter Stufe. Sind bei Formeln der ersten Stufe Quantifizierungen nur über Individuenvariablen möglich, so dürfen Formeln der zweiten Stufe darüber hinaus auch Quantifizierungen von Funktions- und Prädikatsvariablen enthalten. Beispielsweise kann man obiges Alphabet erweitern um die Funktionsvariablen $\Delta, F, G, \ldots$ und Prädikatsvariablen $P, Q, \ldots$ Dann ist die Formel zweiter Stufe $\exists \Delta\ (4\Delta 5) = 20$ unter der üblichen arithmetischen Interpretation wahr, denn wird Δ als die Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ interpretiert, ist die Formel $(4\Delta 5) = 20$ wahr.

2.1 Die Sprache der Prädikatenlogik

2.1 Definition (Allgemeine Sprache der Prädikatenlogik zweiter Stufe).

1. Das *Alphabet* für eine Sprache der *Prädikatenlogik zweiter Stufe* besteht aus folgenden Teilalphabeten:

(a) *Wahrheitswerte*: W und F

(b) *Logische Symbole:*

  i. *Junktoren:* $\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow, \ldots,$ IF_THEN_ELSE_

  ii. *Operatoren:* $=$, if_then_else

  iii. *Quantoren:* $\forall$ *(Allquantor)* und $\exists$ *(Existenzquantor)*

(c) *Variablensymbole:*

  i. n-stellige *Funktionsvariablen* F_j^n $(j \geq 1, n \geq 0)$. Die F_j^0 heißen *Individuenvariablen* und werden mit x_j bezeichnet.

  ii. n-stellige *Prädikatsvariablen* P_j^n $(j \geq 1, n \geq 0)$. Die P_j^0 heißen *aussagenlogische Variablen.*

(d) *Konstantensymbole:*

  i. n-stellige *Funktionskonstanten* f_j^n $(j \geq 1, n \geq 0)$. Die f_j^0 heißen *Individuenkonstanten* und werden mit a_j bezeichnet.

  ii. n-stellige *Prädikatskonstanten* p_j^n $(j \geq 1, n \geq 0)$. Die p_j^0 werden als W oder F interpretiert.

(e) 5. *Hilfssymbole:* (und) und ,.

Alle Zeichen sollen verschieden sein und kein Buchstabe soll Teilwort eines anderen sein. Die einzelnen Teilalphabete sollen entscheidbar sein. Spezielle Sprachen zweiter Stufe werden durch Festlegung der Konstanten ausgezeichnet.

2. *Ausdrücke* in Sprachen zweiter Stufe sind *Terme* und *Formeln*:

(a) Die Menge Term der *Terme* ist rekursiv definiert:

  i. Jede Individuenvariable x_j und jede Individuenkonstante a_j $(j \geq 1)$ ist ein (atomarer) Term.

  ii. Sind $t_1, \ldots, t_n$ $(n \geq 1)$ Terme, dann sind auch $f_j^n(t_1, \ldots, t_n)$ und $F_j^n(t_1, \ldots, t_n)$ Terme für alle $j \geq 1$.

  iii. Ist A eine Formel und sind t_1 und t_2 Terme, dann ist (if A then t_1 else t_2) ein Term.

  iv. Term ist die kleinste Menge, die i) genügt und gegenüber ii) und iii) abgeschlossen ist.

(b) Die Formeln teilen sich in atomare und zusammengesetzte Formeln auf.

Die Menge Aform der *atomaren Formeln* ist die kleinste Menge mit:

  i. $W, F \in$ Aform

  ii. $p_j^0, P_j^0 \in$ Aform $(j \geq 1)$ (die aussagenlogischen Konstanten und Variablen)

  iii. Sind $t_1, \ldots, t_n$ $(n \geq 1)$ Terme, dann sind

$$p_j^n(t_1, \ldots, t_n), P_j^n(t_1, \ldots, t_n) \in \text{Aform } (j \geq 1).$$

iv. Sind t_1, t_2 Terme, dann ist $(t_1 = t_2) \in$ Aform.

Die Menge Form der *Formeln* ist die kleinste Menge mit

i. Aform $\subseteq$ Form
ii. Sind $A, B, C \in$ Form, dann sind auch $(\neg A)$, $(A \to B)$, $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \leftrightarrow B)$, $(\text{IF } A \text{ THEN } B \text{ ELSE } C) \in$ Form.
iii. Ist v eine (Funktions- oder Prädikats-) Variable und A eine Formel, dann sind $((\forall v)\ A), ((\exists v)\ A) \in$ Form. (Einfachheitshalber nehmen wir an, dass weder $(\forall v)$ noch $(\exists v)$ bereits in A vorkommt.)

3. *Geltungsbereich* eines Quantors : Ist $B \equiv ((\forall v)\ A)$ oder $B \equiv ((\exists v)\ A)$, so ist A der *Geltungsbereich* von $(\forall v)$ bzw. $(\exists v)$. Ein Vorkommen von v in A heißt *gebunden.* Variablen in einer Formel kommen gebunden vor, falls sie im Geltungsbereich eines Quantors vorkommen. Sonstige Vorkommen einer Variablen heißen *frei.* Eine Variable v heißt *freie Variable* einer Formel A, wenn es in A freie Vorkommen von v gibt. Formeln ohne freie Variablen heißen *abgeschlossen* oder *Aussagen.*

4. Ein *Teilterm* eines Terms t ist ein Teilwort von t, das selbst ein Term ist. Eine *Teilformel* einer Formel A, ist ein Teilwort von A, das selbst eine Formel ist.

2.2 Bemerkungen und Beispiele.

1. Die Mengen Term und Form sind rekursiv entscheidbar. Sie werden jeweils eindeutig erzeugt, d.h. zusammengesetzte Terme und Formeln lassen sich eindeutig zerlegen (Bemerkung 1.2 und Satz 1.3 gelten entsprechend).

2. Vereinbarungen: Stelligkeiten können bei Prädikaten und Funktionen weggelassen werden, wenn sie aus dem Kontext hervorgehen.

   Man benutzt $a, b, c, \ldots$ für Individuenkonstanten, $f, g, h, \ldots$ für Funktionskonstanten, $p, q, r, \ldots$ für Prädikatskonstanten, $x, y, z, \ldots$ für Individuenvariablen, $F, G, H, \ldots$ für Funktionsvariablen, $P, Q, R, \ldots$ für Prädikatsvariablen, $A, B, C, \ldots$ für Formeln und t für Terme. Die Symbole für Individuenkonstanten und -variablen sowie für Terme werden auch in indizierter Form benutzt.

   Wenn keine Verwechslungen möglich sind, können Klammern entfallen. Beispielsweise wird $\forall x\ A$ statt $((\forall x)\ A)$ und $\neg A$ statt $(\neg A)$ geschrieben. Um die Lesbarkeit einer Formel zu erhöhen werden gelegentlich die Klammern $[,]$ oder $\{,\}$ gebraucht. $\neg, \exists v$ und $\forall v$ binden am stärksten, d.h. sie werden auf die kleinst mögliche Teilformel angewandt. Zum Beispiel steht $\neg p \vee \neg q$ für $((\neg p) \vee (\neg q))$ und $\neg \forall x\ p(x) \leftrightarrow \exists x\ \neg p(x)$ für $((\neg((\forall x)\ p(x))) \leftrightarrow ((\exists x)\ (\neg(p(x)))))$. Statt $\neg(t_1 = t_2)$ wird häufig $t_1 \neq t_2$ geschrieben.

3. Beispiele:

(a)

$$(\exists F_1^1)\ ((F_1^1(a_1) = a_2) \wedge ((\forall x_1)\ (p_1^1(x_1)$$
$$\to (F_1^1(x_1) = f_1^2(x_1, F_1^1(f_1^1(x_1)))))) \in \text{Form}$$

in vereinfachter Schreibweise:

$$\underbrace{\exists F\, \{\underbrace{\underbrace{(\underbrace{F(a)}_{\text{Term}} = \underbrace{b}_{\text{Term}})}_{\text{at.F.}} \wedge \underbrace{\forall x\, [\underbrace{\underbrace{p(\underbrace{x}_{\text{Term}})}_{\text{at.F}} \to \underbrace{(\underbrace{F(x)}_{\text{Term}} = \underbrace{g(x, F(f(x)))}_{\text{Term}})}_{\text{at.Formel}}}_{\text{Formel}}]}_{\text{Formel}}}_{\text{Formel}}\}}_{\text{Formel}}$$

Alle markierten Formeln und atomaren Formeln sind Teilformeln der obigen Formel.

(b) In der folgenden Formel kommen die Variablen P und x vor. P kommt 4-mal vor und x kommt 4-mal vor:

$$\forall P\ \{[\underbrace{P}_{\text{geb.}}(a) \wedge \forall x\ [[\underbrace{x}_{\text{geb.}} \neq a \wedge \underbrace{P}_{\text{geb.}}(f(\underbrace{x}_{\text{geb.}}))] \to \underbrace{P}_{\text{geb.}}(\underbrace{x}_{\text{geb.}})]] \to \underbrace{P}_{\text{geb.}}(\underbrace{x}_{\text{frei}})\}$$

Die Formel ist nicht abgeschlossen, da eine Variable ein freies Vorkommen hat. Die Formel aus (a) ist abgeschlossen.

2.3 Eingeschränkte Teilsprachen. Durch Einschränkung der Konstanten und Variablen in Definition 2.1 entstehen folgende Teilsprachen:

1. Für die *Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe* werden nur Individuenvariablen x_j $(j \geq 1)$ zugelassen, keine Funktions- und Prädikatsvariablen. Eine typische Formel lautet:

$$(x_1 \neq x_2) \wedge \forall x_2\ (\exists x_3\ p(x_1, f(x_2, x_3)) \to (p(x_2, x_1) \vee p(x_2, a)))$$

2. Im *Gleichheitskalkül* sind nur Individuenkonstanten a_j $(j \geq 1)$ und Individuenvariablen x_j $(j \geq 1)$ zugelassen. Es sind keine weietern keine Funktionsvariablen oder -konstanten und auch keine Prädikatskonstanten und -variablen zugelassen.

   Ein Term im Gleichheitskalkül ist eine Individuenkonstante oder eine Individuenvariable oder hat die Gestalt "if A then t_1 else t_2", wobei t_1 und t_2 Terme und A eine Formel ist.

   Die Menge Aform der atomaren Formeln im Gleichheitskalkül besteht nur aus den Wahrheitswerten W und F und aus allen Formeln der Form $t_1 = t_2$, wobei t_1 und t_2 Terme sind. Eine typische Formel lautet:

$$((\forall x_1)(\forall x_2((\forall x_3)\ (((x_1 = x_2) \wedge (x_2 = a)) \to (x_1 = a)))))$$

3. In der *quantifizierten Aussagenlogik* sind nur aussagenlogische Konstanten p_j^0 $(j \geq 1)$ und aussagenlogische Variablen P_j^0 $(j \geq 0)$ zugelassen. Es gibt keine Terme und atomare Formeln sind die aussagenlogischen Konstanten und Variablen, sowie die Wahrheitswerte W und F. Eine typische Formel lautet:
$$(((\forall P_1)\ (P_1 \leftrightarrow p)) \rightarrow ((\exists P_2)\ (P_2 \leftrightarrow W)))$$

4. In der *Aussagenlogik* sind nur aussagenlogische Konstanten p_j^0 $(j \geq 0)$ zugelassen.

   Eine typische Formel lautet:
$$(\text{IF}\, p_1\, \text{THEN}\, p_2\, \text{ELSE}\, p_3) \leftrightarrow (\text{IF}\, \neg p_1\, \text{THEN}\, p_3\, \text{ELSE}\, p_2)$$

5. Spezielle Sprachen erster und zweiter Stufe werden durch Festlegung der Konstanten definiert. Da Funktionskonstanten und Prädikatskonstanten gleichsam als Parameter für eine bestimmte prädikatenlogische Sprache agieren und oft explizit erwähnt werden müssen, liegt folgende Definition nahe:

2.4 Definition. Eine *Basis* für die Prädikatenlogik ist ein Paar $B = (F, P)$ von Zeichenmengen, wobei F die Menge der Funktionskonstanten und P die Menge der Prädikatskonstanten ist.

2.5 Beispiel. Ist $B = (F, P)$ Basis für die *Sprache der Arithmetik*, einer Sprache erster Stufe, dann besteht die Menge F aus den 0-stelligen Konstanten 0 und 1 und der einstelligen Funktionskonstanten S (für Nachfolger) sowie den zweistelligen Funktionskonstanten $+$ und $\star$. Die Menge P enthält die zweistellige Prädikatskonstante $<$.

2.2 Die Semantik der Prädikatenlogik

Nachdem die Syntax einer Sprache der Prädikatenlogik definiert ist, muss die Semantik einer prädikatenlogischen Formel erklärt werden, nämlich, wann eine Formel "falsch" ist und wann sie "wahr" ist. Dazu wird der Begriff der *Interpretation* eingeführt. Unterschiedliche Interpretationen können zu unterschiedlichen Bedeutungen einer Formel führen. Eine Interpretation wird rekursiv analog der Definition von Formeln definiert.

2.6 Definition. Sei L eine Sprache der Prädikatenlogik zweiter Stufe (festgelegt durch die Konstantensymbole).

1. Eine *Interpretation* I für L ist ein Tripel $I = (D, I_c, I_v)$ mit
   - $D \neq \emptyset$, dem Individuenbereich oder Definitionsbereich der Interpretation,

- I_c, einer *Belegung* (Abbildung) *der Konstanten,* die jedem n-stelligen Funktionssymbol f eine Funktion $I_c(f) : D^n \to D$ und jedem m-stelligen Prädikatssymbol p ein Prädikat $I_c(p) : D^m \to \mathbb{B}$ zuordnet $(n, m \geq 0,\ \mathbb{B} = \{0, 1\})$ und
- I_v, einer *Belegung der Variablen,* die jeder n-stelligen Funktionsvariablen F eine Funktion $I_v(F) : D^n \to D$ und jeder m-stelligen Prädikatsvariablen P ein m-stelliges Prädikat $I_v(P) : D^m \to \mathbb{B}$ zuordnet $(n, m \geq 0)$.

2. Die Interpretation von Termen und Formeln ist eine Fortsetzung von I auf Term und Form: I ordnet jedem $t \in$ Term ein $I(t) \in D$ und jedem $A \in$ Form ein $I(A) \in \mathbb{B}$ zu.

   (a) Bewertung der Terme:

   - $I(a) = I_c(a)$ für ein 0-stelliges Konstantensymbol a
   - $I(x) = I_v(x)$ für ein 0-stelliges Variablensymbol x
   - $I(f(t_1, \ldots, t_n)) = I_c(f)(I(t_1), \ldots, I(t_n))$ für eine n-stellige Funktionskonstante f und Terme $t_1, \ldots, t_n$ $(n \geq 1)$
   - $I(F(t_1, \ldots, t_n)) = I_v(F)(I(t_1), \ldots, I(t_n))$ für eine n-stellige Funktionsvariable F und Terme $t_1, \ldots, t_n$ $(n \geq 1)$
   - Für eine Formel A und Terme t_1, t_2 ist

   $$I(\text{if } A \text{ then } t_1 \text{ else } t_2) = \begin{cases} I(t_1), & \text{falls } I(A) = 1, \\ I(t_2), & \text{falls } I(A) = 0. \end{cases}$$

   Beachte: $I(t)$ hängt für einen Term t nur von den Belegungen der in t vorkommenden Variablen und Konstanten ab.

   (b) Bewertung der Formeln:

   - $I(W) = 1, I(F) = 0$
   - $I(p) = I_c(p)$ für eine 0-stellige Prädikatskonstante p
   - $I(P) = I_v(P)$ für eine 0-stellige Prädikatsvariable P
   - $I(p(t_1, \ldots, t_n)) = I_c(p)(I(t_1), \ldots, I(t_n))$ für eine n-stellige Prädikatskonstante p und Terme $t_1, \ldots, t_n$ $(n \geq 1)$
   - $I(P(t_1, \ldots, t_n)) = I_v(P)(I(t_1), \ldots, I(t_n))$ für eine n-stellige Prädikatsvariable P und Terme $t_1, \ldots, t_n$ $(n \geq 1)$
   - Für alle $t_1, t_2 \in$ Term ist

   $$I(t_1 = t_2) = \begin{cases} 1, & \text{falls } I(t_1) = I(t_2), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

   - Die Interpretationen $I(\neg A)$, $I(A \vee B)$, $I(A \wedge B)$, $I(A \to B)$, $I(A \leftrightarrow B)$ und $I(\text{IF } A \text{ THEN } B \text{ ELSE } C)$ sind wie in der Aussagenlogik definiert.
   - $I(\forall x\ A) = \begin{cases} 1, & \text{falls } I^{x,d}(A) = 1 \text{ für alle } d \in D \text{ gilt}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

- $I(\exists x\ A) = \begin{cases} 1, & \text{falls es ein } d \in D \text{ mit } I^{x,d}(A) = 1 \text{ gibt,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$
  Dabei ist $I^{x,d} = (D, I_c, I'_v)$ mit
  $$I'_v(y) = \begin{cases} d \quad , & \text{falls } y \equiv x \\ I_v(y), & \text{sonst} \end{cases}$$
  und $I'_v(F) = I_v(F)$ und $I'_v(P) = I_v(P)$ für n-stellige Funktions- bzw. Prädikatsvariablen F und P $(n \geq 1)$.
  Analog wird $I(\forall v\ A)$ bzw. $I(\exists v\ A)$ definiert, wenn v eine n-stellige $(n \geq 1)$ Funktionsvariable oder eine m-stellige $(m \geq 0)$ Prädikatsvariable ist. Es werden statt $d \in D$ dann Funktionen $\psi : D^n \to D$ bzw. Prädikate $\pi : D^n \to \mathbb{B}$ eingesetzt.

Jede Interpretation $I = (D, I_c, I_v)$ induziert durch (a) und (b) eine Bewertung aller Terme und Formeln, die die bewerteten Konstanten und Variablen als freie Variablen enthalten. Umgekehrt wird jede Bewertung I, die (a) und (b) genügt, eindeutig durch eine solche Interpretation induziert.

3. Gilt $I(A) = 1$, so ist A *wahr* in der Interpretation I oder I *erfüllt* A. Schreibweise: $\models_I A$ oder $I \models A$.

2.7 Bemerkungen und Beispiele.

1. Um die Bewertung einer Formel A zu bestimmen, genügt es, die Bewertung der Konstanten und der in A frei vorkommenden Variablen zu kennen. Die Bewertung von A unter $I = (D, I_c, I_v)$ hängt nur von diesen Werten ab. Ist A abgeschlossen (d.h. A ist ohne freie Variablen), so genügt es, eine Interpretation der Form $I = (D, I_c)$ zu betrachten. Solche Interpretationen heißen auch *algebraische Strukturen* oder *Relationalsysteme*. Man beschreibt ein Relationalsystem (algebraische Struktur) häufig als $< A;\ f_1, \ldots, f_n;\ R_1, \ldots, R_m >$, wobei der Definitionsbereich A die Menge der Objekte bezeichnet, über denen die Funktionen $f_j : A^{h_j} \to A$ $(1 \leq j \leq n,\ h_j \geq 0)$ und die Relationen R_k $(1 \leq k \leq m)$ definiert sind.

2. Beachte, dass in der Definition der Bewertung Redundanzen vorkommen. Zum Beispiel gleicht die Bewertung der Formel $\neg A$ der Bewertung von IF A THEN F ELSE W, die von $A \wedge B$ der von IF A THEN B ELSE F, die von $A \vee B$ der von IF A THEN W ELSE B, die von $A \to B$ der von IF A THEN B ELSE W, die von $A \leftrightarrow B$ der von IF A THEN B ELSE $\neg B$, die von $\forall v\ A$ der von $\neg\exists v\ \neg A$, die von $\exists v\ A$ der von $\neg\forall v\ \neg A$ und die von $t_1 = t_2$ der von $\forall P\ [P(t_1) \leftrightarrow P(t_2)]$.

3. Beispiele:

   (a) $\exists x \forall y\ (p(y) \to x = y)$ bedeutet "Es gibt ein x, so dass für alle y immer $x = y$ gilt, wenn $p(y)$ zutrifft" oder "Es gibt höchstens ein x, so dass

$p(x)$ wahr ist". Diese Formel ist wahr in allen Interpretationen, in denen $p(d)$ für höchstens ein Element $d \in D$ wahr ist (z.B. $D = \mathbb{N}$ und $I(p(x))$ genau dann, wenn $I(x) = 0$).

(b) $\exists x\ [p(x) \wedge \forall y\ [p(y) \to x = y]]$ bedeutet "Es gibt genau ein x, so dass $p(x)$ wahr ist".

(c) $\forall z \exists u \exists v\ ((z = u \vee z = v) \wedge u \neq v) \wedge \forall x \forall y \forall P\ [x \neq y \vee (P(x,x) \vee \neg P(y,y))]$

Beh.: Diese Formel ist wahr in jeder Interpretation mit $|D| \geq 2$ und falsch für $|D| = 1$.

(d) Seien $A \equiv \forall x\ p(x, f(x)), A_1 \equiv p(x, f(x)), I = (\mathbb{N}, I_c, I_v)$ und sei $I_c(p)$ das $\leq$-Prädikat und $I_c(f) = \text{quad}$ mit $\text{quad} : n \mapsto n^2$. Dann gilt: $I(A) = I^{x,n}(A_1) = (n \leq n^2) = W$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

4. Sind I_1 und I_2 Interpretationen mit den gleichen Definitionsbereichen und ist A eine Formel, dann gilt "$I_1 \models A$ genau dann, wenn $I_2 \models A$", falls I_1 und I_2 in allen Konstanten und freien Variablen, die in A vorkommen übereinstimmen.

2.8 Definition. Sei L eine Sprache der Prädikatenlogik zweiter Stufe.

1. Eine Formel $A \in$ Form heißt *allgemeingültig*, falls $I(A) = 1$ für alle Interpretationen I für L, d.h. $I \models A$ für alle Interpretationen I. Schreibweise: $\models A$.

2. Eine Formel $A \in$ Form heißt *erfüllbar*, falls es eine Interpretation I mit $I(A) = 1$ gibt. I heißt dann auch *Modell* für A. Gibt es keine solche Interpretation, so heißt A *unerfüllbar*.

3. $\Sigma \subseteq$ Form heißt *erfüllbar*, falls es eine Interpretation I gibt, die alle Formeln von Σ erfüllt.

2.9 Bemerkungen und Beispiele.

1. Ist A nicht allgemeingültig, so ist $\neg A$ erfüllbar. Ist $\neg A$ unerfüllbar, dann ist A allgemeingültig. Um die Allgemeingültigkeit (Erfüllbarkeit) einer Formel zu prüfen, genügt es solche Interpretationen zu betrachten, die die Konstanten und freien Variablen der Formel belegen. Das sind, im Gegensatz zur Aussagenlogik, immer noch unendlich viele, denn die Definitionsmenge kann eine beliebige nichtleere Menge sein.

2. Jede Tautologie der Aussagenlogik ist allgemeingültig. Genauer:

   Tautologie-Theorem: Sei A eine Formel der Aussagenlogik mit den Aussagevariablen $p_1, \ldots, p_n$ $(n \geq 1)$, d.h. $A \equiv A(p_1, \ldots, p_n)$. A' entstehe aus A durch Ersetzen von p_j $(1 \leq j \leq n)$ in A durch eine Formel B_j der Prädikatenlogik zweiter Stufe. Ist A eine Tautologie (d.h. allgemeingültig), so ist auch A' allgemeingültig. Allgemeingültig sind beispielsweise die Formeln $A_1 \vee \neg A_1$ und $A_1 \to (A_2 \to A_1)$.

3. Beispiele:

(a) $\forall x \forall y \forall P\ (x \neq y \vee (P(x,x) \vee \neg P(y,y)))$ ist allgemeingültig. Da die Formel weder Konstanten noch freie Variablen enthält, genügt es eine Interpretation $I = (D)$ mit $|D| \geq 1$ zu betrachten. Der Fall $|D| = 1$ ist klar, denn entweder gilt $P(x,x)$ oder $\neg P(x,x)$. Ist $|D| > 1$, dann wähle $x \equiv d_1$ und $y \equiv d_2$ mit $d_1, d_2 \in D$ und $d_1 \neq d_2$. Dann ist $I(x \neq y) = 1$ und somit erfüllt I die Formel.

Die Formel $A \equiv \exists P \forall x \exists y\ (P(x,x) \wedge \neg P(x,y))$ ist weder allgemeingültig noch unerfüllbar. Sei $I = (D)$ eine Interpretation. Ist $|D| = 1$, dann ist $I(A) = 0$. Ist $|D| \geq 2$, dann ist $I(A) = 1$.

Die Formel $\exists P \exists x \exists y\ ((P(x,x) \wedge \neg P(x,y)) \wedge x = y)$ ist unerfüllbar, die Formeln $t = t, \forall x\ A \leftrightarrow \neg \exists x\ (\neg A)$ und $\exists x\ A \leftrightarrow \neg \forall x\ (\neg A)$ sind allgemeingültig.

(b) Sei p eine 2-stellige Prädikatskonstante.

$A_1 \equiv \forall x \forall y \forall z\ ((p(x,y) \wedge p(y,z)) \rightarrow p(x,z))$	(transitiv)
$A_2 \equiv \forall x \forall y\ (p(x,y) \vee p(y,x) \vee x = y)$	(Trichotomie)
$A_3 \equiv \forall x\ \neg p(x,x)$	(antireflexiv)
$A_4 \equiv \forall x \forall y\ (p(x,y) \rightarrow \exists z\ (p(x,z) \wedge p(z,y)))$	(dicht)
$A_5 \equiv \forall x \exists y\ p(x,y)$	(kein letztes Element)
$A_6 \equiv \forall x \exists y\ p(y,x)$	(kein erstes Element)

Die Formeln $A_1, \ldots, A_3$ beschreiben eine lineare Ordnung auf der Definitionsmenge, die Formeln $A_1, \ldots, A_4$ eine dichte lineare Ordnung (DLO).

Keine der Formeln ist allgemeingültig. Sind sie erfüllbar? Betrachte die folgenden Interpretationen: $I_1 = (\{0,1,2\}, \ldots), I_2 = (\mathbb{N}, \ldots), I_3 = ([0,1], \ldots)$ und $I_4 = (\mathbb{Q}, \ldots)$ ($\mathbb{Q}$ bezeichne die Menge der Brüche) und in allen Interpretationen sei p das "kleiner"-Prädikat. A_1, A_2 und A_3 sind in allen vier Interpretationen wahr, $A_1, \ldots, A_4$ sind wahr in I_3 und I_4. In I_1 und I_2 ist A_4 falsch. $A_1, \ldots, A_6$ sind wahr in I_4, A_5 und A_6 sind falsch in I_1 und I_3. A_5 ist wahr in I_2 und A_6 ist falsch in I_2.

(c) Allgemeingültige Formeln:

$$\begin{aligned}
A_1 &\equiv \forall x\ p(x) \rightarrow \exists x\ p(x) \\
A_2 &\equiv p(x) \rightarrow p(x) \\
A_3 &\equiv \forall x\ q(x) \rightarrow q(a) \\
A_4 &\equiv p(a) \rightarrow \exists x\ p(x) \\
A_5 &\equiv \forall x \forall y\ (p(x,y) \rightarrow p(x,y)) \\
A_6 &\equiv \exists y \forall x\ p(x,y) \rightarrow \forall x \exists y\ p(x,y) \\
A_7 &\equiv (\forall x\ p(x) \vee \forall x\ q(x)) \rightarrow \forall x\ (p(x) \vee q(x))
\end{aligned}$$

Nicht allgemeingültige Formeln:

$$B_1 \equiv \exists x\ p(x) \rightarrow \forall x\ p(x)$$

$$
\begin{aligned}
B_2 &\equiv p(x) \rightarrow p(a)\\
B_3 &\equiv q(a) \rightarrow \forall x\, q(x)\\
B_4 &\equiv \exists x\, p(x) \rightarrow p(a)\\
B_5 &\equiv \forall x \forall y\, (p_1(x,y) \rightarrow p_1(y,x))\\
B_6 &\equiv \forall x \exists y\, p_1(x,y) \rightarrow \exists y \forall x\, p_1(x,y)\\
B_7 &\equiv \forall x\, (p(x) \vee q(x)) \rightarrow (\forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x))
\end{aligned}
$$

Um die Allgemeingültigkeit der Formeln $A_1, \ldots, A_7$ zu beweisen, zeige: Es gibt kein Gegenbeispiel, d.h. $\neg A_j$ $(1 \leq j \leq 7)$ ist unerfüllbar. Beispiel: $A_6 \equiv \exists x \forall y\; p(x,y) \rightarrow \forall x \exists y\; p(x,y)$. Sei $I = (D, \ldots)$ eine Interpretation, die A_6 falsch macht, d.h. $\exists x \forall y\; p(x,y)$ muss wahr sein und $\forall x \exists y\; p(x,y)$ muss falsch sein unter I. Es gibt dann also ein $d_1 \in D$, so dass $I(p(d,d_1)) = W$ für alle $d \in D$. Weil $\forall x \exists y\; p(x,y)$ falsch ist, muss $\exists y\; p(d_2,y)$ für ein $d_2 \in D$ falsch sein. Da $I(p(d_2,d_1)) = W$ gilt, muss auch $\exists y\; p(d_2,y)$ wahr sein.
Als Gegenbeispiel für $B_1, \ldots, B_7$ wähle die Interpretation $I = (\mathbb{Z}, \ldots)$ mit

$$
\begin{aligned}
I(p(x)) &= 1 \text{ genau dann, wenn } x > 0,\\
I(q(x)) &= 1 \text{ genau dann, wenn } x \leq 0,\\
I(p_1(x,y)) &= 1 \text{ genau dann, wenn } x > y,
\end{aligned}
$$

$I(a) = 0$ und $I(x) = 1$.

(d) Für Formeln der Arithmetik in den Konstanten $0, S, +$ und $\star$ ist die "natürliche" Interpretation $I = (\mathbb{N}, I_c, I_v)$, die den Ziffernsymbolen ihren Wert und den Operatoren ihre übliche Bedeutung zuordnet (für S wird auch der Operator $'$ benutzt, dem I die Funktion $n' = n+1$ zuordnet). Welche abgeschlossenen Formeln (erster und zweiter Stufe) sind wahr in I?

$$
\left.
\begin{array}{l}
\forall x \forall y\; (S(x) = S(y) \rightarrow x = y)\\
\forall x\; S(x) \neq 0\\
\forall x\; x + 0 = x\\
\forall x \forall y\; (x + S(y)) = S(x+y)\\
\forall x\; x \star 0 = 0\\
\forall x \forall y\; (x \star S(y)) = (x \star y) + x
\end{array}
\right\}\ \text{Formeln erster Stufe}
$$

$$\forall P\; [(P(0) \wedge \forall x\; (P(x) \rightarrow P(S(x)))) \rightarrow \forall x\; P(x)] \qquad \text{(Induktionsprinzip)}$$

Als *Theorie* bezeichnet man eine Menge von Formeln, die bezüglich logischer Folgerung abgeschlossen ist. Frage: Ist die Theorie erster Stufe, die von obigen Formeln erster Stufe aufgespannt wird (d.h. die Menge, die diese Formeln und deren Folgerungen enthält) oder die Theorie zweiter Stufe, die von obigen Formeln einschließlich des Induktionsprinzipes aufgespannt wird, für I entscheidbar? Ist die Menge der allgemeingültigen abgeschlossenen Formeln überhaupt entscheidbar?

2.10 Lemma. Die Allgemeingültigkeit für Formeln der quantifizierten Aussagenlogik ist entscheidbar.

Beweisidee: Finde zu jeder Formel der quantifizierten Aussagenlogik eine äquivalente Formel der Aussagenlogik (Quantorenelimination):
Es gelten $\models \forall P_j^0\ B \leftrightarrow B_{P_j^0}[W] \wedge B_{P_j^0}[F]$ (P_j^0 durch W bzw. F ersetzten) und $\models \exists P_j^0\ B \leftrightarrow B_{P_j^0}[W] \vee B_{P_j^0}[F]$, denn $I(\forall P_j^0\ B) = I(B_{P_j^0}[W] \wedge B_{P_j^0}[F])$ und $I(\forall P_j^0\ B) = I(B_{P_j^0}[W] \wedge B_{P_j^0}[F])$ (für alle I).
Somit lassen sich die Quantoren eliminieren. Es bleibt dann eine Formel der Aussagenlogik, deren Allgemeingültigkeit (z.B. mit der Tableaumethode) entscheidbar ist.
Beispiel:

$$\begin{array}{rl}
\forall P \exists Q\ ((P \leftrightarrow \neg Q) \vee (p \rightarrow Q)) & \longleftrightarrow \\
\exists Q\ ((W \leftrightarrow \neg Q) \vee (p \rightarrow Q)) \wedge \exists Q\ ((F \leftrightarrow \neg Q) \vee (p \rightarrow Q)) & \longleftrightarrow \\
(((W \leftrightarrow \neg W) \vee (p \rightarrow W)) \vee ((W \leftrightarrow \neg F) \vee (p \rightarrow F))) \wedge & \\
(((F \leftrightarrow \neg W) \vee (p \rightarrow W)) \vee ((F \leftrightarrow \neg F) \vee (p \rightarrow F))) & \longleftrightarrow \\
F \vee (p \rightarrow W) \vee W \vee (p \rightarrow F) \wedge W \vee (p \rightarrow W) \vee F \vee (p \rightarrow F) & \longleftrightarrow \\
W \qquad\qquad\qquad \wedge \qquad\qquad\qquad W &
\end{array}$$

2.11 Definition. Sei $A \in$ Form, $t, \underline{t} \in$ Term und x eine Individuenvariable. Die *Substitution* von x durch t in A (bzw. $\underline{t}$), $A_x[t]$ (bzw. $\underline{t}_x[t]$), ist die Formel (der Term), die aus A (bzw. $\underline{t}$) entsteht, wenn man jedes freie Vorkommen von x in A (bzw. $\underline{t}$) durch t ersetzt.

Analog ist die simultane Substitution mehrerer Variablen $x_1, \ldots, x_n$ in A (bzw. $\underline{t}$) $(n > 1)$ durch $t_1, \ldots, t_n \in$ Term definiert:
$A_{x_1,\ldots,x_n}[t_1, \ldots, t_n]$ (bzw. $\underline{t}_{x_1,\ldots,x_n}[t_1, \ldots, t_n]$) ist die Formel (der Term), die aus A (aus $\underline{t}$) entsteht, wenn man jedes freie Vorkommen der x_j in A (bzw. $\underline{t}$) simultan für alle j $(1 \leq j \leq n)$ durch t_j ersetzt.
Die Substitution heißt *erlaubt*, wenn keine Variable die in t (bzw. in $t_1, \ldots, t_n$) vorkommt, nach der Substitution gebunden in t (bzw. $t_1, \ldots, t_n$) vorkommt.
Man kann die Substitution auch rekursiv über den Aufbau der Terme und Formeln definieren.

2.12 Beispiele und Lemma.

1. Für $A \equiv \exists y\ x = 2 \star y$ und $t \equiv y + 1$ ist $A_x[t] \equiv \exists y\ y + 1 = 2 \star y$ keine erlaubte Substitution, dagegen ist die Substitution $A_y[t] \equiv \exists y\ x = 2 \star y$ erlaubt.

   Sei $I = (\mathbb{N}, \ldots)$ eine Interpretation, die $+$ und $\star$ als Addition bzw. Multiplikation interpretiert, und sei $I(x) = 3$ und $I(y) = 2$. Dann ist $I(t) = 3$ und $I(A) = I(\exists y\ x = 2 \star y) = 0$. Nach der nicht erlaubten Substitution ist aber $I(A_x[t]) = I(\exists y\ y + 1 = 2 \star y) = 1$.

Sei $B \equiv \forall x\ (P(x,y) \to Q(x))$ und $t \equiv f(y,z)$, dann ist die Substitution $B_y[t] \equiv \forall x\ (P(x, f(y,z)) \to Q(x))$ erlaubt.

2. **Lemma.** Sei A ein Term oder eine Formel, x eine Individuenvarible, $t \in$ Term und $A_x[t]$ eine erlaubte Substitution. Dann gilt für jede Interpretation $I = (D, I_c, I_v)$:

$$I(A_x[t]) = I^{x,I(t)}(A)$$

Insbesondere gilt $I'(A) = I(A_x[t])$, falls I und I' Interpretationen sind, die sich höchstens in der Interpretation von x unterscheiden, mit $I'(x) = I(t)$.

Beweis. Induktion über den Aufbau von A als Term bzw. Formel: Sei $I_1 = I^{x,I(t)}$

$A \in$ Term : $A \equiv x$, $A_x[t] = t$, $I(t) = I^{x,I(t)}(x) = I(t)\surd \ldots$ (entsprechend für andere Terme)

$A \in$ Form : A **atomar:** $A \equiv p(t^1, \ldots, t^n)$ $(n \geq 1)$ mit $t^j \in$ Term für $1 \leq j \leq n$. Dann ist $A_x[t] \equiv p(t^1_x[t], \ldots, t^n_x[t])$ und

$$\begin{aligned} I(A_x[t]) &= I_c(p)(I(t^1_x[t]), \ldots, I(t^n_x[t])) \\ &= I_c(p)(I_1(t^1), \ldots, I_1(t^n)) \\ &= I_1(p(t^1, \ldots, t^n)) = I_1(A). \end{aligned}$$

Die Fälle $A \equiv \neg B$, $A \equiv B \wedge C$, $A \equiv B \vee C$, $A \equiv V \to C$, $A \equiv V \leftrightarrow C$ und $A \equiv$ IF B THEN C ELSE D sind einfach zu zeigen.

Sei $A_x[t] \equiv \forall y\ B_x[t]$ eine erlaubte Substitution, d.h. y kommt nicht in t vor. Dann ist $I(t) = d_0 = I^{y,d}(t)$ für alle $d \in D$ (da y nicht in t vorkommt).
Es gilt $(I^{x,d_1})^{y,d_2} = (I^{y,d_2})^{x,d_1}$ für alle $d_1, d_2 \in D$ (da x verschieden y).

$$\begin{aligned} & I(A_x[t]) = 1 \\ \iff\ & I(\forall y\ B_x[t]) = 1 \\ \iff\ & I^{y,d}(B_x[t]) = 1 \text{ für alle } d \in D \\ \iff\ & (I^{y,d})^{x,d_0}(B) = 1 \text{ für alle } d \in D \text{ (Ind.Vor.)} \\ \iff\ & (I^{x,d_0})^{y,d}(B) = 1 \text{ für alle } d \in D \\ \iff\ & I^{x,d_0}(\forall y\ B) = 1 \\ \iff\ & I_1(A) = 1 \end{aligned}$$

Für den Fall $A \equiv \exists y\ B$ folgt dies aus $\neg \forall y\ (\neg B) \leftrightarrow \exists y\ B$.

3. Folgerung. Sei $A_x[t]$ eine erlaubte Substitution.

   (a) Ist A allgemeingültig, dann ist auch $A_x[t]$ allgemeingültig.

   (b) $\forall x\ A \to A_x[t]$ ist allgemeingültig.

(c) Allgemeingültig sind $\forall x\ A \to A$ und $A \to \exists x\ A$ (Spezialfall $x \equiv t$). Ist die Substitution nicht erlaubt, braucht das nicht mehr zu gelten: Sei $A \equiv \exists y\ (S(x) = y)$. Dann ist $A_x[y] \equiv \exists y\ (S(y) = y)$. Für die "natürliche" Interpretation $I = (\mathbb{N}, \ldots)$ der Arithmetik gilt $I(A) = 1$, aber $I(A_x[y]) = 0$.

4. Beachte: $A(v_1, \ldots, v_n)$ (d.h. A enthält als freie Variablen nur $v_1, \ldots, v_n$) sei allgemeingültig. Dann ist auch der *universelle Abschluss*

$$B \equiv \forall v_1 \forall v_2 \ldots \forall v_n\ A(v_1, \ldots, v_n)$$

allgemeingültig. Ist $A(v_1, \ldots, v_n)$ erfüllbar, dann ist auch der *existenzielle Abschluss*

$$B \equiv \exists v_1 \exists v_2 \ldots \exists v_n\ A(v_1, \ldots, v_n)$$

erfüllbar.

Sind A und $A \to B$ allgemeingültige Formeln, dann ist auch B allgemeingültig.

2.13 Definition. Sei L eine (Teil-) Sprache der Prädikatenlogik zweiter Stufe, $\Gamma \subseteq$ Form und $A, B \in$ Form.

1. A ist *logische Folgerung* aus Γ, $\Gamma \models A$, wenn jede Interpretation, die Γ erfüllt, auch A erfüllt (d.h. jedes Modell von Γ ist Modell für A).
2. A und B sind *logisch äquivalent*, $A \models\!\!=\!\!\mid B$, falls $A \models B$ und $B \models A$.

2.14 Bemerkung und Beispiele.

1. $\Gamma \models A$ genau dann, wenn $\Gamma \cup \{\neg A\}$ nicht erfüllbar
2. $\emptyset \models A$ genau dann, wenn $\models A$
3. Γ ist genau dann nicht erfüllbar, wenn $\Gamma \models A$ für alle $A \in$ Form gilt.
4. $\Gamma \subseteq \Sigma$ und $\Gamma \models A$ impliziert $\Sigma \models A$
5. Äquivalent sind:
   - $A \models\!\!=\!\!\mid B$,
   - $\models A \leftrightarrow B$ und
   - $I(A) = I(B)$ für jede Interpretation I.

   Beispiele:

   (a) $\forall x\ Q(x) \models Q(y)$ (Spezialfall von $\forall x\ A \models A_x[t]$ aus 2.12)

   (b) $A(y) \not\models \forall y\ A(y)$: Sei $A(y) \equiv p(y)$ und $I = (\{0,1\}, I_c, I_v)$ eine Interpretation mit $I(p(x)) = 1 \iff I(x) = 0$ und $I(y) = 0$), dann ist $I(A(y)) = 1$ aber $I(\forall y\ A(y)) = 0$.

(c) $\models \exists x\ (Q(x) \to \forall x\ Q(x))$: Sei $I = (D, Q_I)$ eine Interpretation. $I(\exists x\ (Q(x) \to \forall x\ Q(x)) = 1 \overset{\text{Def}}{\iff}$ Es gibt $d \in D$, so dass für $I' = (D, Q_I, x \leftarrow d)$ gilt $I'(Q(x) \to \forall x\ Q(x)) = 1 \iff Q_I(d) = 0$ oder $I'(\forall x\ Q(x)) = 1 \iff$ Es gibt $d \in D$ mit $Q_I(d) = 0$ oder $Q_I(d) = 1$ für alle $d \in D$.

(d) Beispiele für äquivalente Formeln:

- Je zwei allgemeingültige Formeln sind äquivalent.
- $\neg\neg A \models\!=\!\mid A$,
- $W \vee A \models\!=\!\mid A \vee W \models\!=\!\mid W$,
- $F \wedge A \models\!=\!\mid A \wedge F \models\!=\!\mid F$,
- $A \vee A \models\!=\!\mid A,\ A \wedge A \models\!=\!\mid A$,
- $B \wedge QvA \models\!=\!\mid Qv(B \wedge A),\ B \vee QvA \models\!=\!\mid Qv(B \vee A)$, falls Q Quantor ist und v in B nicht frei vorkommt,
- $\forall v\ A \models\!=\!\mid \neg\exists v\ \neg A,\ \exists v\ A \models\!=\!\mid \neg\forall v\ \neg A$,
- $\forall x\ A(x) \to B \models\!=\!\mid \exists y\ (A(y) \to B)$, falls y weder in $A(x)$ noch in B frei vorkommt,
- $\forall x\ (A \to B) \models \forall x\ A \to \forall x\ B$

Die beiden folgenden Äquivalenzen erlauben die Umbenennung gebundener Variablen:

- $\forall v\ A \models\!=\!\mid \forall y\ A_v[y]$ und $\exists v\ A \models\!=\!\mid \exists y\ A_v[y]$, wobei y in A nicht frei vorkommt und $A_v[y]$ eine erlaubte Substitution ist. Denn für alle $d \in D$ gilt

$$I^{y,d}(A_v[y]) = (I^{y,d})^{v,d}(A) = (I^{v,d})^{y,d}(A) = I^{v,d}(A).$$

- $\forall v\ B \models\!=\!\mid B$ und $\exists v\ B \models\!=\!\mid B$, falls v nicht frei in B vorkommt.

2.15 Satz. Sei $\Gamma \subseteq$ Form und $A, B \in$ Form. Dann gelten:

1. Deduktionstheorem: $\Gamma, A \models B$ gilt genau dann, wenn $\Gamma \models A \to B$ gilt.

2. Modus-Ponens-Regel: Aus $\Gamma \models A$ und $\Gamma \models A \to B$ folgt $\Gamma \models B$

3. Kontraposition: $\Gamma, A \models \neg B$ gilt genau dann, wenn $\Gamma, B \models \neg A$ gilt.

4. Generalisierungstheorem: Kommt die Variable v in keiner Formel von Γ frei vor, dann gilt $\Gamma \models A$genau dann, wenn $\Gamma \models \forall v\ A$ gilt. Insbesondere gilt $A \models \forall v\ A$ bzw. $\models A \to \forall v\ A$, falls v nicht frei in A vorkommt.

5. Ersetzungstheorem: Sei $A' \in$ Form und A Teilformel von A'. Entsteht B' aus A' indem man an einigen Stellen die Teilformel A durch B ersetzt und gilt $A \models\!=\!\mid B$, so gilt auch $A' \models\!=\!\mid B'$.

Beweis. Die Beweise für 1.,2. und 3. entsprechen den jeweiligen Beweisen zur Aussagenlogik.

4. "$\Longrightarrow$": Es gelte $\Gamma \models A$ und v komme nicht frei in Γ vor. Sei ferner I eine Interpretation mit $I(v) = d \in D$ und $I \models \Gamma$. Dann gilt $I^{v,d'} \models \Gamma$ für alle $d' \in D$ und somit $I^{v,d'}(A) = 1$ für alle $d' \in D$. Also gilt gilt $\Gamma \models \forall v\ A$.

"$\Longleftarrow$" gilt trivialer weise.

5) klar. ■

2.16 Beispiele.

1.

$$
\begin{array}{rcl}
\models \exists x \forall y\ A \to \forall y \exists x\ A & \overset{\text{Ded.theor.}}{\Longleftrightarrow} & \\
\exists x \forall y\ A \models \forall y \exists x\ A & \overset{\text{Gen.theor.}}{\Longleftrightarrow} & \\
\exists x \forall y\ A \models \exists x\ A & \Longleftrightarrow & \\
\neg \forall x\ \neg \forall y\ A \models \neg \forall x\ \neg A & \overset{\text{Kon.theor.}}{\Longleftrightarrow} & \\
\forall x\ \neg A \models \forall x\ \neg \forall y\ A & \overset{\text{Gen.theor.}}{\Longleftrightarrow} & \\
\forall x\ \neg A \models \neg \forall y\ A & \Longleftrightarrow & \{\forall x\ \neg A, \forall y\ A\} \text{ nicht erfüllbar}
\end{array}
$$

2. Eine Variante des Ersetzungstheorems: Die Formel A' entstehe aus der Formel A durch Substitution einiger Vorkommen von x in A durch y. Dann gilt $\models \forall x \forall y\ (x = y \to (A \leftrightarrow A'))$.

   (z.B. $A \equiv f(x,y) = g(x)$ und $A' \equiv f(y,y) = g(x)$)

2.17 Definition. Eine Formel ist in *PKNF (Pränex Konjunktiver Normalform),* falls sie die Gestalt hat:

$$
\underbrace{(\Delta v_1)\dots(\Delta v_n)}_{\text{Präfix}}\ \underbrace{\{[A_{11} \vee \dots \vee A_{1l_1}] \wedge [A_{21} \vee \dots \vee A_{2l_2}] \wedge \dots \wedge [A_{m1} \vee \dots \vee A_{ml_m}]\}}_{\text{Matrix}}
$$

mit

1. alle Δ sind $\exists$- oder $\forall$-Quantoren,
2. alle v_j $(1 \le j \le n)$ sind Variablen, die in mindestens einem A_{kl} $(1 \le k \le m, 1 \le l \le l_k)$ vorkommen und paarweise verschieden sind,
3. alle A_{kl} $(1 \le k \le m, 1 \le l \le l_k)$ sind entweder atomare oder negierte atomare Formeln.

Sind in der Matrix $\vee$ und $\wedge$ vertauscht, so ist die Formel in *PDNF (Pränex Disjunktiver Normalform).*

Beispiel: Die Formel $\forall x \exists Q \forall y\ \{[\neg p \vee x \neq a \vee x = b] \wedge [Q(y) \vee a = b]\}$ ist in PKNF.

2.18 Satz. Jede Formel $A \in$ Form lässt sich effektiv in eine äquivalente Formel in PKNF (PDNF) transformieren.

Beweis. Eine zur Formel A äquivalente Formel in PKNF (PDNF) wird durch folgendes Verfahren berechnet, dessen Schritte nacheinander auf die Formel A angewandt werden:

1. Eliminiere alle überflüssigen Quantoren der Formel, d.h. streiche für eine Variable v alle $\exists v$ und $\forall v$, in deren Geltungsbereich v nicht vorkommt: $\forall v\ B \models\!\!=\!\!\mid B$ und $\exists v\ B \models\!\!=\!\!\mid B$, falls v nicht frei in B vorkommt.

2. Umbenennung von gebundenen Variablen. Gibt es eine Teilformel $(\exists v)\ B$ bzw. $(\forall v)\ B$, wobei die Variable v im Rest der Formel frei oder gebunden vorkommt, so ersetze die Teilformel durch $(\exists v')\ B_v[v']$ bzw. $(\forall v')\ B_v[v']$, wobei v' eine Variable vom gleichen Typ wie v ist und in der Formel noch nicht vorkommt. Nach diesem Schritt sind alle quantifizierten Variablen paarweise verschieden und keine Variable tritt gleichzeitig frei und gebunden auf.

3. Elimination von logischen Verknüpfungen und Operatoren.

   (a) "if_then_else": Enthält eine Teilformel B den Term $t \equiv \text{if } C \text{ then } t_1 \text{ else } t_2$, dann ersetze B durch $\text{IF } C \text{ THEN } B_1 \text{ ELSE } B_2$, wobei B_j aus B entsteht, wenn man t durch t_j ersetzt ($j = 1, 2$).

   (b) Ersetze $\rightarrow, \leftrightarrow$ und IF_THEN_ELSE durch äquivalente Formeln in $\vee, \wedge$ und $\neg$.
   Beispiel: Ersetze $B \rightarrow C$ durch $\neg B \vee C$,
   $B \leftrightarrow C$ durch $(\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B)$ und
   $\text{IF } B \text{ THEN } B_1 \text{ ELSE } B_2$ durch $(B \wedge B_1) \vee (\neg B \wedge B_2)$.

4. Schiebe die Negationen so weit nach innen, bis jedes $\neg$ unmittelbar vor einer atomaren Formel steht:

$$\begin{aligned} \neg(\forall v)\ A &\models\!\!=\!\!\mid (\exists v)\ \neg A, \\ \neg(\exists v)\ A &\models\!\!=\!\!\mid (\forall v)\ \neg A, \\ \neg(A \wedge B) &\models\!\!=\!\!\mid \neg A \vee \neg B, \\ \neg(A \vee B) &\models\!\!=\!\!\mid \neg A \wedge \neg B, \\ \neg\neg A &\models\!\!=\!\!\mid A \end{aligned}$$

5. Schiebe die Quantoren nach außen: Für $\star \in \{\wedge, \vee\}$ gilt: $(\exists v)\ A \star B \models\!\!=\!\!\mid \exists v\ (A \star B)$ und $(\forall v)\ A \star B \models\!\!=\!\!\mid \forall v\ (A \star B)$, falls v in B nicht frei vorkommt. Dass v in B nicht frei vorkommt, wird durch Schritt 2 gewährleistet.

6. Bringe die Matrix der Formel in KNF (bzw. DNF), d.h. ersetze $(A \wedge B) \vee C$ durch $(A \vee C) \wedge (B \vee C)$ und $C \vee (A \wedge B)$ durch $(C \vee A) \wedge (C \vee B)$.

Da alle Umformungen die Äquivalenz erhalten, ist die nach Schritt 6 entstanden Formel äquivalent zu Formel A und in PKNF (bzw. PDNF). ∎

2.19 Beispiel und Bemerkung.

1. Umformung der Formel

$$\forall x\ [(\forall y\ p(x) \lor \forall z\ q(z,y)) \to \neg\forall y\ r(x,y)]$$

in eine äquivalente Formel in PKNF:

Eliminieren überflüssiger Quantoren

$$\forall x\ [(p(x) \lor \forall z\, q(z,y)) \to \neg\forall y\ r(x,y)]$$

Umbenennen der gebundenen Variablen

$$\forall x\ [(p(x) \lor \forall z\ q(z,y)) \to \neg\forall y'\ r(x,y')]$$

Eliminieren von Verknüpfungen und Operatoren

$$\forall x\ [\neg(p(x) \lor \forall z\ q(z,y)) \lor \neg\forall y'\ r(x,y')]$$

Negation nach innen

$$\forall x\ [(\neg p(x) \land \exists z\ \neg q(z,y)) \lor \forall y'\ \neg r(x,y')]$$

Quantoren nach außen

$$\forall x \exists z \exists y'\ [(\neg p(x) \land \neg q(z,y)) \lor \neg r(x,y')]$$

Matrix in KNF

$$\forall x \exists z \exists y'\ [(\neg p(x) \lor \neg r(x,y')) \land (\neg q(z,y) \lor \neg r(x,y'))]$$

Eine dazu äquivalente Formel in PDNF ist

$$\forall x \exists z \exists y'\ [(\neg p(x) \land \neg q(z,y)) \lor \neg r(x,y')].$$

2. Es kann mehrere Formeln in PKNF geben, die äquivalent zur Ausgangsformel sind. Beispielsweise ist die Reihenfolge der Quantoren und Variablen nicht eindeutig bestimmt.

Die nächsten Sätze betreffen die Frage nach der Entscheidbarkeit der Sprachen der Logik: Gegeben eine Sprache L der Logik. Ist die Menge der allgemeingültigen Formeln $\{A \in \mathrm{Form}_L \mid\ \models A\}$ rekursiv entscheidbar?

Wie bereits gesehen ist diese Menge für die Sprachen der Aussagenlogik, der Quantifizierten Aussagenlogik sowie des Gleichheitskalküls entscheidbar. Es zeigt sich, dass das für allgemeine Sprachen erster Stufe und erst recht für Sprachen höherer Stufen nicht der Fall ist.

2.20 Satz. Die Allgemeingültigkeit für die Prädikatenlogik erster Stufe ist im allgemeinen unentscheidbar.

Genauer: Es gibt eine Menge von Formeln in den Konstanten a (0-stellig), f_0, f_1 (1-stellig) und der Prädikatskonstanten p (2-stellig), deren Allgemeingültigkeit unentscheidbar ist.

Beweis. Man beweist die Unentscheidbarkeit, indem man zeigt, dass sich das Post'sche Korrespondenz Problem (PCP) auf das Entscheidungsproblem der Prädikatenlogik erster Stufe reduzieren lässt. Das heißt, es existiert eine Turing-Maschine, die bei Eingabe eines Post'schen Systems S über dem Alphabet $\Sigma = \{0,1\}$ als Ausgabe eine prädikatenlogische Formel W_S erster Stufe liefert, die genau dann allgemeingültig ist, wenn das PCP S eine Lösung hat. Da das Post'sche Korrespondenz Problem aber nicht entscheidbar ist, ist die Allgemeingültigkeit für die Prädikatenlogik erster Stufe auch nicht entscheidbar.

Zur Konstruktion der Formel W_S werden nur Konstantensymbole benötigt: Eine Individuenkonstante a, zwei einstellige Funktionskonstanten f_0 und f_1 und eine binäre Prädikatskonstante p. Zur Beschreibung der Formeln W_S wird eine Abkürzung eingeführt: Ein Term der Form $f_{\sigma_m}(\ldots(f_{\sigma_2}(f_{\sigma_1}(x)))\ldots)$, $\sigma_i \in \{0,1\}$ $(1 \leq i \leq m)$, wird geschrieben als $f_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_m}(x)$. Sei

$$S = \{(\alpha_1,\beta_1),(\alpha_2,\beta_2),\ldots,(\alpha_n,\beta_n)\},$$

$n \geq 1$, ein PCP über $\Sigma = \{0,1\}$, dann lautet die Formel W_S der Prädikatenlogik erster Stufe:

$$\left[\bigwedge_{j=1}^{n} p(f_{\alpha_j}(a), f_{\beta_j}(a)) \wedge \forall x \forall y \left(p(x,y) \rightarrow \bigwedge_{j=1}^{n} p(f_{\alpha_j}(x), f_{\beta_j}(y))\right)\right] \rightarrow \exists z\, p(z,z)$$

Beh.: Das System S hat genau dann eine Lösung, wenn W_S allgemeingültig ist.

"$\Longleftarrow$": Angenommen W_S ist allgemeingültig. Sei I eine Interpretation mit Definitionsbereich $\{0,1\}^\star$, der Menge aller Worte über dem Alphabet $\{0,1\}$, die a als das leere Wort, f_0 als $f_0(x) = x0$ (Konkatenation von x mit Zeichen 0) und f_1 als $f_1(x) = x1$ (Konkatenation von x mit 1) interpretiert. Unter der Interpretation I sei $p(x,y)$ genau dann wahr, wenn gilt $x = \alpha_{j_1}\alpha_{j_2}\ldots\alpha_{j_m}$ und $y = \beta_{j_1}\beta_{j_2}\ldots\beta_{j_m}$ für eine nichtleere Folge $j_1, j_2, \ldots, j_m$ $(1 \leq j_i \leq n)$. Da W_S allgemeingültig ist, muss W_S wahr sein unter I. Da aber die Voraussetzung in der Formel W_S (d.h. die Teilformel vor dem Implikationszeichen) wahr ist, muss auch die Konsequenz $\exists z\ p(z,z)$ wahr sein unter I. Das heißt, es gibt eine nichtleere Folge $j_1, j_2, \ldots, j_m$ $(1 \leq j_i \leq n)$ so, dass $\alpha_{j_1}\alpha_{j_2}\ldots\alpha_{j_m} = \beta_{j_1}\beta_{j_2}\ldots\beta_{j_m}$. Mit anderen Worten, das PCP S hat eine Lösung.

"$\Longrightarrow$": Angenommen das PCP S hat die Lösung $j_1, j_2, \ldots, j_m$ (d.h. $\alpha_{j_1}\alpha_{j_2}\ldots\alpha_{j_m} = \beta_{j_1}\beta_{j_2}\ldots\beta_{j_m}$). Es ist zu zeigen, dass dann jede Interpretation I, die die Voraussetzung in der Formel W_S wahr macht, auch die Konsequenz wahr macht. Dann ist W_S allgemeingültig. Sei daher I eine beliebige Interpretation, unter der

$$\bigwedge_{j=1}^{n} p(f_{\alpha_j}(a), f_{\beta_j}(a)) \tag{1}$$

und

$$\forall x \forall y \left[p(x,y) \to \bigwedge_{j=1}^{n} p(f_{\alpha_j}(x), f_{\beta_j}(y)) \right] \tag{2}$$

wahr ist. Aus (1) und wiederholtem Anwenden von (2) lässt sich folgern, dass $p(f_{\alpha_{j_1}\alpha_{j_2}\ldots\alpha_{j_m}}(a), f_{\beta_{j_1}\beta_{j_2}\ldots\beta_{j_m}}(a))$ wahr ist unter I. Wegen der Voraussetzung $\alpha_{j_1}\alpha_{j_2}\ldots\alpha_{j_m} = \beta_{j_1}\beta_{j_2}\ldots\beta_{j_m}$ impliziert das aber, dass die Konsequenz von W_S, nämlich $\exists z\, p(z,z)$ wahr ist unter I.

■

Beispiel. $S = ((0,000),(0100,01),(001,1))$ hat die Lösung $j_1 = 1, j_2 = 3$ $(0001 = 0001)$. Die entsprechende Formel W_S lautet:

$$\Big[p(f_0(a), f_{000}(a)) \land p(f_{0100}(a), f_{01}(a)) \land p(f_{001}(a), f_1(a))$$

$$\land \bigwedge_{1 \le j \le 3} \big(p(x,y) \to p(f_{\alpha_j}(x), f_{\beta_j}(x))\big) \Big] \to \exists z\, p(z,z)$$

2.21 Hauptsätze der Prädikatenlogik erster Stufe. Sei L eine prädikatenlogische Sprache erster Stufe.

1. Die Menge der allgemeingültigen Formeln $\{A \mid \models A\}$ über L ist *rekursiv aufzählbar*. Es gibt ein deduktives System für L, dessen Theoreme genau die allgemeingültigen Formeln von L sind.

2. *Kompaktheitssatz* für die Prädikatenlogik erster Stufe. Sei $\Sigma \subseteq \mathrm{Form}_L$. Σ ist genau dann erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge von Σ erfüllbar ist.

3. Seien $\Sigma \subseteq \mathrm{Form}_L$ und $A \in \mathrm{Form}_L$. Genau dann gilt $\Sigma \models A$, wenn es eine endliche Teilmenge Σ_0 von Σ mit $\Sigma_0 \models A$ gibt.

4. *Satz von Löwenheim-Skolem.* $\Sigma \subseteq \mathrm{Form}_L$ ist genau dann erfüllbar, wenn es eine Interpretation $I = (D, I_c, I_v)$, mit abzählbaren oder endlichen D gibt, die Σ erfüllt.

Beweis. Zu 1., 2. und 3. gebe man ein deduktives System für die Prädikatenlogik erster Stufe an (später).

4. Informell: Σ enthält nur abzählbar viele Funktions- und Prädikatskonstanten. O.B.d.A. seien alle Formeln abgeschlossen (notfalls existentiell). Sei $I = (D, I_v)$ eine Interpretation. D muss für die u.u. unterschiedlichen Interpretationen aller möglichen Terme Werte bereithalten. Idee: Wähle als D die abzählbare Menge Term der Terme ($\approx$ “Herbrand Universum”). ■

2.22 Satz (Satz von Gödel). Satz 2.21 gilt nicht für Sprachen der Prädikatenlogik zweiter Stufe. Insbesondere gilt:

1. Die Menge der allgemeingültigen Formeln für Sprachen der Prädikatenlogik zweiter Stufe ist nicht rekursiv aufzählbar.
2. Es gibt kein deduktives System, dessen Theoreme die Menge der allgemeingültigen Formeln zweiter Stufe sind.
3. Es gibt erfüllbare Mengen, die keine abzählbaren Modelle haben.

Beweis. s. Yasuhara [1971]

2.3 Das deduktive System $\mathcal{F}$

Wir betrachten nun Sprachen der ersten Stufe mit Formeln in $\neg, \rightarrow, \forall, =$. Die übrigen Junktoren und der Existenzquantor dienen nur als "Abkürzungen" für äquivalente Formeln.

2.23 Definition. *Deduktives System* für eine Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe.

Sei L eine Sprache erster Stufe mit Formeln in $\neg, \rightarrow, \forall, =$. Das deduktive System $\mathcal{F} = (\mathrm{Ax}, R)$ ist bestimmt durch die Menge Ax von Axiomen und R von Regeln.

Ax enthält alle Generalisierungen (Eine Formel A ist Generalisierung der Formel B, falls $A \equiv \forall x_1 \ldots \forall x_n\ B$, wobei x_j eine Variable ist $(0 \leq j \leq n)$.) folgender Axiome:

Ax1: $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

Ax2: $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

Ax3: $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$

Ax4: $\forall x\ A \rightarrow A_x[t]$, falls $A_x[t]$ erlaubt

Ax5: $\forall x\ (A \rightarrow B) \rightarrow (\forall x\ A \rightarrow \forall x\ B)$

Ax6: $A \rightarrow \forall x\ A$, falls x nicht frei in A vorkommt

Ax7: $x = x$

Ax8: $x = y \rightarrow (A \rightarrow A')$, wobei A' aus A entsteht, indem man x an einigen Stellen in A durch y ersetzt

Bem.: Bei den Axiomen Ax1, Ax2 und Ax3 handelt es sich um Tautologien. Kommt x in A nicht frei vor, kann Ax5 geschrieben werden $\forall x\ (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x\ B)$.