Vergißbilder für Homomorphismen

Definition 7.9 *Ist $\sigma : sig' \to sig$ Signaturmorphismus, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ sig-Algebren und $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ sig-Homomorphismus, dann ist*

$h|_\sigma := \{h_{\sigma(s)} \mid s \in S'\}$, wobei $sig' = (S', F', \tau')$, ein sig'-Homomorphismus:

$$
\begin{array}{rccc}
(h|_\sigma)_s = h_{\sigma(s)} : & A_{\sigma(s)} & \rightarrow & B_{\sigma(s)} \\
& \shortparallel & & \shortparallel \\
& (A|_\sigma)_s & \rightarrow & (B|_\sigma)_s
\end{array}
$$

$h|_\sigma$ heißt Vergißbild von h entlang σ

Vergißbilder

Eigenschaften von $h|_\sigma$ (Vergißbild von h entlang σ)

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{sig}' \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, dash] & \mathrm{sig} \arrow[r, "\sigma'"] \arrow[d, dash] & \mathrm{sig}'' \arrow[d, dash] \\
\mathrm{ALG}(\mathrm{sig}') & \mathrm{ALG}(\mathrm{sig}) \arrow[l, "|_\sigma"'] & \mathrm{ALG}(\mathrm{sig}'') \arrow[l, "|_{\sigma'}"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\rotatebox{90}{$\in$} \qquad \rotatebox{90}{$\in$} \qquad\qquad \rotatebox{90}{$\in$} \qquad \rotatebox{90}{$\in$}
$$

$$
\mathfrak{A}|_\sigma \xrightarrow{h|_\sigma} \mathfrak{B}|_\sigma \qquad\qquad \mathfrak{A} \xrightarrow{h} \mathfrak{B}
$$

Verträglichkeit mit Identität, Komposition und Homomorphismen.

Parameterspezifikation

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{ALG}(\mathrm{Formal}) & & & \mathrm{ALG}(\mathrm{Body}) \arrow[lll, "|_{\mathrm{incl}}"'] \\
& \mathrm{Formal} \arrow[r, hook, "\mathrm{incl}"'] \arrow[d, "\sigma"] & \mathrm{Body} \arrow[d, "\sigma'"] & \\
& \mathrm{Actual} \arrow[r, hook, "\mathrm{incl'}"'] & \mathrm{Value} & \\
\mathrm{ALG}(\mathrm{Actual}) \arrow[uuu, "|_{\sigma}"] & & & \mathrm{ALG}(\mathrm{Value}) \arrow[lll, "|_{\mathrm{incl'}}"] \arrow[uuu, "|_{\sigma'}"']
\end{tikzcd}
$$

Parameterspezifikation

$\sigma : \mathrm{sig}' \longrightarrow \mathrm{sig}$, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, sig-Algebren.
$h : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$, sig-Homomorphismus.
$h\sigma_\sigma = \{h_{\sigma(s)} \mid s \in S'\}$, $\mathrm{sig}' = (S', F', \tau') =$ mit
$h\sigma_\sigma : A|_\sigma \longrightarrow B|_\sigma$ Vergißbild von h entlang σ.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{sig}' \arrow[r, "\sigma"] \arrow[rr, bend left, "\sigma' \circ \sigma"] & \mathrm{sig} \arrow[r, "\sigma'"] & \mathrm{sig}''
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Alg}(\mathrm{sig}') & \mathrm{Alg}(\mathrm{sig}) \arrow[l, "|_\sigma"'] & \mathrm{Alg}(\mathrm{sig}'') \arrow[l, "|_{\sigma'}"'] \arrow[ll, bend left, "|_{(\sigma' \circ \sigma)}"]
\end{tikzcd}$$

Parameterspezifikation

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A}|_\sigma \arrow[d, "h|_\sigma"] & \mathfrak{A} \arrow[l, "|_\sigma"'] \arrow[d, "h"] \\
\mathfrak{B}|_\sigma & \mathfrak{B} \arrow[l, "|_\sigma"']
\end{tikzcd}$$

Semantik der Parameterübergabe (nur Signatur)

Definition 7.10 *Sei Body[Formal] Parameterspezifikation.*
σ : Formal $\to$ Actual *Signaturmorphismus.*

Semantik der Parameterübergabe [Actual, σ].

Zuordnung: σ : Formal $\to$ Actual

$$\downarrow$$

initiale Semantik von Value. D. h.

$$T_{\text{Body[Actual},\sigma]}$$

Betrachte: $S :: (T_{\text{Actual}}, \sigma) \mapsto T_{\text{Body[Actual},\sigma]}$

Abbildung zwischen init Algebren. Kann aufgefasst werden als Zuordnung zwischen Formal Algebren $\to$ Body-Algebren.

Semantik Parameterübergabe

$$(T_{\text{Actual}}|_{\sigma} \mapsto (T_{\text{Body[Actual},\sigma]})|_{\sigma'}$$

$$\begin{tikzcd}
\text{Actual} \arrow[r, hook] \arrow[ddd, "\text{init-Sem.}"'] & \text{Body}[\text{Actual}, \sigma] \arrow[d, "\text{init-Sem.}"] \\
 & T_{\text{Body[Actual},\sigma]} \arrow[d, "\text{Vergissbild}"] \\
 & (T_{\text{Body[Actual},\sigma]})|_{\text{incl}} \\
h_{\text{init}} : T_{\text{Actual}} \arrow[r] & (T_{\text{Body[Actual},\sigma]})|_{\text{Actual}}
\end{tikzcd}$$

Abbildung zwischen init Algebren

$$
\begin{tikzcd}
((T_{\mathrm{Value}})|_{\sigma'})|_{\mathrm{Formal}} & & & & T_{\mathrm{Value}})|_{\sigma'} \arrow[llll, "\big|_{\mathrm{incl}}"'] \\
& (T_{\mathrm{Actual}})|_{\sigma} \arrow[ul, "(h_{\mathrm{init}})|_{\sigma}"'] & & & \\
& & \mathrm{Formal} \arrow[r, hook, "\mathrm{incl}"'] \arrow[d, "\sigma"] & \mathrm{Body} \arrow[d, "\sigma'"] & \\
& & \mathrm{Actual} \arrow[r, hook, "\mathrm{incl'}"'] & \mathrm{Value} & \\
& T_{\mathrm{Actual}} \arrow[uuu, "\big|_{\sigma}"] \arrow[dl, "h_{\mathrm{init}}"] & & & \\
(T_{\mathrm{Value}})|_{\mathrm{Actual}} \arrow[uuuuu, "\big|_{\sigma}"] & & & & T_{\mathrm{Value}} \arrow[llll, "\big|_{\mathrm{incl'}}"] \arrow[uuuuu, "\big|_{\sigma'}"']
\end{tikzcd}
$$

Abbildung zwischen init Algebren

Formal	elem $\longrightarrow$ nat	Actual
sorts elem	$\xrightarrow{\sigma}$	sorts nat
ops $a, b :\longrightarrow$ elem	$a \longrightarrow 0$	ops $0, 1 :\longrightarrow$ nat
eqns $a = b$	$b \longrightarrow 1$	

$\mathfrak{A} = T_{\text{Actual}} \quad A_{\text{nat}} = \{0, 1\}$

$\mathfrak{A}|_\sigma \in \text{Alg(sig Formal)}$ $(A|_\sigma)_{\text{elem}} = \{0, 1\}$
$a|_{\mathfrak{A}_{|\sigma}} = 0 \neq 1 = b|_{\mathfrak{A}_{|\sigma}}$
Gleichung von Formal nicht erfüllt! D. h. $\mathfrak{A}|_\sigma \notin \text{Alg(Formal)}$.

Parameterübergabe (Actual, σ)

Body[Formal]

$$\sigma : \text{sig}(\text{Formal}) \longrightarrow \text{sig}(\text{Actual})$$

Signatur Morphismus

$$\begin{tikzcd}
\text{Formal} \arrow[rr, hook, "\text{incl}"'] \arrow[d, "\sigma"] & & \text{Body} \arrow[d, "\sigma'(\text{mit Umbenennung})"] \\
\text{Actual} \arrow[r, hook, "\text{incl'}"'] & \text{Value} = & \text{Body}[\text{Formal}, \sigma]
\end{tikzcd}$$

Vor: sig(Actual) und sig(Value) strikt.

Parameterübergabe (Actual, σ)

Vergißbilder: $|_\sigma : \mathrm{Alg}(\mathrm{sig}) \to \mathrm{Alg}(\mathrm{sig}')$

$$\mathfrak{A}|_\sigma \text{ für } \sigma : \mathrm{sig}' \to \mathrm{sig}$$

$h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{L}$ sig-Homomorphismus

$$h|_\sigma : \mathfrak{A}|_\sigma \to \mathfrak{L}|_\sigma$$

sig$'$-Homomorphismus

Parameterübergabe $(\mathrm{Actual}, \sigma)$

$$
\begin{tikzcd}
((T_{\mathrm{Value}})|_{\sigma'})|_{\mathrm{Formal}} & & & T_{\mathrm{Value}})|_{\sigma'} \arrow[lll, "|_{\mathrm{incl}}"'] \\
& (T_{\mathrm{Actual}})|_{\sigma} \in \mathrm{Alg}(\mathrm{Formal}) \arrow[ul, "(h_{\mathrm{init}})|_{\sigma}"] & & \\
& T_{\mathrm{Actual}} \arrow[u, "|_{\sigma}"] \arrow[dl, "h_{\mathrm{init}}"] & & \\
(T_{\mathrm{Value}})|_{\mathrm{Actual}} \arrow[uuu, "|_{\sigma}"] & & & T_{\mathrm{Value}} \arrow[lll, "|_{\mathrm{incl'}}"] \arrow[uuu, "|_{\sigma'}"']
\end{tikzcd}
$$

Probleme: 1) $(T_{\mathrm{Actual}})|_{\sigma} \notin \mathrm{Alg}(\mathrm{Formal})$, 2) h_{init} keine Bijektion.

Spezifikationsmorphismus

Definition

Seien $\mathrm{spec}' = (\mathrm{sig}', E'), \mathrm{spec} = (\mathrm{sig}, E)$ (allg.) Spezifikationen. Ein Signaturmorphismus $\sigma : \mathrm{sig}' \to \mathrm{sig}$ heißt Spezifikationsmorphismus, falls für alle $s = t \in E'$ gilt $\sigma(s) = \sigma(t) \in Th(E)$.
Schreibe: $\sigma : \mathrm{spec}' \to \mathrm{spec}$
Fakt: Für $\mathfrak{A} \in \mathrm{Alg}(\mathrm{spec})$ gilt $\mathfrak{A}|_\sigma \in \mathrm{Alg}(\mathrm{spec}')$
D. h. $|_\sigma : \mathrm{Alg}(\mathrm{spec}) \to \mathrm{Alg}(\mathrm{spec}')$!
Oft verlangt man „nur“ $\sigma(s) = \sigma(t) \in ITh(E)$.!

Spezifikationsmorphismus

Eine Parameterübergabe für Body[Formal] ist ein Paar (Actual, σ):
Actual Spezifikation und σ : Formal $\longrightarrow$ Actual Spezifikationsmorphismus.
$(T_{\text{Actual}})|_\sigma \in \text{Alg}(\text{Formal})$
- verlange auch h_{init} Bijektion, syntaktische Einschränkungen.

Spezifikationssprachen

CLEAR, Act-one, -Cip-C, Affirm, ASL, Aspik, OBJ, ASF, $\underset{+}{\rightsquigarrow}$ neuere Sprachen: - Spectrum, - Troll.

Beispiel

Beispiel 7.7

$$\text{Formal} :: \begin{cases} \textit{spec} & \text{ELEMENT} \\ \text{use} & \text{BOOL} \\ \text{sorts} & \text{elem} \\ \text{ops} & . \leq . : \text{elem}, \text{elem} \to \text{bool} \\ \text{eqns} & x \leq x = \textit{true} \\ & \text{imp}(x \leq x \textit{ and } y \leq z, x \leq z) = \textit{true} \\ & x \leq y \textit{ or } y \leq x = \textit{true} \end{cases}$$

Beispiel (Forts.)

spec	LIST[ELEMENT]
use	ELEMENT
sorts	list
ops	$\mathrm{nil} :\longrightarrow \mathrm{list}$
	$\cdot : \mathrm{elem}, \mathrm{list} \longrightarrow \mathrm{list}$
	$\mathrm{insert} : \mathrm{elem}, \mathrm{list} \longrightarrow \mathrm{list}$
	$\mathrm{case} : \mathrm{bool}, \mathrm{list}, \mathrm{list} \longrightarrow \mathrm{list}$
	$\mathrm{sorted} : \mathrm{list} \longrightarrow \mathrm{bool}$

Beispiel (Forts.)

$$
\begin{array}{ll}
\text{eqns} & \text{insert}(x, \text{nil}) = x.\text{nil} \\
& \text{insert}(x, y.l) = \text{case}(x \leq y, x.\,\text{insert}(y, l), y.\,\text{insert}(x, l)) \\
& \text{case}(\text{true}, l_1, l_2) = l_1 \\
& \text{case}(\text{false}, l_1, l_2) = l_2 \\
& \text{sorted}(\text{nil}) = \text{true} \\
& \text{sorted}(x, \text{nil}) = \text{true} \\
& \text{sorted}(x, y, l) = \text{if } x \leq y \text{ then sorted}(y, l) \text{ else false}
\end{array}
$$

Eigenschaft: $\text{sorted}(\text{insert}(x, l)) = \text{true}$

Beispiel (Forts)

$$
\begin{aligned}
&\text{ACTUAL} \equiv \text{BOOL}\\
&\quad \sigma: \quad \text{elem} \to \text{bool}, \text{bool} \to \text{bool}\\
&\qquad\qquad .\leq . \to \text{impl}
\end{aligned}
$$

Die Gleichungen von ELEMENT sind in Th(BOOL)

$\rightsquigarrow$ Spezifikationsmorphismus

Beispiel (Forts.)

ACTUAL $\equiv$ NAT

σ : bool $\longrightarrow$ nat   elem $\longrightarrow$ nat

true $\longrightarrow$ suc(0)   nicht erlaubt

false $\longrightarrow$ 0

not $\longrightarrow$ suc

or $\longrightarrow$ plus

and $\longrightarrow$ times

$\vdots$

$. \leq . \longrightarrow \cdots$

kein Spezifikationsmorphismus

not(false) = true

not(true) = false gilt nicht!.