Grundlagen der Programmierung

SS 05
Prof. Dr. K. Madlener
Lösungshinweise zu Übungsblatt 11

Aufgabe 11.1. *ad (1)*

Sei $G = (\Sigma, N, P, S)$, $\Sigma = \{a, b\}$, $N = \{S, T\}$, $P = \{S ::= aT|bT, T ::= aS|bS|\varepsilon\}$.

Beh.: $L(G) = \{w \in \Sigma^* : |w| \text{ ungerade}\}$.

Bew.: Sei $L = \{w \in \Sigma^* : |w| \text{ ungerade}\}$.

Wir zeigen zunächst $L \subseteq L(G)$. Sei dazu $w \in L$, d.h. $|w| = 2n + 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
Wir zeigen durch Induktion nach n, dass $w \in L(G)$.

$n = 0$: $|w| = 1 \longrightarrow w \in \Sigma$.
(1) $w = a$:$S \vdash_P^1 aT \vdash_P^1 a$
(2) $w = b$:$S \vdash_P^1 bT \vdash_P^1 b$
Also $w \in L(G)$.

$n \to n + 1$: $|w| = 2(n + 1) + 1$
Es gibt $c, d \in \Sigma, u \in \Sigma^*$ mit $w = cdu$ und $|u| = 2n + 1$.

$$S \vdash_P^1 cT \vdash_P^1 cdS \underbrace{\vdash_P}_{I.V.} cdu = w \ \longrightarrow\ w \in L(G).$$

Also: $L \subseteq L(G)$.

Zeige nun: $L(G) \subseteq L$.

Dazu zeigen wir zunächst: Falls $S \vdash_P^m \alpha$ mit $m \in \mathbb{N}^+$ und $\alpha \in (\Sigma \cup N)^*$, so (i) falls $m = 2n$ gerade: $\alpha = a_1b_1 \cdots a_nb_nS$ oder ($|\alpha| = 2n - 1$ und $\alpha \in \Sigma^*$) mit $a_i, b_i \in \Sigma$, oder (ii) falls $m = 2n + 1$ ungerade: $\alpha = a_1b_1 \cdots a_nb_na_{n+1}T$ mit $a_i, b_i \in \Sigma$.

Induktion nach m:

$m = 1$: $S \vdash_P^1 \alpha \ \to\ \alpha \in \{aT, bT\}$.

$m \to m + 1$:

1. Fall: $m \in \mathbb{N}^+$ gerade.

Dann gilt $S \vdash_P^m a_1b_1 \cdots a_nb_nS \vdash_P^1 \alpha$ $(a_i, b_i \in \Sigma)$ mit
$\alpha \in \{a_1b_1 \cdots a_nb_naT, a_1b_1 \cdots a_nb_nbT\}$ $(a_i, b_i \in \Sigma)$ und
$m + 1 = 2n + 1$, also $m + 1$ ungerade und α hat die geforderte Gestalt.

2. Fall: $m \in \mathbb{N}^+$ ungerade.
Dann gilt $S \underbrace{\vdash_P^m}_{I.V.} a_1b_1 \cdots a_nb_na_{n+1}T \vdash_P^1 \alpha$ $(a_i, b_i \in \Sigma)$ mit
$\alpha \in \{a_1b_1 \cdots a_nb_na_{n+1}aS, a_1b_1 \cdots a_nb_na_{n+1}bS, a_1b_1 \cdots a_nb_na_{n+1}\}$ $(a_i, b_i \in \Sigma)$ und
$m + 1 = 2n + 2$, also $m + 1$ gerade und α hat die geforderte Gestalt.

Ist also $S \vdash_P \alpha$ mit $\alpha \in \Sigma^*$, so ist $|\alpha| = 2n - 1$ für ein $n \in \mathbb{N}^+ (a_i, b_i \in \Sigma)$, d.h. $\alpha \in L$, da $|\alpha|$ ungerade.

ad (2)

Sei $L = \{a^n b^m a^n | n, m \in \mathbb{N} \text{ und } n, m > 0\}$.

Beh.: Für $G = (\Sigma, N, P, S)$ mit $\Sigma = \{a, b\}$, $N = \{S, T\}$ und
$P = \{S ::= \underbrace{aSa}_{(1)} | \underbrace{aTa}_{(2)}, T ::= \underbrace{bT}_{(3)} | \underbrace{b}_{(4)}\}$ gilt: $L(G) = L$.

Bew.: $L \subseteq L(G)$:
Sei $w \in L$, d.h. $w = a^n b^m a^n$ für $n, m > 0$.
Dann $S \underbrace{\vdash_P^{n-1}}_{Produktion (1)} a^{n-1} S a^{n-1} \underbrace{\vdash_P^1}_{(2)} a^n T a^n \underbrace{\vdash_P^{m-1}}_{(3)} a^n b^{m-1} T a^n \underbrace{\vdash_P^1}_{(4)} a^n b^m a^n$.
Also $w \in L(G)$. (Eigentlich: Induktion nach n und m.)

$L(G) \subseteq L$:

Wir zeigen durch Induktion nach m: Gilt

$$S \vdash_P^m \alpha \ (\alpha \in (\Sigma \cup N)^*)$$

dann ist

$$\alpha \in \{a^m S a^m, a^m T a^m, a^k b^{m-k} T a^k, a^k b^{m-k} a^k | 0 < k \leq m - 1\} =: L_m(G).$$

$m = 1$: $S \vdash_P^1 \alpha \ \rightarrow \ \alpha \in \{aSa, aTa\}$.

$m \rightarrow m + 1$: $S \vdash_P^m \beta \vdash_P^1 \alpha$ mit $\beta \in L_m(G)$.

$$\alpha \in \{ \begin{array}{ll} a^{m+1} S a^{m+1} & \text{(Produktion (1) auf } a^m S a^m) \\ a^{m+1} T a^{m+1} & \text{(Produktion (2) auf } a^m S a^m) \\ a^k b^{m-k+1} T a^k & \text{(Produktion (3) auf } a^k b^{m-k} T a^k) \\ a^k b^{m-k+1} a^k & \text{(Produktion (4) auf } a^k b^{m-k} T a^k) \\ \} & \end{array}$$

Für $\alpha \in \Sigma^*$ ist also $\alpha \in L$.

Aufgabe 11.2. *ad (1)*

Automat erkennt, ob die Quersumme einer Dezimalzahl durch 5 teilbar ist.
Aus Tabelle ergibt sich $q_i x \vdash_A q_{(i+x) mod 5}$
mit $x \in \{0, 1, \cdots, 9\}, q_i \in \{q_0, \cdots q_4\}$
Und somit $q_0 x_0 x_1 ... x_n \vdash_A q_0$ gdw $x_0 x_1 ... x_n \bmod 5 = 0$, wobei $x_0 x_1 ... x_n$ die Eingabe ist.

ad (2)

Sei $\alpha = (ab + ba)^*$ ein regulärer Ausdruck über $\{a, b\}$.

Beh.: Der deterministische endliche Automat $A = (Q, \Sigma, \Pi, q_0, F)$
mit $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \Sigma = \{a, b\}, F = \{q_0\}$ und
$\Pi = \{q_0 a ::= q_1,\ q_0 b ::= q_2,\ q_1 a ::= q_3,\ q_1 b ::= q_0,\ q_2 a ::= q_0,\ q_2 b ::= q_3,\ q_3 a ::= q_3,\ q_3 b ::=$

$q_3\}$
erkennt die Sprache $< \alpha >$ (d.h. $L(A) =< \alpha >$).

Bew.: Wir zeigen durch Induktion nach $|w| = n$, dass folgende Behauptung gilt: Nach Lesen des Wortes w befindet sich A im Zustand

(1) q_0 gdw $w \in< (ab + ba)^* >$
(2) q_1 gdw $w \in< (ab + ba)^*a >$
(3) q_2 gdw $w \in< (ab + ba)^*b >$
(4) q_3 gdw $w \in< (ab + ba)^*(aa + bb)(a + b)^* >$

$n = 0$, d.h. $w = \varepsilon$, $w \in< (ab + ba)^* >$ und A ist in q_0.

$n \to n + 1$, d.h. $w = w'c$ mit $w' \in \{a, b\}^*$ und $c \in \{a, b\}$.
Für w' gelte die IV, d.h. A befinde sich im entsprechenden Zustand.

(1) $q_0w' \vdash_A q_0$ gdw. $w' \in< (ab + ba)^* >$.
$c = a$: $q_0w'a \vdash_A q_1$
$c = b$: $q_0w'b \vdash_A q_2$
(2) $q_0w' \vdash_A q_1$ gdw. $w' \in< (ab + ba)^*a >$.
$c = a$: $w = w'a \in< (ab + ba)^*(aa + bb)(a + b)^* >$ und $q_0w'a \vdash_A q_3$.
$c = b$: $w = w'b \in< (ab + ba)^* >$ und $q_0w'b \vdash_A q_0$

(3) Ähnlich wie (2).
(4) $q_0w' \vdash_A q_3$ gdw. $w' \in< (ab + ba)^*(aa + bb)(a + b)^* >$.
Für $c \in \{a, b\}$ gilt:$w = w'c \in< (ab + ba)^*(aa + bb)(a + b)^* >$ und $q_0w'c \vdash_A q_3$.

Aufgabe 11.3. Sei L eine Sprache vom Typ 3. Dann existiert ein $\alpha \in reg(\Sigma)$ mit $L = \langle\alpha\rangle$. Da $reg(\Sigma)$ bezüglich des $*$-Operators abgeschlossen ist, ist auch $\alpha^* \in reg(\Sigma)$ und es gilt

$$\langle\alpha^*\rangle = \langle\alpha\rangle^* = L^*$$

Also ist auch L^* eine Sprache vom Typ 3.
Das ganze lässt sich aber auch anders zeigen – man ersetzt in einer Grammatik, die L erzeugt, alle Regeln der Form $B ::= \epsilon$ durch $B ::= S$ und alle Regeln der Form $B ::= a$ durch $B ::= aS$ (wobei B Nichtterminal, a Terminal) und nimmt dazu noch die Regel $S ::= \epsilon$ auf. Dann muss man allerdings noch die Gleichheit der so definierten Sprache mit L^* zeigen, das geht durch eine Induktion für jede Inklusionsrichtung und ist insgesamt aufwendiger.

Aufgabe 11.4. Wähle $n := |Q|$. $y \in L \Longrightarrow q_0y \vdash q \in F$
$\Longrightarrow \exists\{q_0, \ldots, q_n\} \subseteq Q : q_0y \vdash^1 q_1y_1 \vdash \cdots \vdash^1 q_{n-1}y_{n-1} \vdash^1 q_ny_n \vdash \cdots \vdash^1 q \in F$.
Es gibt einen Zustand q', der zweimal vorkommt, da $|y| \geq |Q|$. Seien $u, v, w \in \Sigma^*$ mit $|uv| \leq n$, $v \neq \epsilon$, so dass

(1) $$q_0uvw \vdash q'vw \vdash q'w \vdash q \in F$$

Wir zeigen: $\forall i \in \mathbb{N} : q_0 uv^i w \vdash q \in F$
(Woraus sich die Beh. $uv^i w \in L$ unmittelbar ergibt.)
Induktion über i: $i = 0$
Es gilt: $q_0 uw \vdash q'w \vdash q \in F$, wegen (1).

$i \to i+1$:
$$q_0 uv^{i+1}w \vdash q'v^{i+1}w \underbrace{\vdash}_{nach (1)} q'v^i w \underbrace{\vdash}_{\text{nach IV}} q'w \vdash q \in F \Longrightarrow uv^{i+1}w \in L.$$