Grundlagen der Programmierung

SS 05
Prof. Dr. K. Madlener
Lösungshinweise zu Übungsblatt 12

Aufgabe 12.1. (1) $L = \{a^m b^n | m, n \in \mathbb{N}, m \neq n\}$ ist nicht vom Typ 3.

Ann.: L vom Typ 3
$\longrightarrow \overline{L} = \{a, b\}^* \backslash L$ ist von Typ 3 (siehe Folgerung 7.22)
$\longrightarrow$ Nach Pumping-Lemma gibt es $k \in \mathbb{N}$, so dass für alle $w \in \overline{L}$ mit $|w| \geq k$ gilt:
Es gibt $x, y, z \in \{a, b\}^*$ mit $y \neq \varepsilon$ und $|xy| \leq k$ und $w = xyz$ und für alle $l \in \mathbb{N}$ ist $xy^l z \in \overline{L}$.
Sei nun $w = a^k b^k \in \overline{L} \rightarrow$ es gibt x, y, z wie oben gefordert.
$\longrightarrow$ wie $|xy| < k$, gibt es $s, r \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq s \leq r$ und $xy = a^r$ und $y = a^s$
$\longrightarrow xz = a^{k-s} b^k \in \overline{L}$ **Widerspruch!** da $a^{k-s} b^k \in L$.
$\longrightarrow \overline{L}$ nicht vom Typ3
$\longrightarrow L$ nicht vom Typ3.

(2) $L = \{a^{n^2} | n \in \mathbb{N}\}$ ist keine Sprache vom Typ 2.

Ann.:L ist von Typ 2, d.h. es gibt eine k.f. Grammatik G mit $L = L(G)$.
$\longrightarrow$ Nach Pumping-Lemma gibt es $m \in \mathbb{N}$ mit:
für alle $z \in L(G)$ mit $|z| \geq m$ gilt:
es gibt u, v, w, x, y mit $z = uvwxy$, $|vx| > 0$ und $|vwx| \leq m$ und für alle $i \in \mathbb{N}$ ist $uv^i wx^i y \in L(G)$.
Sei nun $z = a^{m^2} \in L$. Betrachte eine beliebige Zerlegung $z = uvwxy$ mit $|vx| > 0$ und $|vwx| \leq m$.
Es gilt dann: $z_2 := uv^2 wx^2 y = a^{m^2+k+l}$ mit $k + l \geq 1$ und $k + l \leq m$.
Da aber $(m+1)^2 = m^2 + 2m + 1$ ist, und $m^2 + 2m + 1 > m^2 + k + l$, folgt $z_2 \notin L$ im Widerspruch zur Annahme.
$\longrightarrow L$ ist nicht vom Typ 2(d.h. nicht kontextfrei).

Aufgabe 12.2. Sei $G = (\{Z\}, \{(,)\}, \{Z ::= ZZ, Z ::= (Z), Z ::= \varepsilon\}, Z)$.
Sei weiter K folgender Kellerautomat, der aus G aus dem unten angegebenen Verfahren entsteht:
$K = (\{\#\}, \{Z\}, \{(,)\}, \{Z\# ::= ZZ\#,\ Z\# ::=)Z(\#, Z\# ::= \#, (\#(::= \#,)\#) ::= \#\}, Z\#, \{\#\})$

Beh.: Es gilt $L(G) = L(K)$.

Bew.: Anstelle eines speziellen Beweises für diese konkrete Aufgabe geben wir ein allgemeines Verfahren zur Konstruktion eines Kellerautomaten K an, der für eine gegebene kontextfreie Grammatik G die Eigenschaft $L(K) = L(G)$ erfüllt.
Sei also $G = (N, \Sigma, P, Z)$ eine kontextfreie Grammatik.
Setze $K = (\{\#\}, N, \Sigma, \Pi, Z\#, \{\#\})$
mit $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$,

wobei $\Pi_1 = \{A\# ::= \alpha^{mi}\# | A ::= \alpha \in P\}$ und $\Pi_2 = \{a\#a ::= \# | a \in \Sigma\}$.
Der Kellerautomat K ist (s. Vorlesung, insb. Def. 7.33 und 7.40) auch ein LL-Automat, nämlich $K = A_{LL}(G)$. Damit ist klar, dass es für jedes Wort mindestens eine Linksableitung gibt.
Zeige zunächst:
Für alle $w \in T^*$, $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$ gilt :

$$\alpha \vdash_P w \text{ gdw } \alpha^{mi}\#w \vdash_\Pi \# \qquad (+)$$

Dann gilt nämlich für alle $w \in T^*$:
$w \in L(G)$ gdw. $Z \vdash_P w$ gdw. $Z\#w \vdash_\Pi \#$ gdw. $w \in L(K)$,
d.h. $L(G) = L(K)$.
Zeige für (+):

(i) $\alpha \vdash_P^j w \to \alpha^{mi}\#w \vdash_\Pi \#$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

(ii) $\alpha\#w \vdash_\Pi^j \# \to \alpha^{mi} \vdash_P w$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

Zu (i): Induktion über j.

$j = 0$: $\alpha \vdash_P^0 w \to \alpha = w \in T^*$. Sei $w = w_1 w_2 ... w_n$ mit $w_i \in T$, dann $\alpha^{mi}\#w = w_n ... w_2 w_1 \# w_1 w_2 ... w_n$ und durch Regeln in Π_2: $\alpha^{mi}\#w \vdash_\Pi^n \#$

$j \to j+1$: $\alpha \vdash_P^{j+1} w$.
Es gibt eine Linksableitung von w aus α in G, d.h. es sei $\alpha = uA\beta \vdash_P^1 uz\beta \vdash_P^j w$ mit $u \in \Sigma^*$ und $A ::= z \in P$.
w hat die Gestalt $w = uv$ und es gilt $z\beta \vdash_P^j v$ (siehe dazu auch Lemma 6.3.2 im Buch).
Also:

$$\begin{aligned} \alpha^{mi}\#w &= \beta^{mi} A u^{mi} \# uv \\ &\vdash_\Pi \beta^{mi} A\#v \quad (\text{mit } \Pi_2) \\ &\vdash_\Pi^1 \beta^{mi} z^{mi} \# v \quad (\text{mit } \Pi_1) \\ &\vdash_\Pi \# \quad (I.V.) \end{aligned}$$

Zu (ii): Induktion über j.

$j = 0$: $\alpha\#w \vdash_\Pi^0 \# \to \alpha = w = \varepsilon$, und $\varepsilon \vdash_P \varepsilon$.

$j \to j+1$: Es gelte $\alpha\#w \vdash_\Pi^{j+1} \#$.
Endet α mit $b \in T$, d.h. $\alpha = \beta b$, so muss w mit b beginnen, d.h. $w = bv$, und es gibt $\beta b\#bv \vdash_\Pi^1 \beta\#v \vdash_\Pi^j \#$. Nach I.V. gilt $\beta^{mi} \vdash_P v$, also auch $\alpha^{mi} = b\beta^{mi} \vdash_P bv = w$.
Endet hingegen α mit $A \in N$, d.h. $\alpha = \beta A$, so wird im ersten Schritt ein Produktion aus Π_1 angewandt:

$\beta A\#w \vdash^1_\Pi \beta z^{mi}\#w \vdash^j_\Pi \#$.
Nach I.V.: $(\beta z^{mi})^{mi} = z\beta^{mi} \vdash_P w$, also auch
$\alpha^{mi} = A\beta^{mi} \vdash^1_P z\beta^{mi} \vdash_P w$(wegen Π_1).

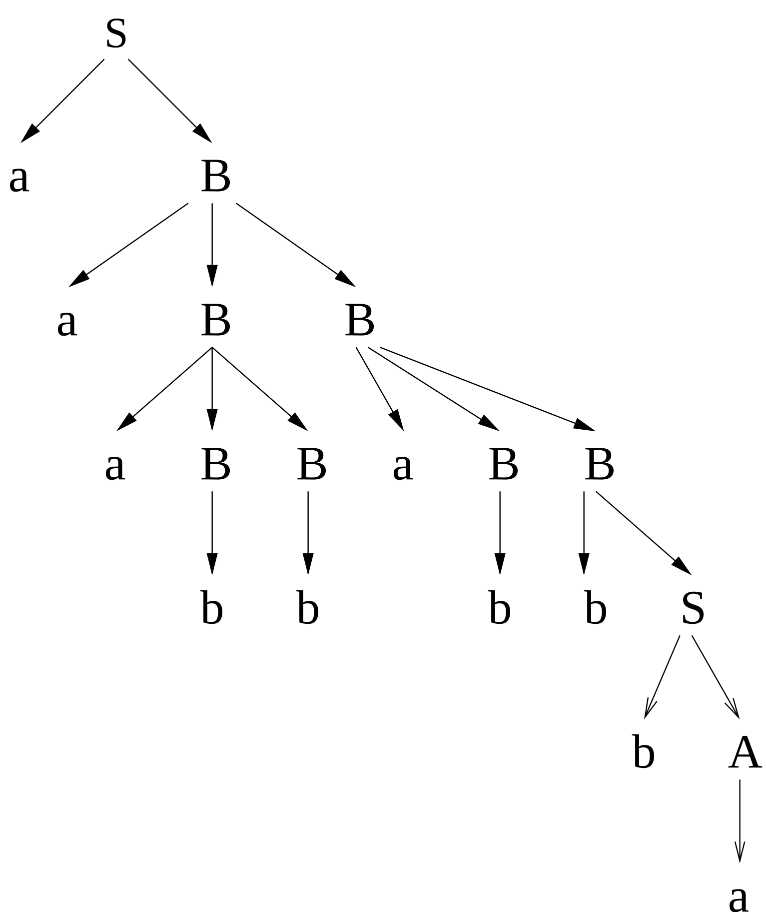
Aufgabe 12.3. Linksableitung:

$(\underline{S}, a\underline{B}, aa\underline{B}B, aaa\underline{B}BB, aaab\underline{B}B, aaabb\underline{B}, aaabba\underline{B}B, aaabbab\underline{B},$
$aaabbabb\underline{S}, aaabbabbb\underline{A}, aaabbabbba)$

Rechtsableitung:

$(\underline{S}, a\underline{B}, aaB\underline{B}, aaBaB\underline{B}, aaBaBb\underline{S}, aaBaBbb\underline{A}, aaBa\underline{B}bba,$
$aa\underline{B}abbba, aaaB\underline{B}abbba, aaa\underline{B}babbba, aaabbabbba)$

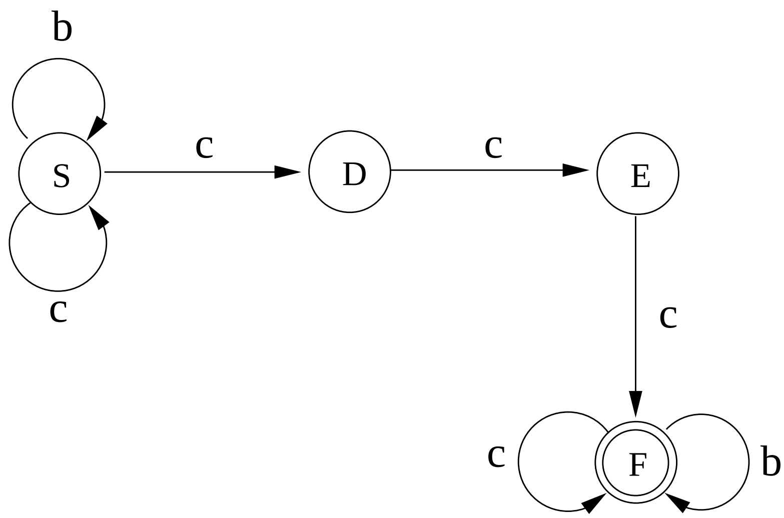
Strukturbaum:



Aufgabe 12.4. *ad (1):*

Sei NEA $A = (Q, \Sigma, \Pi, S, \{F\})$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{b, c\} \\ Q &= \{S, D, E, F\} \\ \Pi &= \text{ siehe Abbildung} \end{aligned}$$



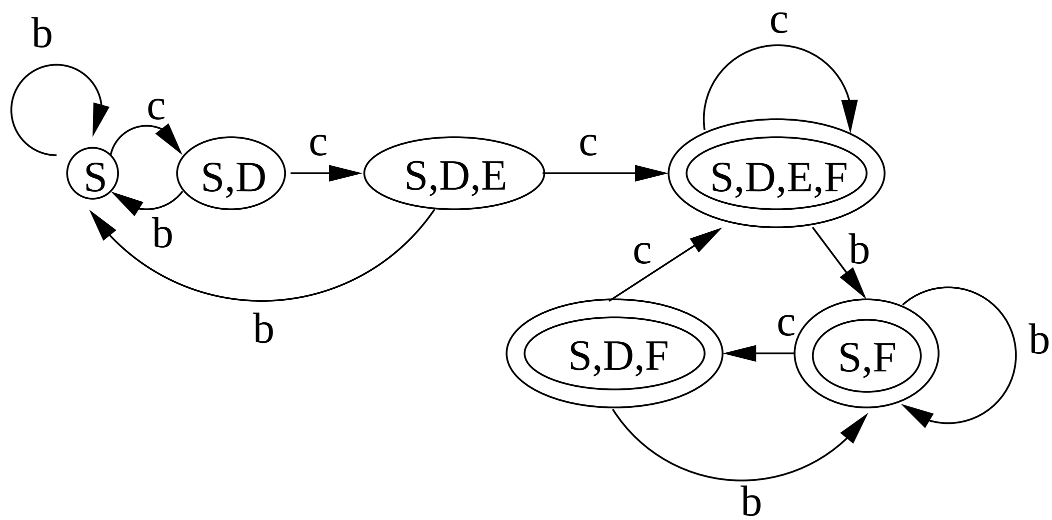
Da der NEA A gemäß der im Beweis des Charakterisierungssatzes (7.17) angegebenen Definition für A konstruiert wurde, folgt mit Behauptung b von Folie 227 $L(A) = L(G)$.

ad (2):

Sei DEA $A' = (Q', \Sigma', \Pi', q_0', F')$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \Sigma' &= \Sigma \\ Q' &= P(Q) \text{ (Potenzmenge von } Q) \\ \Pi' &= \{Ta \to \{q' \in Q : \exists q \in T \text{ mit } qa \to q' \in \Pi\} : T \in Q', a \in \Sigma'\} \\ q_0' &= q_0 \\ F' &= \{T \in Q' : T \cap \{F\} \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

Im Diagramm wird auf Mengen-Klammern verzichtet. Nicht-erreichbare Zuständen sind *nicht* eingezeichnet.



Strategie: Beginne mit Startzustand $\{S\}$, konstruiere für b und c die Nachfolgezustände. Bearbeite Nachfolgezustände analog!

Automat ist nicht minimal: Zustände $\{S, D, E, F\}$ und $\{S, D, F\}$ können zusammengefasst werden.

Da für DEA A' die Potenzmengen-Konstruktion aus dem Beweis des Satzes von Büchi (7.20) verwendet wurde, gilt nach Konstruktion $L(A') = L(A)$.

ad (3):

Sei $\alpha = (b \cup c)^* ccc(b \cup c)^*$. Es gilt $\langle\alpha\rangle = L(A')(= L(A) = L(G))$.
$\subseteq$:
Sei $w \in \langle\alpha\rangle$. Dann lässt sich w zerlegen in $w = xyz$, so dass $x, z \in \langle(b \cup c)^*\rangle = \{b, c\}^*$ un d$y = ccc$. Diese Zerlegung ist nicht unbedingt eindeutig. Es ist

$$Sxyz \vdash_A Syz \vdash_A^1 Dccz \vdash_A^1 Ecz \vdash_A^1 Fz \vdash_A F$$

Somit gilt $\langle\alpha\rangle \subseteq L(A)$.
$\supseteq$:
Dazu zeigen wir mit Induktion über $|w| \in \mathbb{N}$, dass folgendes gilt: Befindet sich A nach Lesen des Wortes w im Zustand

(1) S, dann ist $w \in \{b, c\}^*$
(2) D, dann ist $w \in \{b, c\}^* c$
(3) E, dann ist $w \in \{b, c\}^* cc$
(4) F, dann ist $w \in \{b, c\}^* ccc\{b, c\}^*$

$|w| = 0 : \surd$
$|w| = n \to |w'| = n + 1 :$
Sei $w' = wb$.

(1) Sei $Swb \vdash_A S$. Dann muss aber $Swb \vdash_A Sb \vdash_A^1 S$. Somit auch $Sw \vdash_A S$. Nach IV gilt $w \in \{b,c\}^*$, insbesondere $wb \in \{b,c\}^*$.
(2) Es gibt keine Transition, die mit b in den Zustand D und E geht. Also kann $Swb \vdash_A D$ bzw. $Swb \vdash_A E$ nicht sein.
(3) Sei $Swb \vdash_A F$. Dann muss aber $Swb \vdash_A Fb \vdash_A^1 F$. Somit auch $Sw \vdash_A F$. Nach IV gilt $w \in \{b,c\}^* ccc\{b,c\}^*$, insbesondere $wb \in \{b,c\}^* ccc\{b,c\}^*$.

Sei $w' = wc$.

(1) Sei $Swc \vdash_A S$. Dann muss aber $Swc \vdash_A Sc \vdash_A^1 S$. Somit auch $Sw \vdash_A S$. Nach IV gilt $w \in \{b,c\}^*$, insbesondere $wc \in \{b,c\}^*$.
(2) Sei $Swc \vdash_A D$. Dann muss aber $Swc \vdash_A Sc \vdash_A^1 D$. Somit auch $Sw \vdash_A S$. Nach IV gilt $w \in \{b,c\}^*$, insbesondere $wc \in \{b,c\}^* c$.
(3) Sei $Swc \vdash_A E$. Dann muss aber $Swc \vdash_A Dc \vdash_A^1 E$. Somit auch $Sw \vdash_A D$. Nach IV gilt $w \in \{b,c\}^* c$, insbesondere $wc \in \{b,c\}^* cc$.
(4) Sei $Swc \vdash_A F$. Dann gilt entweder $Swc \vdash_A Ec \vdash_A^1 F$ oder $Swc \vdash_A Fc \vdash_A^1 F$. Im ersten Fall ergibt sich $Sw \vdash_A E$. IV liefert $w \in \{b,c\}^* cc$, und somit $wc \in \{b,c\}^* ccc\{b,c\}^*$. Im zweiten Fall ergibt sich $Sw \vdash_A F$. IV liefert hier $w \in \{b,c\}^* ccc\{b,c\}^*$ und damit auch $wc \in \{b,c\}^* ccc\{b,c\}^*$

Aus der Definition von $\langle . \rangle$ folgt $\langle \alpha \rangle = \{b,c\}^* ccc\{b,c\}^*$. Es gilt also $\langle \alpha \rangle \supseteq L(A)$.