Grundlagen der Programmierung

SS 05
Prof. Dr. K. Madlener
Übungsblatt 2

Aufgabe 2.1. Ein *Monoid* $(M, *, 1)$ besteht aus einer nicht-leeren Menge M, einer zweistelligen, assoziativen Verknüpfung $* : M \times M \to M$ und einem neutralen Element 1. Sei Σ ein endliches Alphabet und $\_ \cdot \_ : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ die Wortkonkatenation auf Σ^*. Offensichtlich ist $(\Sigma^*, \cdot, \epsilon)$ ein Monoid; es heißt das *freie Monoid* über Σ und wird im folgenden vereinfachend mit Σ^* bezeichnet.

(1) Beweisen oder widerlegen Sie:
- Durch $\rho : \Sigma^* \to \Sigma^*, u \mapsto u^{\text{mi}}$ (siehe Folien) wird ein Endomorphismus, also ein Homomorphismus von Σ^* auf sich selbst, definiert, der jedes Wort u auf sein gespiegeltes Wort u^{mi} abbildet, wobei $\epsilon^{\text{mi}} = \epsilon$ gelten soll.
- Abbildung ρ ist injektiv.
- Abbildung ρ ist surjektiv.

(2) Ein Wort $u \in \Sigma^*$ mit der Eigenschaft $u = \rho(u)$ heißt *Palindrom* über Σ. Sei die Menge P der Palindrome über Σ definiert durch $P := \{u \mid u = \rho(u)\}$. Geben Sie einen Kalkül K an, in welchem genau die Menge P ableitbar ist. Beweisen Sie ihre Aussage.

Aufgabe 2.2. Sei $\Sigma = \{a, b, (,), +, *\}$ ein endliches Alphabet. Betrachte zunächst den Kalkül $AExp_1 \subseteq A^* \times A$ mit $A = \Sigma^*$ für arithmetische Ausdrücke, welcher definiert ist durch:

$$AExp_1 :: \frac{}{a}, \frac{}{b}, \frac{\alpha, \beta}{\alpha + \beta}, \frac{\alpha, \beta}{\alpha * \beta}$$

Sei $B = A \times \mathbb{N}$. Wir wollen nun die arithmetischen Ausdrücke auswerten. Die Auswertung geben wir in Form eines Kalküls an. Sei also Kalkül $Val_1 \subseteq B^* \times B$ definiert durch:

$$Val_1 :: \frac{}{(a,1)}, \frac{}{(b,2)}, \frac{(\alpha,n),(\beta,m)}{(\alpha+\beta, n +_{\mathbb{N}} m)}, \frac{(\alpha,n),(\beta,m)}{(\alpha*\beta, n *_{\mathbb{N}} m)}$$

Wir verändern nun Kalkül $AExp_1$ zu Kalkül $AExp_2$ in dem wir Klammerungen hinzufügen. Sei also Kalkül $AExp_2 \subseteq A^* \times A$ definiert durch:

$$AExp_2 :: \frac{}{a}, \frac{}{b}, \frac{\alpha, \beta}{(\alpha + \beta)}, \frac{\alpha, \beta}{(\alpha * \beta)}$$

Unser Auswertungskalkül Val_1 wird nun erweitert zu einem Kalkül $Val_2 \subseteq B^* \times B$, welches die hinzugefügten Klammern berücksichtigt.

$$Val_2 :: \frac{}{(a,1)}, \frac{}{(b,2)}, \frac{(\alpha,n),(\beta,m)}{((\alpha+\beta), n +_{\mathbb{N}} m)}, \frac{(\alpha,n),(\beta,m)}{((\alpha*\beta), n *_{\mathbb{N}} m)}$$

(1) Beweisen Sie, dass $\Gamma_{Val_1}(\emptyset) \subseteq A \times \mathbb{N}$ eine Relation, aber nicht Graph einer Funktion ist. Begründen Sie, warum $\Gamma_{Val_2}(\emptyset) \subseteq A \times \mathbb{N}$ den Graph einer Funktion $f : A \to \mathbb{N}$

darstellt. Die Funktion f kann als Auswertungsfunktion von arithmetischen Ausdrücken aufgefasst werden.

(2) Sei die Funktion g definiert durch folgende Rekursionsgleichung:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x = a \\ 2 & x = b \\ g(\alpha) +_{\mathbb{N}} g(\beta) & x = (\alpha + \beta) \\ g(\alpha) *_{\mathbb{N}} g(\beta) & x = (\alpha * \beta) \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f bzgl. $\sqsubseteq$ die kleinste Lösung dieser Rekursionsgleichung ist (vergl. Folien 22 und 23).

Aufgabe 2.3. Sei (S, Σ) die der Algebra Nat (siehe Folien) zu Grunde liegende Signatur.

(1) Geben Sie eine Algebra A über (S, Σ) an, in welcher der Grundbereich nat_A endlich ist und die Funktionen $+_A$ und $*_A$ nicht kommutativ sind.

(2) Erweitern Sie diese Algebra geeignet, um Felder (arrays) mit Elementen aus dem Grundbereich nat_A beschreiben zu können.