Grundlagen der Programmierung

SS 05
Prof. Dr. K. Madlener
Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1. Beweisen Sie Lemma 4.15, d.h. zeigen Sie:

(1) Für t vom Typ s ist $val_{A,z}(t) \in s_A$.
(2) Ist z' ein weiterer Zustand über A und V mit $z(X) = z'(X)$ für alle in t vorkommenden Variablen X, so ist $val_{A,z}(t) = val_{A,z'}(t)$.

Aufgabe 3.2. (1) Sei (S, Σ) die Signatur der Algebra Nat (siehe Beispiel 4.4) und V mit $V \supseteq \{X, Y, Z : nat\}$ eine geeignete Variablenmenge. Sei weiter die Substitution σ definiert durch $\sigma = \{X/0, Y/\mathrm{succ}(Y)\}$. Berechnen Sie

(a) $[X + 0]\sigma$
(b) $[\exists X \exists Y \ \neg X = Y]\sigma$
(c) $[\exists X \ (X = 0 \wedge Y < X)]\sigma$
(d) $[\forall Y (\exists X \ X = 0 \wedge Y < X)]\sigma$

(2) Seien σ und ρ Substitutionen über der Signatur (S, Σ) und der Variablenmenge V. Zeigen Sie: Es gibt genau eine Substitution γ über (S, Σ) und V, so dass für alle Terme t über (S, Σ) und V folgendes gilt:

$$t\gamma = (t\sigma)\rho$$

Aufgabe 3.3. Bezeichne (S, Σ) die Signatur der Algebra Nat (siehe Beispiel 4.4). Eine *Peano-Struktur* A ist eine (S, Σ)-Algebra, in welcher folgende Formeln gültig sind:

(1) $\forall X \neg\, 0 = \mathrm{succ}(X)$
(2) $\forall X \forall Y (\mathrm{succ}(X) = \mathrm{succ}(Y) \to X = Y)$
(3) $\forall X \ X + 0 = X$
(4) $\forall X \forall Y \ X + \mathrm{succ}(Y) = \mathrm{succ}(X + Y)$
(5) $\forall X \ X * 0 = 0$
(6) $\forall X \forall Y \ X * \mathrm{succ}(Y) = (X * Y) + X$
(7) Für jede Formel φ über (S, Σ) und V das 'Induktionsprinzip':
$(([\varphi]\{X/0\} \wedge \forall X \ (\varphi \to [\varphi]\{X/\mathrm{succ}(X)\})) \to \forall X \ \varphi)$

Die oben angegebenen Formeln heißen *Peano-Axiome*. Eine k-stellige Relation R in einer (S, Σ)-Algebra A heißt *definierbar*, wenn eine Variablenmenge V und eine Formel φ über (S, Σ) und V existiert, so dass

$$(a_1, \ldots, a_k) \in R \Leftrightarrow A \models_{z(X_1/a_1, \ldots, X_k/a_k)} \varphi \text{ für alle } (a_1, \ldots, a_k) \in R.$$

Zum Beispiel ist in Nat die Menge der geraden Zahlen definierbar. Betrachte etwa eine Variablenmenge $V \supseteq \{X, Y : nat\}$ und die Formel $\exists Y X = Y + Y$.

(1) Ist Nat eine Peano-Struktur? Zeigen Sie mit Hilfe der Definitionen 4.17 und 4.18, dass mindestens ein Peano-Axiom in Nat gilt. Überprüfen Sie die Gültigkeit der Formel $\neg(X = Y) \to X \leq Y$ in Nat.

(2) Geben Sie das Induktionsprinzip für die Formel $\varphi \equiv (X = 0 \vee \exists Y\ X = \mathrm{succ}(Y))$ an.
(3) Zeigen Sie, dass die die Menge der Primzahlen (als einstellige Relation gesehen) in Nat definierbar ist. Verwenden Sie hierbei, dass die Teilbarkeitsrelation in Nat definierbar ist.
(4) Zeigen Sie, dass die Relation des größten gemeinsamen Teilers ggT in Nat definierbar ist, wobei

$$\mathrm{ggT}(x, y, z) \Leftrightarrow z \text{ ist der größte gemeinsame Teiler von } x \text{ und } y$$

Aufgabe 3.4. Sei α das folgende Programm über einer beliebigen Signatur und einer Variablenmenge, die die paarweise verschiedenen Variablen X, Y und T eines Typs s enthalte:

$$T := X;\ X := Y;\ Y := T;$$

Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:
(1) $z[\![\alpha]\!]_A z(X/\mathrm{val}_{A,z}(Y), Y/\mathrm{val}_{A,z}(X))$
(2) $z[\![\alpha]\!]_A z(X/\mathrm{val}_{A,z}(Y), Y/\mathrm{val}_{A,z}(X), T/\mathrm{val}_{A,z}(X))$,

jeweils für eine beliebige Algebra zur Signatur und einen beliebigen Zustand z.