Grundlagen der Programmierung

SS 05
Prof. Dr. K. Madlener
Übungsblatt 4

Aufgabe 4.1. Zeigen Sie die Äquivalenz von denotationaler Semantik und Interpretersemantik. Vervollständigen Sie hierfür den Beweis von Lemma 4.31 aus den Folien (Induktionsschritt 'α Schleife', Umkehrung).

Aufgabe 4.2. Sei (S, Σ) eine Signatur mit

$$\begin{aligned} S &= \{int\} \\ \Sigma &= \{0 :\to int, 1 :\to int, + : int \times int \to int, - : int \times int \to int, \\ &\quad \geq : int \times int\}. \end{aligned}$$

Sei A eine (S, Σ)-Algebra mit $int_A = \mathbb{Z}$ und seien 0_A, 1_A, $+_A$, $-_A$ und $\geq_A$ die Null, die Eins, die Addition, die Subtraktion und die Größer-Gleich-Relation auf $\mathbb{Z}$. Sei weiter $V = \{X, Y, Z, M : int\}$ eine Variablenmenge. Wir betrachten folgendes WHILE-Programm α über (S, Σ) und V:

$Y := X;\ Z := 0;$
while $Y \geq M$ do
    $Y := Y - M;\ Z := Z + 1;$
end;

Wir wissen (Stichwort: rechtseindeutig, siehe Vorlesung), dass $[\![\beta]\!]_A$ für jedes Programm β über (S, Σ) und V und jede (S, Σ)-Algebra A eine (partielle) Funktion von der Menge der Zustände über A und V in dieselbe Menge ist. Anstelle $z[\![\beta]\!]_A z'$ können wir also auch $[\![\beta]\!]_A(z) \downarrow$ mit $[\![\beta]\!]_A(z) = z'$ schreiben.

(1) Geben Sie eine notwendige und zugleich hinreichende Bedingung dafür an, dass für einen Zustand z über A und V gilt: $[\![\alpha]\!]_A(z) \downarrow$ (d.h. das Programm „terminiert“ mit Anfangszustand z).
(2) Geben Sie für einen Zustand z über A und V im Falle $[\![\alpha]\!]_A(z) \downarrow$ den Zustand z' an mit $z' = [\![\alpha]\!]_A(z)$, d. h. bestimmen Sie $z'(v)$ für alle Variablen v aus V.

Aufgabe 4.3. Gegeben sei folgendes WHILE-Programm β über der Signatur von Nat (vgl. Vorlesung):

$Z := X;\ Z' := 0;$
while $\neg Y = Z'$ do
    $Z := succ(Z);\ Z' := succ(Z');$
end;

(1) Sei z ein Zustand über Nat und einer geeignet gewählten Variablenmenge V mit $z(X) = 1$ und $z(Y) = 2$. „Transformieren“ Sie (β, z) durch iterierte Anwendung der Interpreterfunktion I_{Nat} nach (ϵ, z') (vgl. Vorlesung).

(2) Zeigen Sie in Nat die Gültigkeit der partiellen Korrektheitsaussage $Nat \models \{\text{TRUE}\}\, \beta \,\{Z = X + Y\}$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:
   (a) Kommentieren Sie den Programmtext so, wie dies in der Vorlesung vorgestellt wurde (siehe Folien, Beispiel 5.7).
   (b) Listen Sie alle zu beweisenden Implikationen auf. Welche dieser Implikationen beschreibt die Gültigkeit der Schleifeninvariante in Nat?
   (c) Zeigen Sie die Gültigkeit der zu beweisenden Implikationen in Nat. Verwendung Sie hierzu bei mindestens einer Implikation die Definitionen 4.17 und 4.18 aus der Vorlesung.

Aufgabe 4.4. Sei (S, Σ) eine Signatur und V eine endliche Variablenmenge.

(1) Gilt die partielle Korrektheitsaussage $A \models \{\text{TRUE}\}\, X := t;\ \{X = t\}$ für alle Algebren A, Variablen X aus V und Terme t (gleichen Typs wie X) über (S, Σ) und V? Geben Sie ein hinreichendes Kriterium an für die Gültigkeit dieser Korrektheitsaussage an.
(2) Erweitern Sie den Hoare-Kalkül um die Regel

$$\frac{\{\varphi\}\, X := t;\ Y := s;\ \{\psi\}}{\{\varphi\}\, Y := s;\ X := t;\ \{\psi\}}$$

für Variablen X, Y aus V und Terme t, s gleichen Typs, wobei die Variable X nicht in dem Term s und die Variable Y nicht in dem Term t vorkommen darf. Zeigen Sie, dass der so erweiterte Kalkül korrekt ist (siehe Folien, Satz 5.8).

Aufgabe 4.5. In dieser Aufgabe soll die in der Vorlesung vorgestellte Programmiersprache um das Konstrukt 'repeat α until B' erweitert werden.

(1) Erweitern sie Kalkül $Prog(S, \Sigma, V)$ (Folien, Definition 4.25) um eine Kalkül-Regel 'repeat α until B.
(2) Geben Sie für dieses neue Konstrukt die denotationale Programmsemantik $[\![.]\!]_A$ an.
(3) Erweitern sie das Hoaresche Kalkül um eine entsprechende Regel und weisen Sie die Korrektheit dieser Regel nach.
(4) Erweitern sie das Kalkül 'Programme mit Kommentaren' um eine entsprechende Regel und weisen Sie Korrektheit dieser Regel nach.

Informationen zur Vorlesung:
http://www-madlener.informatik.uni-kl.de/ag-madlener/teaching/ss2005/gdp/gdp.html