Grundlagen der Programmierung

SS 05
Prof. Dr. K. Madlener
Übungsblatt 5

Aufgabe 5.1. Sei A eine Algebra, α ein Programm, φ und ψ Formeln und z und z' Zustände über der sich ergebenden Variablenmenge. Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) Aus $A \models \{\varphi\}\,\alpha\,\{\psi\}$ und $A \models_z \varphi$ folgt $z \in \mathrm{wlp}_A(\alpha, \psi)$.
b) Aus $A \models \{\varphi\}\,\alpha\,\{\psi\}$ und $z' \in \mathrm{spc}_A(\varphi, \alpha)$ folgt $A \models_{z'} \psi$.
c) Sei $\mathrm{wlp}_A(\alpha, \psi)$ in A durch eine Formel $W_{\alpha,\psi}$ definierbar. Dann gilt die Aussage $A \models \{W_{\alpha,\psi}\}\,\alpha\,\{\psi\}$ und für alle ξ folgt aus $A \models \{\xi\}\,\alpha\,\{\psi\}$ die Aussage $A \models (\xi \rightarrow W_{\alpha,\psi})$.
d) Sei $\mathrm{spc}_A(\varphi, \alpha)$ in A durch eine Formel $S_{\varphi,\alpha}$ definierbar. Dann gilt $A \models \{\varphi\}\,\alpha\,\{S_{\varphi,\alpha}\}$ und für alle ξ folgt aus $A \models \{\varphi\}\,\alpha\,\{\xi\}$ die Aussage $A \models S_{\varphi,\alpha} \rightarrow \xi$.
e) Sei $\alpha = X := t;$. Dann ist die stärkste Nachbedingung $\mathrm{spc}_A(\varphi, \alpha)$ von α und φ in A durch die Formel $S_{\varphi,\alpha} = \exists Y([\varphi]\{X/Y\} \wedge X = t\{X/Y\})$ definierbar, wobei $Y \notin \mathrm{VAR}(X, t, \varphi)$.

Aufgabe 5.2. a) Bestimmen Sie die Formel $S_{\varphi,\alpha}$ mit $\varphi = X = Y$ und $\alpha = Y := X+Y;\ X := X+Y;$. Zeigen Sie mit dieser Formel die partielle Korrektheitsaussage

$$\mathrm{Nat} \models \{X = Y\}\, Y := X + Y;\ X := X + Y;\ \{3 * Y = 2 * X\}.$$

b) Für welche Programme α und Formeln φ gelten die partiellen Korrektheitsaussagen $\{\varphi\}\,\alpha\,\{\mathrm{FALSE}\}$ bzw. $\{\varphi\}\,\alpha\,\{\mathrm{TRUE}\}$?
c) Sei A eine geeignete Algebra. Seien zwei Programme α und β sowie Formeln φ und ψ gegeben. Dann gilt

$$\mathrm{wlp}_A(\alpha\beta,\ \psi) = \mathrm{wlp}_A(\alpha, W_{\beta,\psi})$$

sowie

$$\mathrm{spc}_A(\varphi,\ \alpha\beta) = \mathrm{spc}_A(S_{\varphi,\alpha}, \beta),$$

sofern $\mathrm{wlp}_A(\beta, \psi)$ und $\mathrm{spc}_A(\varphi, \alpha)$ durch die Formeln $W_{\beta,\psi}$ bzw. $S_{\varphi,\alpha}$ in A definierbar sind.

Aufgabe 5.3. Gegeben sei das folgende Programm α

$Y := 0;$
while $\neg(X = Y \vee X = succ(Y))$ do
    $Y := succ(succ(Y));$
end;

und die Formel $\psi = X = Y$ über der Signatur (S, Σ) der Algebra Nat und einer geeignet gewählten Variablenmenge V.

(1) Bestimmen Sie die schwächste Vorbedingung $\mathrm{wlp}_{\mathrm{Nat}}(\alpha, \psi)$ von α und ψ.
(2) Geben Sie, falls dies möglich ist, eine Formel $W_{\alpha,\psi}$ an, die $\mathrm{wlp}_{\mathrm{Nat}}(\alpha, \psi)$ in Nat definiert.

(3) Zeigen Sie, dass HC(N) nicht vollständig ist. Bearbeiten Sie dazu die Aufgabenteile (1) und (2) mit der Signatur (S, Σ) der Algebra N. Ist $\mathrm{wlp}_{\mathrm{N}}(\alpha, \psi)$ in N definierbar (vgl. Vorlesung)?

Aufgabe 5.4. Gegeben sei der primitiv rekursive Ausdruck π

$$\mathrm{REK}(\mathrm{PROJ1}, \mathrm{KOMP}(\mathrm{SUCC}, \mathrm{PROJ2})).$$

Wie wir aus der Vorlesung wissen, repräsentiert π eine Funktion $f_\pi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $f_\pi(x, y) = x + y$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$. Welche Funktion $f_\pi : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ repräsentiert π? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Informationen zur Vorlesung:
http://www-madlener.informatik.uni-kl.de/ag-madlener/teaching/ss2005/gdp/gdp.html