Grundlagen der Programmierung

SS 05
Prof. Dr. K. Madlener
Lösungshinweise zu Übungsblatt 7

Aufgabe 7.1. *ad (1):*

- *1. Beh.:* $A(x, y) > y$
  Bew.: Der Beweis erfolgt mit vollständiger Induktion über x.
  $I.A.$: $A(0, y) = y + 1 > y$
  $I.V.^{(1)}$: Für ein beliebiges x gelte die Behauptung $A(x, y) > y$.
  $I.S.$: Zu zeigen ist $A(x + 1, y) > y$. Dies zeigen wir mit vollständiger Induktion über y:
  - $I.A.$: $A(x + 1, 0) = A(x, 1) >^{(I.V.^{(1)})} 1 > 0$.
  - $I.V.^{(2)}$:Für ein beliebiges y gelte $A(x + 1, y) > y$
  - $I.S.$: Zu zeigen ist $A(x + 1, y + 1) > y + 1$.
  - $A(x + 1, y + 1) = A(x, A(x + 1, y) >^{(I.V.^{(1)})} A(x + 1, y) >^{(I.V.^{(2)})} y$
  - Daraus folgt: $A(x+1, y+1) > y+1$. Damit ist die Induktionsbehauptung für y bewiesen.

  Also ist auf die Induktionsbehauptung für x bewiesen und somit die gesamte Behauptung.
- *2. Beh.:* $A(x, y_1) > A(x, y_2)$, falls $y_1 > y_2$
  Bew.: Wir zeigen zunächst, dass $A(x, y + 1) > A(x, y)$ gilt:
  Für $x = 0$ gilt: $A(0, y + 1) = y + 2 > y + 1 = A(0, y)$
  Für $x > 0$ gilt: $A(x, y + 1) =^{Def.A} A(x - 1, A(x, y)) >^{1.Beh} A(x, y)$
  Aus der Transititvität ($a > b \wedge b > c \rightsquigarrow a > c$) und Linearität ($\forall a, b, a \neq b \in \mathbb{N} : a > b \vee b > a$) von $>$ folgt die Behauptung, also: $A(x, y_1) > A(x, y_2)$, falls $y_1 > y_2$.
- *3. Beh.:* $A(x + 1, y) \geq A(x, y + 1)$
  Bew.: Beweis mit vollständiger Induktion über y:
  $I.A.$: $A(x + 1, 0) = A(x, 1)$
  $I.V.$: Für ein beliebiges y gelte $A(x + 1, y) \geq A(x, y + 1)$.
  $I.S.$: $y + 1 <^{1.Beh} A(x, y + 1) \leq A(x + 1, y)$
  $\rightsquigarrow y + 2 \leq A(x, y + 1) \leq^{I.V.} A(x + 1, y)(*)$
  Ausserdem:$A(x, y + 2) \leq^{2.Beh,(*)} A(x, A(x + 1, y)) = A(x + 1, y + 1)$
  $\rightsquigarrow A(x + 1, y + 1) \geq A(x, (y + 1) + 1)$
- *4. Beh.:* $A(x + 2, y) > A(x, 2y)$
  Bew.: Aus der Definition von A folgt zunächst: $A(x, y) \geq A(0, x + y) = x + y + 1$ (siehe dazu auch Aufgabeteil 3, (**)). Beweis der 4. Behauptung durch vollständige Induktion über y:
  $I.A.$: $A(x + 2, 0) = A(x + 1, 1) \geq A(x, 2) >^{2.Beh} A(x, 0)$
  $I.V.$: $A(x + 2, y) > A(x, 2y)$

$I.S.: A(x+2,y+1) = A(x+1, A(x+2,y)) >^{I.V.} A(x+1, A(x,2y)) \geq^{3.Beh.}$ $A(x, 1 + \underbrace{A(x,2y)}_{\geq x+2y+1 \geq 2y+1}) \geq A(x, 2y+2) = A(x, 2(y+1))$

- *5. Beh.:* A ist total
  Bew.: Durch Induktion über x sieht man für $x=0$ direkt, dass A für alle y definiert ist. Im Induktionsschritt ergibt sich für ein beliebiges $x+1$ der Wert von $A(x+1,y)$ zu
  $A(x+1,y) = A(x, A((x+1), y-1)) = A(x, A(x, A(x+1, y-2)))$
  $= \underbrace{A(x, A(x, ..., A(x+1,0)...))}_{y+1-mal} = \underbrace{A(x, A(x, ..., A(x,1)...))}_{y+1-mal}$.
  Dabei wird die Funktion nach der dritten Zeile der Definition ($A(x+1,y+1) = A(x, A(x+1,y))$) entwickelt und noch einmal die zweite Zeile der Definition ($A(x+1,0) = A(x,1)$) benutzt. Die Definition von $x+1$ wird also zurückgeführt auf verschiedene Kombinationen von Werten der Art $A(x,...)$, die nach $I.V.$ bereits definiert sind (formal: Im Induktionsschritt eine weitere Induktion über y).

ad (2):

Beh.: A ist μ-rekursiv.
Bew.: siehe Buch, S.172 (Achtung! Fehlerzeile 8:$\cdots n[2]-1, rest^3(n)$). Begründen Sie, dass N primitiv rekursiv ist.

ad (3):

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(x) = A(x,0)$ für alle $x \in \mathbb{N}$.
Beh.: $f \notin \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
Bew.: (Widerspruchsbeweis)
Ann.: $f \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$

Definiere $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch $g(x) = f(2x+1)$ für alle $x \in \mathbb{N}$. Es ist $g \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, da f, Multiplikation, konstante Funktionen, $f_{SUCC} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ abgeschlossen bzgl. KOMP.

Es gibt $m \in \mathbb{N}$ mit $g(x) \leq A(m,x)$ für alle $x \in \mathbb{N}$ (siehe Folie 124). Mit $x = m$ ist also $g(m) \leq A(m,m)$. Weiter gilt $A(m,m) < A(m,m+1) \leq A(m+1,m)$ und $A(m+1,m) \leq A(2m+1,0)$ (siehe Aufgabenteil (3), (**)).

Andererseits: $g(m) = f(2m+1) = A(2m+1,0)$. Widerspruch!
Also gilt $f \notin \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

ad (4):

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = \mu y.A(y,x) - A(x,y) = 0$ für alle $x \in \mathbb{N}$.
Beh.: $f \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$

Bew.: Nach Vorlesung gilt $(*)$ $A(x, y+1) \leq A(x+1, y)$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$ (siehe Folie 123). Es gilt sogar allgemeiner

$$A(x, y+k) \leq A(x+k, y) \ (**)$$

für alle $x, y, k \in \mathbb{N}$. Der Nachweis wird mit Induktion über $\mathbb{N}$ geführt:
$k = 0 : \surd$
$k \to k+1$:
Sei $A(x, y+k) \leq A(x+k, y)$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\begin{aligned} A(x, y+(k+1)) &= A(x, (y+1)+k) \\ &\leq A(x+k, y+1) && \text{(IV)} \\ &\leq A((x+k)+1, y) && (*) \\ &\leq A(x+(k+1), y) \end{aligned}$$

Insbesondere gilt mit $x = y = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $A(0, k) \leq A(k, 0)$, bzw. mit x statt k $(***)$ $A(0, x) \leq A(x, 0)$ für alle $x \in \mathbb{N}$.
Funktion f bestimmt zu einem gegebenen $x \in \mathbb{N}$ das kleinste y, so dass $A(y, x) - A(x, y) = 0$ gilt. Wegen $(***)$ folgt $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{N}$. Es ist $f \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, da Konstantenfunktion $\in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Aufgabe 7.2. Lösung
$REL_n = \{\chi_Q : Q$ ist n-stellige entscheidbare Relation.$\}$

a) Beh.: Es gibt für jedes n $rel_n \in \mathcal{R}_p$ mit (1) $im(rel_n) = \{0, 1\}$ und (2) f.a. $\chi \in REL_n$ gibt es $p \in \mathbb{N}$ mit $\chi(\overrightarrow{x}) = rel_n(p, \overrightarrow{x})$ f.a. $\overrightarrow{x} \in \mathbb{N}$.

Bew.: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt.
Setzte nun $rel_n = sgn \circ \varphi^{(n)} \in \mathcal{R}_p$. $\longrightarrow$
(1) $im(rel_n) \subseteq \{0, 1\}$.
(2) Falls $\chi \in REL_n \to \chi \in \mathcal{R}_p$, da $REL_n \subseteq \mathcal{R}_p$.
$\to$ es gibt $q \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} \chi(\overrightarrow{x}) &= \varphi^{(n)}(q, \overrightarrow{x}) \\ &= sgn(\varphi^{(n)}(q, \overrightarrow{x})) \text{ da } im(\chi) \subseteq \{0, 1\} \\ &= rel_n(q, \overrightarrow{x}) \text{ f.a. } \overrightarrow{x} \in \mathbb{N}^n \end{aligned}$$

b) Beh.: Es gibt nicht für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion $rel_n \in \mathcal{R}$ (also total) mit dem geforderten Eigenschaften.

Bew.: Sei $n \geq 1$.
Ann.:Gilt doch.
Definiere dann $Q_{x_1, \cdots, x_n}$ gdw. $rel_n(x_1, x_1, \cdots, x_n) = 0$ f.a. $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{N}$.
$\to \chi_Q \in REL_n$
$\to$ es gibt $q \in \mathbb{N}$ mit $\chi_Q(x_1, \cdots, x_n) = rel_n(q, x_1, \cdots, x_n)$ f.a. $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{N}$
$\to \chi_Q(q, x_2, \cdots, x_n) = rel_n(q, q, x_2, \cdots, x_n) = 1$ gdw. $rel_n(q, q, x_2, \cdots, x_n) = 0$ f.a. $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{N}$ **Widerspruch!**.

Aufgabe 7.3. *ad (1):*

$h \in \mathbb{R}_p^{(2)}(\mathbb{N})$.
Beh.: Es gibt $f \in \mathcal{P}^{(2)}(\mathbb{N})$ mit
$\varphi^{(1)}_{f(p,q)}(x) = h(\varphi^{(1)}_p(x), \varphi^{(1)}_q(x))$ f.a. $p, q, x \in \mathbb{N}$.
Bew.: Sei $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ mit $g(x,p,q) = h(\varphi^{(1)}_p(x), \varphi^{(1)}_q(x))$ f.a. $x, p, q \in \mathbb{N}$.
$\longrightarrow$ es gibt $m \in \mathbb{N}$ mit $\varphi^{(3)}_m(x,p,q) = g(x,p,q)$ f.a. $x, p, q \in \mathbb{N}$
(da nämlich $g \in \mathcal{R}_p^{(3)}(\mathbb{N})$ wegen $h \in \mathcal{R}_p^{(2)}(\mathbb{N})$, $\varphi^{(1)} \in \mathcal{R}_p^{(2)}(\mathbb{N})$, und $\mathcal{R}_p$ abgl. bzgl. KOMP).
Mit dem s-m-nTheorem folgt $\varphi^{(3)}_m(x,p,q) = \varphi^{(1)}_{S_{2,1}(m,p,q)}(x)$ f.a. $x, p, q \in \mathbb{N}$ (und $S_{2,1} \in \mathcal{P}^{(3)}(\mathbb{N})$)
Mit $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ und $f(p,q) = S_{2,1}(m,p,q)$ f.a. $p, q \in \mathbb{N}$ (und damit $f \in \mathcal{P}^{(2)}(\mathbb{N})$) folgt also

$$\varphi^{(1)}_{f(p,q)}(x) = h(\varphi^{(1)}_p(x), \varphi^{(1)}_q(x)) \text{ f.a. } p, q, x \in \mathbb{N}.$$

ad (2):

Beh.: Es gibt $m \in \mathbb{N}$ mit $\varphi^{(1)}_m(x) = \varphi^{(1)}_x(m)$ f.a. $x \in \mathbb{N}$.
Bew.: Sei $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $f(x,y) = \varphi^{(1)}_x(y)$ f.a. $x, y \in \mathbb{N}$.
Nach dem Rekursionstheorem gibt es dann $q \in \mathbb{N}$ mit

$$\varphi^{(1)}_q(x) = f(x,q) = \varphi^{(1)}_x(q) \text{ f.a. } x \in \mathbb{N}.$$

ad (3):

Beh.: Es gibt $m \in \mathbb{N}$ mit $\varphi^{(2)}_m(x,y) = m^y \cdot x^m$ f.a. $x, y \in \mathbb{N}$.
Bew.: Sei $f : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ mit $f(x,y,k) = k^y \cdot x^k$ f.a. $x, y, k \in \mathbb{N}$.
Da $f \in \mathcal{R}_p^{(3)}(\mathbb{N})$ (Warum?), gibt es also ein $p \in \mathbb{N}$ mit

$$f(x,y,k) = \varphi^{(3)}_p(x,y,k) \text{ f.a. } x, y, k \in \mathbb{N}.$$

Nach s-m-n Theorem gilt weiter (für ein geeignetes $S_{1,2} \in \mathcal{P}^{(2)}(\mathbb{N})$):

$$\varphi^{(3)}_p(x,y,k) = \varphi^{(2)}_{S_{1,2}(p,k)}(x,y) \text{ f.a. } x, y, k \in \mathbb{N}$$

Mit $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $g(x) = S_{1,2}(p,x)$ f.a. $x \in \mathbb{N}$ ist $g \in \mathcal{P}^{(1)}(\mathbb{N})$, und nach dem Fixpunktsatz gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so dass

$$\varphi^{(2)}_{g(m)} = \varphi^{(2)}_m.$$

Also: $\varphi^{(2)}_m(x,y) = \varphi^{(2)}_{S_{1,2}(p,m)}(x,y) = \varphi^{(3)}_p(x,y,m) = m^y \cdot x^m$ f.a. $x, y \in \mathbb{N}$.

Informationen zur Vorlesung:
http://www-madlener.informatik.uni-kl.de/ag-madlener/teaching/ss2005/gdp/gdp.html