

Grundlagen der Programmierung

SS 05

Prof. Dr. K. Madlener

Übungsblatt 8

Aufgabe 8.1.

- (1) Sei $h \in \mathcal{R}_p^{(2)}(\mathbb{N})$. Zeigen Sie, dass es eine primitiv rekursive Funktion $f \in \mathcal{P}^{(2)}(\mathbb{N})$ gibt mit

$$\varphi_{f(p,q)}^{(1)}(x) = h(\varphi_p^{(1)}(x), \varphi_q^{(1)}(x))$$

für alle $p, q, x \in \mathbb{N}$.

- (2) Zeigen Sie, dass es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $\varphi_m^{(1)}(x) = \varphi_x^{(1)}(m)$ für alle $x \in \mathbb{N}$.
(3) Zeigen Sie, dass es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $\varphi_m^{(2)}(x, y) = m^y x^m$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 8.2.

- (1) Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben und sei weiter $A = \{p \in \mathbb{N} : n \in \text{im}(\varphi_p^{(1)})\}$. Zeigen oder widerlegen Sie: A ist rekursiv aufzählbar.
(2) Ist $A = \{p \in \mathbb{N} : \varphi_p^{(1)} \in \mathcal{R}_p(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{R}(\mathbb{N})\}$ rekursiv aufzählbar? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 8.3.

Wir betrachten die Menge $K = \{a \in \mathbb{N} : \varphi_a(a) \downarrow\}$.

- (1) Finden Sie einen Index m mit der Eigenschaft:

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} 1 & x = m \\ \uparrow & \text{sonst} \end{cases}$$

Beachten Sie, dass $m \in K$ gilt.

- (2) Sei

$$K' = \{b \in \mathbb{N} : \text{es gibt } a \in K \text{ mit } \varphi_b = \varphi_a\}$$

Zeigen Sie: $K \neq K'$.

Aufgabe 8.4.

- (1) Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ mit $\emptyset \neq A \neq \mathbb{N}$ und sei A entscheidbar.
Zeigen oder widerlegen Sie: $A \leq_m \bar{A}$.
(2) Sei $A = \{p \in \mathbb{N} : \varphi_p \text{ total}\}$.
Zeigen oder widerlegen Sie: $A \leq_m \bar{A}$.

Informationen zur Vorlesung:

<http://www-madlener.informatik.uni-kl.de/ag-madlener/teaching/ss2005/gdp/gdp.html>