Grundlagen der Programmierung

SS 05
Prof. Dr. K. Madlener
Lösungshinweise zu Übungsblatt 8

Aufgabe 8.1. *ad (1):*

$h \in \mathbb{R}_p^{(2)}(\mathbb{N})$.
Beh.: Es gibt $f \in \mathcal{P}^{(2)}(\mathbb{N})$ mit
$\varphi^{(1)}_{f(p,q)}(x) = h(\varphi^{(1)}_p(x), \varphi^{(1)}_q(x))$ f.a. $p, q, x \in \mathbb{N}$.
Bew.: Sei $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ mit $g(x, p, q) = h(\varphi^{(1)}_p(x), \varphi^{(1)}_q(x))$ f.a. $x, p, q \in \mathbb{N}$.
$\longrightarrow$ es gibt $m \in \mathbb{N}$ mit $\varphi^{(3)}_m(x, p, q) = g(x, p, q)$ f.a. $x, p, q \in \mathbb{N}$
(da nämlich $g \in \mathcal{R}^{(3)}_p(\mathbb{N})$ wegen $h \in \mathcal{R}^{(2)}_p(\mathbb{N})$, $\varphi^{(1)} \in \mathcal{R}^{(2)}_p(\mathbb{N})$, und $\mathcal{R}_p$ abgl. bzgl. KOMP).
Mit dem s-m-nTheorem folgt $\varphi^{(3)}_m(x, p, q) = \varphi^{(1)}_{S_{2,1}(m,p,q)}(x)$ f.a. $x, p, q \in \mathbb{N}$ (und $S_{2,1} \in \mathcal{P}^{(3)}(\mathbb{N})$)
Mit $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ und $f(p, q) = S_{2,1}(m, p, q)$ f.a. $p, q \in \mathbb{N}$ (und damit $f \in \mathcal{P}^{(2)}(\mathbb{N})$) folgt also

$$\varphi^{(1)}_{f(p,q)}(x) = h(\varphi^{(1)}_p(x), \varphi^{(1)}_q(x)) \text{ f.a. } p, q, x \in \mathbb{N}.$$

ad (2):

Beh.: Es gibt $m \in \mathbb{N}$ mit $\varphi^{(1)}_m(x) = \varphi^{(1)}_x(m)$ f.a. $x \in \mathbb{N}$.
Bew.: Sei $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $f(x, y) = \varphi^{(1)}_x(y)$ f.a. $x, y \in \mathbb{N}$.
Nach dem Rekursionstheorem gibt es dann $q \in \mathbb{N}$ mit

$$\varphi^{(1)}_q(x) = f(x, q) = \varphi^{(1)}_x(q) \text{ f.a. } x \in \mathbb{N}.$$

ad (3):

Beh.: Es gibt $m \in \mathbb{N}$ mit $\varphi^{(2)}_m(x, y) = m^y \cdot x^m$ f.a. $x, y \in \mathbb{N}$.
Bew.: Sei $f : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ mit $f(x, y, k) = k^y \cdot x^k$ f.a. $x, y, k \in \mathbb{N}$.
Da $f \in \mathcal{R}^{(3)}_p(\mathbb{N})$ (Warum?), gibt es also ein $p \in \mathbb{N}$ mit

$$f(x, y, k) = \varphi^{(3)}_p(x, y, k) \text{ f.a. } x, y, k \in \mathbb{N}.$$

Nach s-m-n Theorem gilt weiter (für ein geeignetes $S_{1,2} \in \mathcal{P}^{(2)}(\mathbb{N})$):

$$\varphi^{(3)}_p(x, y, k) = \varphi^{(2)}_{S_{1,2}(p,k)}(x, y) \text{ f.a. } x, y, k \in \mathbb{N}$$

Mit $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $g(x) = S_{1,2}(p, x)$ f.a. $x \in \mathbb{N}$ ist $g \in \mathcal{P}^{(1)}(\mathbb{N})$, und nach dem Fixpunktsatz gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so dass

$$\varphi^{(2)}_{g(m)} = \varphi^{(2)}_m.$$

Also: $\varphi_m^{(2)}(x,y) = \varphi_{S_{1,2}(p,m)}^{(2)}(x,y) = \varphi_p^{(3)}(x,y,m) = m^y \cdot x^m$ f.a. $x, y \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 8.2. Lösung

a) Sei $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{A} = \{p \in \mathbb{N} | n \in im(\varphi_p^{(1)})\}$.

Beh.: $\mathbb{A}$ rekursiv aufzählbar.

Bew.: Zum Beweis verwenden wir ein WHILE-Programm mit Eingaben p, das genau dann terminiert, wenn $p \in A$ gilt. Somit berechnet dieses WHILE-Programm die zum Beweis benötigte Funktion. Betrachte folgendes (verkürzt wiedergegebene) WHILE-Programm über der Algebra $\mathbb{N}$:

$R := 0;\ B := 0;$ **while** $B = 0$ **do**
$K := i^{\mathrm{first}(R)}(\mathrm{inp}^{(1)}(P, \mathrm{rest}(R)));$
if $\mathrm{first}(K) = 0 \wedge \mathrm{out}(K) = \mathrm{succ}^n(0)$
then $B := 1;$ **else** $R := \mathrm{succ}(R);$
end;
end;

Dabei werden in die Zuweisung von K WHILE-Prozeduren zur Berechnung der Iteration der Interpreter-Simulationsfunktion i sowie WHILE-Prozeduren zur Berechnung der Funktionen first, rest und inp verwendet. Diese Funktionen werden ebenfalls bei der Auswertung der **if** -Bedingung verwendet. Ausserdem ist n eine Konstante und gemäss Aufgabe gegeben. Alle diese Funktionen sind WHILE-berechenbar über $\mathbb{N}$.

Obiges WHILE-Programm berechnet eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(p) \downarrow$ gdw. $p \in \mathbb{A}$. (Eingabe-Variable: P).

Sei dazu zunächst $p \in \mathbb{A}$, d.h. $n \in im(\varphi_p^{(1)})$, d.h. es gibt $x \in \mathbb{N}$, so dass $\varphi_p^{(1)}(x) \downarrow$ und $\varphi_p^{(1)}(x) = n$. Es gibt also ein $t \in \mathbb{N}$ mit

$$first(i^t(inp^{(1)}(p,x))) = 0 \text{ sowie}$$
$$out(i^t(inp^{(1)}(p,x))) = n.$$

Dann es gibt ein $r \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{first}(r) = t$ und $\mathrm{rest}(r) = x$ (codiere t und x in eine Zahl r). Dann gilt aber, dass $f(p) \downarrow$, da zu Beginn des k-ten Schleifendurchlaufs R den Wert k hat ($k \in \mathbb{N}$) und somit vor dem r-ten Schleifendurchlauf den Wert r. Damit wird also die Bedingung bei der If-Abfrage zu $true$ evaluiert und die $While$-Schleife somit verlassen.

Sei nun andererseits $f(p) \downarrow$, d.h. die Zuweisung von B wurde ausgeführt. Es gibt also $k \in \mathbb{N}$ mit $first(k) = 0$ und $out(k) = n$, wobei $k = i^{first(r)}(inp^{(1)}(p, rest(r)))$ für ein $r \in \mathbb{N}$ ist. Es gibt also weiter $t, x \in \mathbb{N}$, so dass $first(i^t(inp^{(1)}(p,x))) = 0$ und $out(i^t(inp^{(1)}(p,x))) = n$.

$\longrightarrow\ \ \varphi_p^{(1)}(x) \downarrow$ und $\varphi_p^{(1)} = n \ \rightarrow\ n \in im(\varphi_p^{(1)}) \ \rightarrow\ p \in \mathbb{A}$.

b) Beh.: $A = \{p \in \mathbb{N} | \varphi_p^{(1)} \in \mathcal{R}_P(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{R}(\mathbb{N})\}$ ist nicht rekursiv aufzählbar.
Bew.: Sei $\hat{A} = \mathcal{R}_p(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{R}(\mathbb{N})$.
Sei nun $f \in \mathcal{R}_p(\mathbb{N})$ eine totale Funktion. Alle endlichen Restriktionen von f sind in $\hat{A}$, aber f selbst nicht. Da A eine Indexmenge ist, kann der Satz von Rice-Sharpio auf A angewendet werden. Über einen einfachen Widerspruchsbeweis folgt sofort, dass A nicht rekursiv aufzählbar ist.

Aufgabe 8.3. Sei $K = \{a \in \mathbb{N} | \varphi_a^{(1)}(a) \downarrow\}$ und $K' = \{b \in \mathbb{N} : \text{es gibt } a \in K \text{ mit } \varphi_b = \varphi_a\}$

(1) Sei $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$,
$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ \uparrow & \text{sonst} \end{cases} \text{ f.a. } x, y \in \mathbb{N}$$
$\to \ f \in \mathcal{R}_p(\mathbb{N})$
$\to$ es gibt $p \in \mathbb{N}$ mit $f = \varphi_p^{(2)}$.
$\to$ es gibt $h \in \mathcal{P}^{(1)}(\mathbb{N})$ mit $f(x,y) = \varphi_p^{(2)}(x,y) = \varphi_{h(y)}^{(1)}(x)$ f.a. $x, y \in \mathbb{N}$. (wg. s-m-n Theorem mit $h(y) = s_{1,1}(p,y)$)
Nach dem Fixpunktsatz gibt es $m \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_{h(m)}^{(1)} = \varphi_m^{(1)}$.
$$\to \ \varphi_m^{(1)}(x) = \varphi_{h(m)}^{(1)}(x) = f(x,m) = \begin{cases} 1 & x = m \\ \uparrow & \text{sonst} \end{cases}$$
f.a. $x \in \mathbb{N}$.
Es gilt: $m \in K$(da $\varphi_m^{(1)}(m) \downarrow$).

(2) Sei $m' \in \mathbb{K}'$ mit $m' \neq m$ wobei m aus Aufgabenteil (1), und $\varphi_{m'}^{(1)} = \varphi_m^{(1)}$. (z.B. $m' =< \mathit{code}(V_j := 0);\ m >$ mit V_j Variable die nicht in m tritt auf).
$\to \ \varphi_{m'}^{(1)}(m') = \varphi_m^{(1)}(m') \uparrow$, da $m' \neq m \ \to \ m' \notin K$.

Aufgabe 8.4.
ad (1):

Sei $A \subseteq \mathbb{N}, \emptyset \neq A \neq \mathbb{N}$ und sei A entscheidbar.

Beh.: $A \leq_m \overline{A}$.

Bew.: Da $\emptyset \neq A \neq \mathbb{N}$, existieren $x_0, x_1 \in \mathbb{N}$ mit $x_0 \notin A$ und $x_1 \in A$.
Sei nun $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch
$$f(x) = \chi_A(x) \cdot c_{x_0}^{(1)}(x) + \chi_{\overline{A}}^{(1)}(x) \cdot c_{x_1}^{1}(x) = \begin{cases} x_0 & x \in A \\ x_1 & x \notin A \end{cases}$$
für alle $x \in \mathbb{N}$. Hier bezeichnet $c_{x_0}^{(1)}$ die einstellige konstante Funktion, die für alle $x \in \mathbb{N}$ den Wert x_0 liefert (siehe Beispiel 6.4).
Es gilt $f \in \mathcal{R}(\mathbb{N})$, da χ_A und damit auch $\chi_{\overline{A}} \in \mathcal{R}(\mathbb{N})$, und $\mathcal{R}(\mathbb{N})$ abgeschlossen ist bezüglich endlicher Fallunterscheidung.

Fallunterscheidung: (1) $x \in A$: $f(x) = x_0 \notin A$, d.h. $f(x) \in \overline{A}$.
(2) $x \notin A$: $f(x) = x_1 \in A$ oder $f(x) \notin \overline{A}$.

Mit anderen Worten: $x \in A$ gdw. $f(x) \in \overline{A}$, also gilt $A \leq_m \bar{}(A)$.

∎

ad (2):

Sei $A = \{p \in \mathbb{N} : \varphi_p \;\text{ total}\}$.

<u>Beh.</u>: $A \not\leq_m \overline{A}$.

<u>Bew.</u>: Ann.: $A \leq_m \overline{A}$.

Also gibt es $f \in \mathcal{R}(\mathbb{N})$ mit

$$x \in A \text{ gdw } f(x) \in \overline{A}$$

für alle $x \in \mathbb{N}$, d.h. es gibt $f \in \mathcal{R}(\mathbb{N})$ mit

$$\varphi_x \text{ total gdw } \varphi_{f(x)} \text{ nicht total}$$

für alle $x \in \mathbb{N}$.

Da $f \in \mathcal{R}(\mathbb{N})$ gibt es nach dem Fixpunktsatz ein $p \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_p = \varphi_{f(p)}$.
Es gilt φ_p total gdw. $\varphi_{f(p)}$ nicht total, aber nach FPS gilt $\varphi_p = \varphi_{f(p)}$. Widerspruch.

Also gilt: $A \not\leq_m \overline{A}$.

Informationen zur Vorlesung:
http://www-madlener.informatik.uni-kl.de/ag-madlener/teaching/ss2005/gdp/gdp.html