Grundlagen der Programmierung

SS 05
Prof. Dr. K. Madlener
Übungsblatt 9

Aufgabe 9.1. Beweisen oder widerlegen Sie:

(1) $A = \{p \in \mathbb{N} : \mathrm{im}(\varphi_p) = \emptyset\}$ ist rekursiv aufzählbar.
(2) $B = \{p \in \mathbb{N} : \varphi_p^{(1)} \in \mathcal{R}_p(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{R}(\mathbb{N})\}$ ist rekursiv aufzählbar.
(3) $C = \{y \in \mathbb{N} : y \in \mathrm{im}(f)\}$ für ein $f \in \mathcal{R}_p(\mathbb{N})$ ist rekursiv aufzählbar, bzw. rekursiv entscheidbar.

Aufgabe 9.2.

(1) Sei $K = \{a \in \mathbb{N} \,:\, \varphi_a(a)\downarrow\}$. Finden Sie einen Index m mit der Eigenschaft:

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} 1 & x = m \\ \uparrow & \text{sonst} \end{cases}$$

Beachten Sie, dass $m \in K$ gilt.

(2) Sei $K = \{a \in \mathbb{N} \,:\, \varphi_a(a)\downarrow\}$ und

$$K' = \{b \in \mathbb{N} \,:\, \text{es gibt } a \in K \text{ mit } \varphi_b = \varphi_a\}$$

Zeigen Sie: $K \neq K'$.

Aufgabe 9.3. Zeigen Sie: Es gibt Funktionen $f, g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $f, g \in \mathcal{R}_p(\mathbb{N})$, so dass

$$D_{f(x,y)} = D_x \cap D_y \text{ und}$$
$$D_{g(x,y)} = D_x \cup D_y$$

gilt, wobei $D_z = \mathrm{dom}(\varphi_z)$.

Aufgabe 9.4. Zeigen Sie, dass die Addition $\_ + \_ : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ Turing-berechenbar ist (Definition 6.84). Geben Sie hierfür eine TM an, die die Addition zweier unär codierter Zahlen mit Hilfe der Vorgängerfunktion (Beispiel 6.85) durchführt.

Informationen zur Vorlesung:
http://www-madlener.informatik.uni-kl.de/ag-madlener/teaching/ss2005/gdp/gdp.html