Grundlagen der Programmierung

SS 05
Prof. Dr. K. Madlener
Lösungshinweise zu Übungsblatt 9

Aufgabe 9.1. (1) $A = \{p \in \mathbb{N} : \mathrm{im}(\varphi_p) = \emptyset\} = \{p \in \mathbb{N} : \mathrm{dom}(\varphi_p) = \emptyset\}$
A ist nach 6.76 nicht rekursiv aufzählbar.
Alternative: Das Komplement von A ist rekursiv aufzählbar (warum ?), aber nach dem Satz von Rice unentscheidbar (beachte: A Indexmenge), also kann die Menge selbst nicht rekursiv aufzählbar sein (verwende Lemma 6.57).

(2) Sei $f \in \mathcal{R}_p(\mathbb{N})$ eine totale μ-rekursive Funktion. A ist eine Indexmenge. Da alle endlichen Restriktionen von f in $\hat{A}$ sind, aber f selbst nicht, folgt mit dem Satz von Rice-Sharpio, dass A nicht rekursiv aufzählbar ist.

(3) Sei $f \in \mathcal{R}_p(\mathbb{N})$.
Beh.: C ist rekursiv aufzählbar.
Bew.: Sei $a \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_a = f$. Sei $G = \{(t, x, y) : \Phi_a(y) \leq t \wedge y = \varphi_a(x)\}$. G ist eine entscheidbare Relation, da nach 6.53 die Relation BBER (Beschränkte Berechenbarkeit) primitiv rekursiv ist. Also ist die Relation

$$H = \{y \in \mathbb{N} : \exists t \exists x (Gtxy)\}$$

rekursiv aufzählbar, da die rekursiv aufzählbaren Relationen abgeschlossen bzgl. existentieller Quantifizierung sind (siehe 6.62). Da $C = H$, ist damit C rek. aufzählbar.
C ist im Allgemeinen nicht entscheidbar. Sei dazu

$$f(x) = \begin{cases} x & \varphi_x(x) \downarrow \\ \uparrow & \text{sonst} \end{cases}$$

f ist berechenbar, da K rekursiv aufzählbar ist. Es gilt: $y \in im(f) \Leftrightarrow \varphi_y(y) \downarrow$. Wäre C entscheidbar, wäre auch das Halteproblem entscheidbar.

Aufgabe 9.2. Sei $K = \{a \in \mathbb{N} | \varphi_a^{(1)}(a) \downarrow\}$ und $K' = \{b \in \mathbb{N} :$ es gibt $a \in K$ mit $\varphi_b = \varphi_a\}$

(1) Sei $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$,
$f(x, y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ \uparrow & \text{sonst} \end{cases}$ f.a. $x, y \in \mathbb{N}$
$\to \ f \in \mathcal{R}_p(\mathbb{N})$
$\to$ es gibt $p \in \mathbb{N}$ mit $f = \varphi_p^{(2)}$.
$\to$ es gibt $h \in \mathcal{P}^{(1)}(\mathbb{N})$ mit $f(x, y) = \varphi_p^{(2)}(x, y) = \varphi_{h(y)}^{(1)}(x)$ f.a. $x, y \in \mathbb{N}$. (wg. s-m-n Theorem mit $h(y) = s_{1,1}(p, y)$)
Nach dem Fixpunktsatz gibt es $m \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_{h(m)}^{(1)} = \varphi_m^{(1)}$.
$\to \ \varphi_m^{(1)}(x) = \varphi_{h(m)}^{(1)}(x) = f(x, m) = \begin{cases} 1 & x = m \\ \uparrow & \text{sonst} \end{cases}$

f.a. $x \in \mathbb{N}$.
Es gilt: $m \in K$(da $\varphi_m^{(1)}(m) \downarrow$).

(2) Sei $m' \in \mathbb{K}'$ mit $m' \neq m$ wobei m aus Aufgabenteil (1), und $\varphi_{m'}^{(1)} = \varphi_m^{(1)}$. So ein m' muss es geben, da die Indexmenge $\{a \in \mathbb{N} | \varphi_a = \varphi_m\}$ nach Satz von Rice nicht entscheidbar ist. Bestünde sie nur aus einem Element, wäre sie endlich und damit entscheidbar.
(Beispiel für ein solches m': $m' =< \mathit{code}(V_j := 0);\ m >$ mit V_j Variable, die nicht in m auftritt).
$\rightarrow\ \varphi_{m'}^{(1)}(m') = \varphi_m^{(1)}(m') \uparrow$, da $m' \neq m \ \rightarrow\ m' \notin K$.

Aufgabe 9.3. Betrachte zunächst $D_x \cap D_y$. Nach Vorraussetzung sind die Mengen D_x und D_y rekursiv aufzählbar, da $D_x = \mathrm{dom}(\varphi_x)$ und $D_y = \mathrm{dom}(\varphi_y)$. Wir betrachten die Zeitkomplexität ϕ für beliebiges $a \in \mathbb{N}$ und zwei Werte $t_1, t_2 \in \mathbb{N}$. Wegen der rekursiven Aufzählbarkeit von D_x und D_y ist nach Lemma 6.53 die folgende Relation entscheidbar:
$\{(x, y, a, t_1, t_2) \in \mathbb{N}^5 : \phi^{(1)}(x, a) \leq t_1 \wedge \phi^{(1)}(y, a) \leq t_2\}$
Dann folgt mit Lemma 6.62, dass die Existenzquantifizierung bzgl. t_1 und t_2 rekursiv aufzählbar ist, d.h. es gibt eine berechenbare Funktion, die genau dann definiert ist, wenn es für eine Eingabe a entsprechende t_1 und t_2 gibt, die die Zeitkomplexität beschränken. Dies ist genau dann der Fall, wenn φ_x und φ_y auf a definiert sind. Also gibt es einen Index $b \in \mathbb{N}$ mit:
$\varphi_b^{(3)}(a, x, y) \downarrow \Leftrightarrow \varphi_x^{(1)}(a) \downarrow \wedge \varphi_y^{(1)}(a) \downarrow$
Nach dem s-m-n-Theorem gibt es eine primitiv rekursive Funktion $s_{2,1} : \mathbb{N}^3 \longrightarrow \mathbb{N}$ mit: $\varphi_b^{(3)}(a, x, y) = \varphi_{s_{2,1}(b,x,y)}^{(1)}(a)$.
Definiere also eine Funktion f:
$f(x, y) = s_{2,1}(b, x, y)$
$\rightsquigarrow \varphi_{f(x,y)}^{(1)}(a) \downarrow \Leftrightarrow \varphi_x^{(1)}(a) \downarrow \wedge \varphi_y^{(1)}(a) \downarrow$
$\rightsquigarrow D_{f(x,y)} = D_x \cap D_y$ und $f \in \mathcal{R}_p(\mathbb{N})$.

Analog folgt der Beweis für $D_x \cup D_y$.

Aufgabe 9.4. Idee: $\$\ |^x\ \$\ |^y\ \$\ \rightsquigarrow\ \$\ |^x\ |\ |^y\ \$ = \$\ |^{x+y+1}\ \$$, $x + y = v(x + y + 1)$

$\Sigma = \{|, \$\}$, $\Gamma = \{|, \$, \Box\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_{v_0}, q_{v_1}, q_{v_2}\}$, $F = \{q_3\}$

δ	$\vert$	$\$$	$\Box$
q_0		$(q_1,\ \$,\ \mathrm{R})$	
q_1	$(q_1,\ \vert,\ \mathrm{R})$	$(q_2,\ \vert,\ \mathrm{L})$	
q_2	$(q_2,\ \vert,\ \mathrm{L})$	$(q_{v_0},\ \$,\ \mathrm{S})$	
q_{v_0}		$(q_{v_1},\ \Box,\ \mathrm{R})$	
q_{v_1}	$(q_3,\ \$,\ \mathrm{S})$	$(q_{v_2},\ \$,\ \mathrm{L})$	
q_{v_2}			$(q_3,\ \$,\ \mathrm{S})$

Die Maschine ersetzt zunächst im Zustand q_1 das \$-Zeichen zwischen x und y. Anschließend wird im Zustand q_2 der Kopf in die Ausgangsposition zurückbewegt. Damit ist $x + y + 1$

berechnet, was dann durch das “Unterprogramm” aus den Zuständen q_{v_0} bis q_{v_2} in $v(x + y + 1) = x + y$ überführt wird.

Informationen zur Vorlesung:
http://www-madlener.informatik.uni-kl.de/ag-madlener/teaching/ss2005/gdp/gdp.html