

**1. Aufgabe: Ringe und Körper** Wir wollen einige einfache Sätze zeigen:

- a) Sei  $R$  ein Integritätsbereich, ferner seien  $a, b \in R^*$  (die Menge der von 0 verschiedenen Elemente von  $R$ ). Es sind  $a$  und  $b$  genau dann assoziiert, wenn es ein  $u \in E(R)$  (die Einheitengruppe von  $R$ ) mit  $a = ub$  gibt.
- b) Sei  $R$  ein euklidischer Ring und sei  $I$  ein Ideal von  $R$ . Ist  $0 \neq a \in I$ , so ist genau dann  $I = aR$ , wenn  $v(a) \leq v(b)$  für alle  $b \in I \setminus \{0\}$  ist (wobei  $v$  die Bewertungsfunktion von  $R$  sei).  
Zeigen Sie, dass weiter folgt, dass  $R$  ein Hauptidealring ist (d. h., dass alle Ideale von  $R$  Hauptideale sind).
- c) Ist  $K$  ein Körper, so ist  $K[x]$  ein euklidischer Ring.
- d) Ist  $K$  ein Körper und  $L$  eine Erweiterung von  $K$  (also ein Körper, der  $K$  als Teilkörper enthält), ist weiter  $f \in K[x]$  und  $\ell \in L$  eine Nullstelle von  $f$ , so ist  $f$  in  $L[x]$  durch  $x - \ell$  teilbar.

**2. Aufgabe: Polynomdivision** Wir untersuchen die Laufzeit der klassischen Polynomdivision mit Rest. Gegeben sei folgender Algorithmus:

**function** POLYQUOREM( $a, b$ )

$a = \sum_{0 \leq i \leq n} a_i x^i, b = \sum_{0 \leq i \leq m} b_i x^i \in R[x], R$  ist ein kommutativer Ring

mit 1, alle  $a_i, b_i \in R, b_m$  ist eine Einheit in  $R$  und  $n \geq m \geq 0$ .

Ausgabe:  $q, r \in R[x]$  mit  $a = qb + r$  und  $\deg r < m$  oder  $r = 0$ .

$r \leftarrow a$

**for**  $i \leftarrow n - m, n - m - 1, \dots, 0$  **do**

**if**  $\deg(r) = m + i$  **then**

$q_i \leftarrow \text{lc}(r)/b_m; r \leftarrow r - q_i x^i b$

**else**  $q_i \leftarrow 0$

**end if**

**end for**

**return**  $q = \sum_{0 \leq i \leq n-m} q_i x^i$  und  $r$

**end function**

Nehmen Sie an, dass ein Polynom  $p = \sum_{0 \leq i \leq k} p_i x^i$  vom Grad  $k$  durch eine dichte Darstellung gegeben sei, d. h. im Wesentlichen durch einen Koeffizientenvektor  $\vec{p} = (p_0, \dots, p_k)$ . Geben Sie die Laufzeit, gemessen in der Anzahl von Ringoperationen in  $R$ , im schlechtesten Fall in Abhängigkeit von  $n$  und  $m$  an. Sind  $q$  und  $r$  im Allgemeinen eindeutig? Beweis!

**3. Aufgabe: Diophantische Gleichungen** Gibt es  $s, t \in \mathbb{Z}$ , so dass  $24s + 14t = 1$  bzw. so dass  $61s + 37t = 56$ ? Geben Sie jeweils alle möglichen Lösungen an.

Zeigen Sie allgemeiner: Die lineare diophantische Gleichung  $ax + by = c$  mit  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  ist genau dann (in  $\mathbb{Z}$ ) lösbar, wenn für  $d = \text{GGT}(a, b)$  gilt:  $d|c$ . Ist in diesem Fall  $(x_0, y_0)$  eine spezielle Lösung, dann ist

$$\{(x_0 + k \cdot \frac{b}{d}, y_0 - k \cdot \frac{a}{d} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

die Menge alle Lösungen. (Was bedeutet eigentlich die Schreibweise  $\frac{a}{d}$  in diesem Zusammenhang?)

#### 4. Aufgabe: GGT

a) Berechnen Sie größte gemeinsame Teiler von  $f = x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x + 1$  und  $g = x^3 + x^2 + x + 1$  ( $f, g \in \mathbb{Z}_p[x]$ ) für  $p = 3$  sowie  $p = 5$ . Berechnen Sie jeweils auch Polynome  $s$  und  $t$  mit  $\text{ggT}(f, g) = sf + tg$ .

b) Wir betrachten den folgenden ggT-Algorithmus nach J. Stein (war möglicherweise aber schon im antiken China bekannt):

```

1: function BINARYGCD( $u, v \in \mathbb{N}^+$ )                                ▷ Returns the g.c.d of  $u$  and  $v$ 
2:    $g \leftarrow 1$ 
3:   while ( $u \bmod 2 = 0$ )  $\wedge$  ( $v \bmod 2 = 0$ ) do
4:      $u \leftarrow u/2; v \leftarrow v/2; g \leftarrow 2g$ 
5:   end while
6:   while ( $u \neq 0$ ) do
7:     if ( $u \bmod 2 = 0$ ) then
8:        $u \leftarrow u/2$ 
9:     else if ( $v \bmod 2 = 0$ ) then
10:       $v \leftarrow v/2$ 
11:    else
12:       $t \leftarrow |u - v|/2$ 
13:      if  $u \geq v$  then
14:         $u \leftarrow t$ 
15:      else
16:         $v \leftarrow t$ 
17:      end if
18:    end if
19:  end while
20:  return  $g \cdot v$ 
21: end function

```

Zeigen Sie, dass dieser Algorithmus tatsächlich für Eingaben  $u, v \in \mathbb{N}^+$  den Wert  $\text{ggT}(u, v)$  berechnet, und zwar mit  $O((\lambda(uv))^2)$  Bitoperationen im schlechtesten Fall. Dafür nehmen wir an, dass Zahlen aus  $\mathbb{N}^+$  in Binärdarstellung gegeben sind und  $\lambda(x)$  die Länge der Binärdarstellung (ohne führende Nullen) von  $x$  bezeichnet. Zeigen Sie abschließend, dass im schlechtesten Fall  $O(\lambda(u)\lambda(v))$  Bitoperationen *nicht* ausreichen.