44. Aufgabe: Zeigen Sie:

a) Wenn $s, t \in T[X]$ und $s|t$, dann ist $s \leq t$ für jede Termordnung $<$ auf $T[X]$.

b) Sei R ein Integritätsbereich und $f, g \in R[X]$ mit $f, g \neq 0$. Dann gelten (i) $\mathrm{lt}(fg) = \mathrm{lt}(f) \cdot \mathrm{lt}(g)$, (ii) $\mathrm{lm}(fg) = \mathrm{lm}(f) \cdot \mathrm{lm}(g)$, (iii) $\mathrm{lc}(fg) = \mathrm{lc}(f) \cdot \mathrm{lc}(g)$ und (iv) $\mathrm{lt}(f+g) \leq \max\{\mathrm{lt}(f), \mathrm{lt}(g)\}$ für eine beliebige Termordnung $<$ auf $T[X]$.

45. Aufgabe: Zeigen Sie: Ist K ein Körper, $F \subseteq K[X]$, so gilt:

a) Sei $g_1, g_2, h \in K[X]$. Wenn $g_1 \longrightarrow_F g_2$, dann $g_1 + h \downarrow_F^* g_2 + h$.

b) Die Idealkongruenz modulo $\langle F \rangle$ ist die reflexiv-transitiv-symmetrische Hülle von $\longrightarrow_F$, d. h. $\equiv_{\langle F \rangle} = \longleftrightarrow_F^*$

46. Aufgabe: Wir betrachten eine wichtige Klasse von Termordnungen bzw. von Ordnungen ihrer Exponentenvektoren, die *Gewichtsordnungen.*

Sei dazu $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{N}^n$ und $>_\sigma$ eine zulässige Ordnung auf $\mathbb{N}^n$. Definiere dann für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$: $\alpha >_{u,\sigma} \beta$ genau dann, wenn

$$u \cdot \alpha > u \cdot \beta \quad \text{oder} \quad u \cdot \alpha = u \cdot \beta \text{ und } \alpha >_\sigma \beta.$$

Dabei ist $\cdot$ das Standardskalarprodukt. Wir nennen dann $>_{u,\sigma}$ die *durch u und $>_\sigma$ induzierte Gewichtsordnung.*

1. Zeigen Sie, dass $>_{u,\sigma}$ eine zulässige Termordnung ist.
2. Finden Sie ein $u \in \mathbb{N}^n$, so dass $>_{u,\mathrm{lex}}$ die graduierte lexikographische Ordnung ist.
3. In der Definition von $>_{u,\sigma}$ wird $>_\sigma$ benötigt, um „Unentschieden“ zu vermeiden. Es stellt sich heraus, dass solche Unentschieden tatsächlich auftreten. Zeigen Sie dazu:

   Für gegebenes $u \in \mathbb{N}^n$ gibt es $\alpha \neq \beta$ in $\mathbb{N}^n$, so dass $u \cdot \alpha = u \cdot \beta$.
4. Ein nützliches Beispiel einer Gewichtsordnung ist die *Eliminationsordnung.* Fixiere dazu ein $1 \leq i \leq n$ und setze $u = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ mit i Einsen und $n - i$ Nullen. Die *i-te Eliminationsordnung* $>_i$ ist dann die Gewichtsordnung $>_{u,degrevlex}$. Zeigen Sie, dass $>_i$ die folgende Eigenschaft hat:

   Wenn x^α ein Monom ist, in dem eine der Variablen $x_1, \ldots, x_i$ vorkommt, dann gilt $x^\alpha >_i x^\beta$ für alle Monome x^β, in denen nur die Variablen $x_{i+1}, \ldots s, x_n$ vorkommen.

47. Aufgabe: Zeigen Sie, dass die Menge B, die im Beweis von Dickson's Lemma erzeugt wird, die bezüglich Inklusion kleinste Menge mit der Eigenschaft $\langle x^A \rangle = \langle x^B \rangle$ ist.