SS 2007 18. April 2007

Übungen zur Vorlesung Logik

Prof. Dr. Klaus Madlener Blatt 1

1. Aufgabe: [4P, Beziehung zwischen umgangssprachlicher und formaler Logik]
Versuchen Sie folgende umgangssprachliche Aussagen in Formeln der Aussagenlogik zu übertragen.

1. „Wasser läuft den Berg hinab."
2. „Wenn es um den Sitzplatz geht, das Alter sitzt, die Jugend steht!"
3. „Wer Banknoten nachmacht oder verfälscht oder nachgemachte oder verfälschte sich verschafft und in Verkehr bringt, wird mit Freiheitsstrafe nicht unter zwei Jahren bestraft."
4. „Wenn Johann weniger Fast-Food isst, nimmt er ab."
5. „William Shakespeare schrieb 'Moby Dick' und Paris ist die Hauptstadt von Spanien oder Katzen jagen Mäuse."
6. „Dieser Satz hat neun Wörter oder er ist leer."
7. „Dieser Satz kein Verb."

Welche dieser Aussagen sind „wahr", welche „falsch"? Diskutieren Sie kurz die auftretenden Probleme.
Beispiel: Um die Aussage „Wenn ich nicht zu hause bin, kannst du mich über Mobilfunk erreichen." zu formalisieren, kann man zwei Atome

- $A \equiv$ „Ich bin zu hause." und
- $B \equiv$ „Du kannst mich über Mobilfunk erreichen."

definieren. Die obige Aussage lässt sich dann durch die Formel $(\neg A) \rightarrow B$ repräsentieren. Diese Aussage ist falsch. (Wer ist mit „Ich" und „Du" gemeint?)

2. Aufgabe: [3P, Beziehung zwischen umgangssprachlicher und formaler Logik]
„Worin besteht das Geheimnis Ihres langen Lebens?" wurde ein 100-jähriger gefragt. „Ich halte mich streng an die folgenden Diätregeln: Wenn ich kein Bier zu der Mahlzeit trinke, dann habe ich immer Fisch. Immer wenn ich Fisch und Bier zusammen habe, verzichte ich auf Eiscreme. Wenn ich Eiscreme habe oder Bier meide, rühre ich Fisch nicht an.", antwortete er. Der Fragesteller fand diesen Ratschlag ziemlich verwirrend.

Formalisieren Sie den Diätplan mit Aussageformen und versuchen Sie eine weniger verwirrende Formulierung zu finden.

3. Aufgabe: [4P, strukturelle Induktion]
Beweisen Sie folgende Sätze aus der Vorlesung mit struktureller Induktion über den Aufbau der Aussageformen:

1. Für $A \in F$ gilt: Die Anzahl der Vorkommen von „(“ ist gleich der Anzahl der Vorkommen von „)“ und ist gleich der Summe der Vorkommen von $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$.

2. Sei n die Anzahl der Operatoren von $A \in F$. Dann ist die Anzahl der atomaren Formen in A höchstens $n + 1$.

Wie würde man die Aussagen ohne strukturelle Induktion mit vollständiger Induktion über $\mathbb{N}$ beweisen?

4. Aufgabe: [7P, Syntaktische Eindeutigkeit und Semantik]
Sei $A_0 \subset \mathbb{N}$ eine endliche Menge natürlicher Zahlen. Wir definieren folgende Mengen von Ausdrücken

$$A_{i+1} = A_i \cup \{a + b, a * b \mid a, b \in A_i\} \text{ für } i \in \mathbb{N} \text{ und } A = \cup_{i \in \mathbb{N}} A_i.$$

1. Beweisen oder widerlegen Sie: Die Ausdrücke in A_i enthalten höchstens i Operatorsymbole $+, *$.

2. Geben Sie A für $A_0 = \{0, 1, 2, 4\}$ an.

3. Zeigen Sie: A ist abgeschlossen bezüglich $+$ und $*$. (D.h. für $a_1, a_2 \in A$ gilt $a_1 + a_2, a_1 * a_2 \in A$).

4. Zeigen Sie: A ist die kleinste Menge von Ausdrücken, die A_0 enthält und abgeschlossen bezüglich $+$ und $*$ ist.

5. Beweisen oder widerlegen Sie: Jedes Element aus A ist entweder aus A_0 oder lässt sich auf eindeutige Weise aus zwei anderen Elementen aus A mit einem Operator $*$ oder $+$ gewinnen.

6. Seien $+_{\mathbb{N}}, \cdot_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Addition, bzw. die Multiplikation auf den natürlichen Zahlen. Wir definieren eine Auswertungsfunktion (Semantik) $\phi : A \to \mathbb{N}$ für die Elemente von A wie folgt:

   $$\phi(a) = a, \text{ falls } a \in A_0, \phi(a + b) = \phi(a) +_{\mathbb{N}} \phi(b), \phi(a * b) = \phi(a) \cdot_{\mathbb{N}} \phi(b), \text{ für } a, b \in A$$

   Beweisen oder widerlegen Sie: ϕ ist wohldefiniert, d.h. ϕ hat genau einen definierten Wert für jeden arithmetischen Ausdruck aus A.

7. Diskutieren Sie alternative Definitionen von A und ϕ.

Abgabe: bis 25. April 2007 10:00 Uhr im 4. Stock, Gebäude 34