

## Übungen zur Vorlesung Logik

Prof. Dr. Klaus Madlener

Blatt 2

**5. Aufgabe:** [Substitution, 4P]

Seien  $A, B, C \in F$ . Ferner sei  $A \models B$  und  $A$  ein Teilterm von  $C$ .

Beweisen Sie: Entsteht  $C'$  aus  $C$  durch Ersetzen ein oder mehrerer Vorkommen von  $A$  durch  $B$ , so gilt  $C \models C'$ .

**6. Aufgabe:** [logische Äquivalenz, 2P]

Seien  $A, B \in F$ . Zeigen Sie: Genau dann gilt  $A \models B$ , wenn  $f_A = f_B$  ist.

**7. Aufgabe:** [vollständige Operatormengen, 8P]

Es sei  $OP$  eine Menge von Operatoren. Die Menge  $F(OP)$  der Formeln in den Operatoren aus  $OP$  ist definiert durch:

1.  $V \subseteq F(OP)$ .
2. Ist  $A \in F(OP)$ , und ist  $\# \in OP$  ein einstelliger Operator, so ist  $(\#A) \in F(OP)$ .
3. Sind  $A, B \in F(OP)$ , und ist  $\star \in OP$  ein zweistelliger Operator, so ist  $(A \star B) \in F(OP)$ .
4. Sind  $A_1, \dots, A_n \in F(OP)$ , und ist  $\star \in OP$  ein  $n$ -stelliger Operator ( $n \geq 3$ ), so ist  $(\star A_1 \dots A_n) \in F(OP)$ .
5.  $F(OP)$  ist die kleinste Menge mit diesen Eigenschaften.

Zeigen Sie, dass folgende Aussagen über  $OP$  äquivalent sind:

1.  $OP$  ist eine vollständige Operatormenge.
2. Für alle  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  und alle Funktionen  $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$  gibt es ein  $A \in F(OP)$  mit  $f = f_A$ .
3. Für alle Funktionen  $f : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}$  gibt es ein  $A \in F(OP)$  mit  $f = f_A$ .

**8. Aufgabe:** [vollständige Operatormengen, 4P]

Geben Sie einen zweistelligen Operator  $\star$  an, so dass  $\{\star\}$  vollständig ist.

**9. Aufgabe:** [logische Äquivalenz von Mengen, 6P]

$X \subseteq F$  und  $Y \subseteq F$  heißen *logisch äquivalent* mit der Schreibweise  $X \models Y$ , falls  $\text{Folg}(X) = \text{Folg}(Y)$  gilt.

$X \subseteq F$  heißt *unabhängig*, falls für kein  $A \in X$  die Aussageform  $A$  logisch aus  $X \setminus \{A\}$  folgt, d.h. es gibt kein  $A \in X$  mit  $X \setminus \{A\} \models A$ .

Zeigen Sie:

1. Es gibt einen Algorithmus, der zu einer endlichen Menge  $X \subseteq F$  eine logisch äquivalente unabhängige Teilmenge  $Y \subseteq X$  bestimmt.
2. Es gibt eine Menge  $X \subseteq F$ , die keine logisch äquivalente unabhängige Teilmenge  $Y \subseteq X$  enthält.

**Abgabe: bis 2. Mai 2007, 10:00 Uhr, im Kasten neben Raum 34/401.4**