Übungen zur Vorlesung Logik

Prof. Dr. Klaus Madlener Blatt 6

18. Aufgabe: [Tableaux, ohne Punkte zum Üben]
In Aufgabe 2 wurde ein Diätplan durch die Aussageform

$$A \equiv (\neg B \rightarrow F) \wedge (((B \wedge F) \rightarrow \neg E) \wedge ((E \vee \neg B) \rightarrow \neg F))$$

dargestellt. Konstruieren Sie für A ein vollständiges Tableau. Welche Eigenschaften von A kann man dem Tableaux ansehen? Stellen Sie mit Hilfe des Tableau eine Disjunktive Normalform für A auf.

19. Aufgabe: [Tableauxfolgerung, $7 + 6$ P]
Zeigen Sie

1. $(A \wedge \neg B) \vdash_\tau \neg((\neg A) \wedge (\neg B))$
2. $(A \wedge (A \rightarrow B)) \vdash_\tau B$
3. $A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash_\tau (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$

20. Aufgabe: [Kompaktheitssatz, $3 + 3$ P]

1. Zeigen Sie, dass es für eine Menge von Formeln Σ und eine Formel A genau dann ein abgeschlossenes Tableau für $\Sigma \cup \{\neg A\}$ gibt, wenn es für eine endliche Teilmenge $\Gamma \subset \Sigma$ ein abgeschlossenes Tableau für $\Gamma \cup \{\neg A\}$ gibt.
2. Zeigen Sie, dass 1. äquivalent zum Kompaktheitssatz der Aussagenlogik ist unter der Voraussetzung, dass $\Sigma \vdash_\tau A$ und $\Sigma \models A$ äquivalent sind.

Hinweis: Benutzen Sie das Lemma von König, das Ihnen aus anderen Veranstaltungen bekannt sein sollte. Suchen Sie ggf. mit den Stichworten Lemma und König im Internet.

21. Aufgabe: [Tableaux mit Äquivalenz, $4 + 1$ P]

1. In der Vorlesung wurden Tableaux für Aussageformen $A \in F$ definiert. Man kann aber auch Tableaux für $A \in F(\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\})$ definieren. Ist $A \equiv B \leftrightarrow C$ dann eine α- oder β-Formel und welche Komponenten hat diese Aussageform?

2. Wie würde man bei beliebigen anderen weiteren Operatoren verfahren?

22. Aufgabe: [Duale Formeln, 5P]
Es sei $A \in F(\{\neg, \vee, \wedge\})$ und $d(A)$ die duale Formel von A. Ferner sei φ eine Bewertung und φ' die durch $\varphi'(p) := 1 - \varphi(p)$ für alle $p \in V$ definierte Bewertung. Zeigen Sie $\varphi'(d(A)) = 1 - \varphi(A)$.

23. Aufgabe: [Klauselform, ohne Punkte zum selbst Üben]
Bringen Sie die Aussageform

$$A \equiv (\neg B \to F) \wedge (((B \wedge F) \to \neg E) \wedge ((E \vee \neg B) \to \neg F))$$

in Konjunktive Normalform (KNF), das heißt, finden sie eine logisch äquivalente Formel A' in Konjunktiver Normalform. $(B, E, F \in V)$

24. Aufgabe: [Größe von Normalformen, $4 + 10$ P]
Folgendes sollte aus anderen Veranstaltungen bekannt sein: Seien $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Dann ist $\mathrm{O}(f) := \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \exists \epsilon \in \mathbb{R}_+, \exists n_0 \forall n > n_0 : g(n) \leq \epsilon f(n)\}$
Sei für eine Formel $A \in F$ die Länge $|A|$ definiert als die Anzahl der Vorkommen von Atomen, d.h. Variablen.
Zeigen Sie:

1. Zu jeder Formel $A \in F$ gibt es eine logisch äquivalente Formel $B \in F(\{\neg \vee, \wedge\})$ in NNF mit $|B| \in \mathrm{O}(|A|)$.
2. Zu jeder Formel $A \in F$ gibt es eine logisch äquivalente Formel B in KNF mit $|B| \in \mathrm{O}(2^{|A|})$.

Abgabe: bis 6. Juni 2007, 10:00 im Kasten neben Raum 34/401.4