

## Übungen zur Vorlesung Logik

Prof. Dr. Klaus Madlener

Blatt 9

**31. Aufgabe:** [Formel mit geg. Semantik, 3P]

Finden Sie eine Formel der Prädikatenlogik, die "Es gibt (mindestens) drei verschiedene  $x$ , so dass  $p(x)$  wahr ist" ausdrückt.

**32. Aufgabe:** [Interpretationen, 6P]

Definieren Sie eine Interpretation  $I$ , in der folgende Formeln gelten:

1.  $\exists x \forall y y + x = 0$ ,
2.  $\forall x \forall y \forall z x + (y + z) = (x + y) + z$ ,
3.  $\forall x \forall y (x + y = y + x) \rightarrow x = y$  und
4.  $\exists x x + 5 < x$ .

Hier sind 0 und 5 Individuenkonstanten, + ist eine zweistellige Funktionskonstante und < ist eine zweistellige Prädikatskonstante.

**33. Aufgabe:** [Allgemeingültigkeit, 6P]

Welche der folgenden prädikatenlogischen Formeln sind allgemeingültig?

1.  $(x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z$ ,
2.  $(x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z$ ,
3.  $\forall Q Q(x) \rightarrow \neg x = x$ ,
4.  $(p(x) \rightarrow q(x)) \rightarrow \forall x (p(x) \rightarrow q(x))$  und
5.  $\exists x (p(x) \rightarrow \forall y p(y))$ .

**34. Aufgabe:** [Semantische Folgerung, 5P]

Es sei  $A \in \text{Form}$ . Zeigen oder widerlegen Sie:

1. Es gilt  $\exists y \forall x A \models \forall x \exists y A$ .
2.  $\exists y \forall x A$  folgt logisch aus  $\forall x \exists y A$ .
3. Aus  $\forall x f(x) = g(x)$  folgt  $f = g$  logisch.

**35. Aufgabe:** [Substitution, 1P]

Finden Sie eine Formel  $A$ , ein Term  $t$  und eine Individuenvariable  $x$ , so dass die Substitution  $A_x[t]$  erlaubt ist,  $A_x[t]$  allgemeingültig ist, aber  $A$  nicht allgemeingültig ist.

**36. Aufgabe:** [Substitutionslemma, 10P]

Beweisen Sie das Substitutionslemma:

Sei  $A$  ein Term oder eine Formel,  $x$  eine Individuenvariable,  $t \in \text{Term}$  und  $A_x[t]$  eine erlaubte Substitution. Dann gilt für jede Interpretation  $I = (D, I_c, I_v)$ :

$$I(A_x[t]) = I^{x, I(t)}(A).$$

Insbesondere ist  $A_x[t]$  allgemeingültig, wenn  $A$  allgemeingültig ist.

Wo geht im Beweis ein, dass die Substitution erlaubt ist?

**Abgabe: bis Mittwoch, 2007-06-27 10:00 Uhr, im Kasten neben Raum 34/401.4**