

---

 Übungen zur Vorlesung Logik
 

---

Prof. Dr. Klaus Madlener

Blatt 10

**37. Aufgabe:** [Generalisierung, 5P]

Zeigen Sie die Gültigkeit des Generalisierungstheorems:

Es komme  $v \in \text{Var}$  in keiner Formel aus  $\Sigma \subseteq \text{Form}$  frei vor. Ferner sei  $A \in \text{Form}$ .

Genau dann gilt  $\Sigma \models A$ , wenn  $\Sigma \models \forall v A$  gilt.

**38. Aufgabe:** [PKNF, 5P]

Begründen Sie den 3. Schritt des PKNF-Verfahrens, indem Sie zeigen, dass zu jeder Formel  $A \in \text{Form}$  eine logisch äquivalente Formel  $A' \in \text{Form}$ , in der weder  $\rightarrow$  oder  $\leftrightarrow$  noch  $\text{if } \_ \text{ then } \_ \text{ else}$  oder  $\text{IF } \_ \text{ THEN } \_ \text{ ELSE}$  vorkommt, effektiv bestimmt werden kann.

**39. Aufgabe:** [Modelle, 4P]

Zeigen oder widerlegen Sie: Sei

$$M = \{ \forall x \forall y p(x, y) \vee p(y, x) \vee x = y, \\ \forall x \forall y \forall z (p(x, y) \wedge p(y, z)) \rightarrow p(x, z) \\ \forall x \neg p(x, x) \\ \exists x \forall y (\neg(x = y) \rightarrow p(x, y)) \\ \exists x \forall y (\neg(x = y) \rightarrow p(y, x)) \}$$

Dann ist jede Interpretation  $I$ , die  $M$  erfüllt, endlich.

**40. Aufgabe:** [Natürliche Zahlen, 3+3+4]

Betrachte Beispiel 3.12 von Folie 169, die Arithmetik der natürlichen Zahlen. Dort sind allquantifizierte Gleichungen  $l_i = r_i$  formuliert. Wir betrachten hier Gleichungen 3 bis 6 ohne die Quantoren.

1. Zeigen Sie, dass jeder Term  $t$  aus der Arithmetik, in dem  $+$  oder  $*$  vorkommt, einen Teilterm  $t_1$  hat, so dass es eine linke Seite  $l_j$  und eine (simultane) Substitution  $\sigma$  gibt mit  $\sigma(l_j) = t_1$ .
2. Skizzieren Sie einen Beweis für: Wenn das Vorkommen von  $\sigma(l_j)$  in  $t$  durch  $\sigma(r_j)$  ersetzt und so  $t'$  aus  $t$  erhalten wird, dann gilt für beliebige Interpretationen  $I(t) = I(t')$ .
3. Was ist der Term, den man aus  $(S(0) + S(0)) * (S(0))$  erhält, nachdem man solche Ersetzungsschritte, wie in der letzten Teilaufgabe betrachtet, so oft wie möglich angewendet hat.

**Abgabe: bis 4. Juli 2007, 10:00 Uhr im Kasten neben Raum 34/401.4**