

**33. Aufgabe:** Zeigen oder widerlegen Sie:

- Das Polynom  $x^{1000} + 2 \in \mathbb{Z}_5[x]$  ist quadratfrei.
- Sei  $F$  ein Körper und seien  $f, g \in F[x]$ . Dann ist der quadratfreie Anteil von  $fg$  das Produkt der quadratfreien Anteile von  $f$  und  $g$ .

Der quadratfreie Anteil eines Polynoms  $h = \prod_{1 \leq i \leq r} h_i^{e_i}$  ist dabei  $\prod_{1 \leq i \leq r} h_i$  (mit paarweise verschiedenen irreduziblen  $h_i$ ).

**34. Aufgabe:** Faktorisieren Sie das Polynom  $x^8 + x^7 + 2x^6 + 3x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 2x + 1$  mit der Distinct-Degree-Methode jeweils über  $\mathbb{Z}_7[x]$ ,  $\mathbb{Z}_{19}[x]$  und  $\mathbb{Z}_{23}[x]$ .

**35. Aufgabe:** Wie viele Faktoren hat  $a(x) = x^4 + 1 \in \mathbb{Z}_p[x]$  ( $p$  prim), wenn (i)  $p = 2$ , (ii)  $p \equiv 1 \pmod{8}$ , (iii)  $p \equiv 3 \pmod{8}$  bzw. (iv)  $p \equiv 5 \pmod{8}$ ?

**36. Aufgabe:** Machen Sie sich mit den Begriffen Sylvestermatrix und Resultante vertraut, z.B. Modern Computer Algebra, von zur Gathen, Kap. 6.3 S. 142-147, oder Algorithms for Computer Algebra, Geddes, Kap. 7.3, S. 285-288.

Zeigen Sie: Seien  $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ ,  $r = \text{res}(f, g) \in \mathbb{Z}$ , und  $u \in \mathbb{Z}$ . Dann gilt  $\text{ggT}(f(u), g(u)) \mid r$ .

**37. Aufgabe:** Sei  $p \in \mathbb{Z}$  prim und  $n > 1$ . Zeigen Sie die folgenden „pathologischen“ Eigenschaften von  $R = \mathbb{Z}_p^n[x]$  ( $f, g \in R$ ):

- Es gilt nicht notwendigerweise  $\deg fg = \deg f + \deg g$ .
- $R$  ist kein ZPE-Ring.
- Es ist  $\text{ggT}(f, g)$  nicht notwendigerweise als Linearkombination von  $f$  und  $g$  darstellbar.