

Übungen zur Vorlesung Logik

Prof. Dr. Klaus Madlener

Blatt 1

1. Aufgabe: [4P, Beziehung zwischen umgangssprachlicher und formaler Logik]

Versuchen Sie folgende umgangssprachliche Aussagen in Formeln der Aussagenlogik zu übertragen.

1. „Wasser läuft den Berg hinab.“
2. „Wenn es um den Sitzplatz geht, das Alter sitzt, die Jugend steht!“
3. „Wer Banknoten nachmacht oder verfälscht oder nachgemachte oder verfälschte sich verschafft und in Verkehr bringt, wird mit Freiheitsstrafe nicht unter zwei Jahren bestraft.“
4. „Wir wollen Ihnen nicht auf den Schlips treten, aber wenn wir Sie für über 18 halten, werden wir Ihren Ausweis nicht kontrollieren!“
5. „William Shakespeare schrieb ‘Moby Dick’ und Paris ist die Hauptstadt von Spanien oder Katzen jagen Mäuse.“
6. „Dieser Satz hat neun Wörter oder er ist leer.“
7. „Dieser Satz kein Verb.“

Welche dieser Aussagen sind „wahr“, welche „falsch“? Diskutieren Sie kurz die auftretenden Probleme.

Beispiel: Um die Aussage „Wenn ich nicht zu hause bin, kannst du mich über Mobilfunk erreichen.“ zu formalisieren, kann man zwei Atome

- $A \equiv$ „Ich bin zu hause.“ und
- $B \equiv$ „Du kannst mich über Mobilfunk erreichen.“

definieren. Die obige Aussage lässt sich dann durch die Formel $(\neg A) \rightarrow B$ repräsentieren. Diese Aussage ist falsch. (Wer ist mit „Ich“ und „Du“ gemeint?)

2. Aufgabe: [3P, Beziehung zwischen umgangssprachlicher und formaler Logik]

„Wenn man sorgfältig isst, hat man einen gesunden Verdauungsapparat. Wenn man sich regelmäßig sportlich betätigt, ist man fit. Wenn man einen gesunden Verdauungsapparat hat oder fit ist, wird man alt. Mr. X wurde nicht alt.“ Welche Schlüsse können Sie mit logischen Mitteln über die Aktivitäten von Mr. X ziehen?

3. Aufgabe: [4P, strukturelle Induktion]

Beweisen Sie folgende Sätze mit struktureller Induktion über den Aufbau der Aussageformen:

1. Für $A \in F$ gilt: Die Anzahl der Vorkommen von „(“ ist gleich der Anzahl der Vorkommen von „)“ und ist gleich der Summe der Vorkommen von $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow$ und \Leftrightarrow .
2. Sei n die Anzahl der atomaren Formen von $A \in F$. Dann ist die Anzahl der Operatoren in A mindestens $n - 1$.

Wie würde man die Aussagen ohne strukturelle Induktion mit vollständiger Induktion über \mathbb{N} beweisen?

4. Aufgabe: [7P, Syntaktische Eindeutigkeit und Semantik]

Sei $A_0 \subset \mathbb{N}$ eine endliche Menge natürlicher Zahlen. Wir definieren folgende Mengen von Ausdrücken

$$A_{i+1} = A_i \cup \{a + b, a * b \mid a, b \in A_i\} \text{ für } i \in \mathbb{N} \text{ und } A = \cup_{i \in \mathbb{N}} A_i.$$

1. Beweisen oder widerlegen Sie: Die Ausdrücke in A_i enthalten höchstens i Operatorsymbole $+, *$.
2. Geben Sie A für $A_0 = \{0, 1, 2, 4\}$ an.
3. Zeigen Sie: A ist abgeschlossen bezüglich $+$ und $*$. (D.h. für $a_1, a_2 \in A$ gilt $a_1 + a_2, a_1 * a_2 \in A$).
4. Zeigen Sie: A ist die kleinste Menge von Ausdrücken, die A_0 enthält und abgeschlossen bezüglich $+$ und $*$ ist.
5. Beweisen oder widerlegen Sie: Jedes Element aus A ist entweder aus A_0 oder lässt sich auf eindeutige Weise aus zwei anderen Elementen aus A mit einem Operator $*$ oder $+$ gewinnen.
6. Seien $+\mathbb{N}, \cdot\mathbb{N} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ die Addition, bzw. die Multiplikation auf den natürlichen Zahlen. Wir definieren eine Auswertungsfunktion (Semantik) $\phi : A \rightarrow \mathbb{N}$ für die Elemente von A wie folgt:

$$\phi(a) = a, \text{ falls } a \in A_0, \phi(a + b) = \phi(a) +_{\mathbb{N}} \phi(b), \phi(a * b) = \phi(a) \cdot_{\mathbb{N}} \phi(b), \text{ für } a, b \in A$$

Beweisen oder widerlegen Sie: ϕ ist wohldefiniert, d.h. ϕ hat genau einen definierten Wert für jeden arithmetischen Ausdruck aus A .

7. Diskutieren Sie alternative Definitionen von A und ϕ .

Abgabe: bis 15. April 2008 10:00 Uhr im Kasten neben Raum 34/401.4