

Übungen zur Vorlesung Logik

Prof. Dr. Klaus Madlener

Blatt 10

37. Aufgabe: [Term mit Eigenschaft, 3P]

Sei p zweistellige Prädikatskonstante einer Sprache der Prädikatenlogik. Wir betrachten nur Interpretationen, in denen p transitiv, antisymmetrisch, reflexiv und total ist, d.h. p definiert eine totale Ordnung und es gelten $\forall x \forall y \forall z (p(x, y) \wedge p(y, z)) \rightarrow p(x, z)$, $\forall x \forall y (p(x, y) \wedge p(y, x)) \rightarrow x = y$, $\forall x p(x, x)$, $\forall x \forall y p(x, y) \vee p(y, x)$.

Zeigen Sie, dass es für beliebige Terme t_1, t_2, t_3 in dieser Sprache einen Term t gibt, der in allen betrachteten Interpretationen den Wert des Minimums der Werte von t_1, t_2 und t_3 bezüglich der Interpretation von p hat.

38. Aufgabe: [PKNF, 5P]

Begründen Sie den 3. Schritt des PKNF-Verfahrens, indem Sie zeigen, dass zu jeder Formel $A \in \text{Form}$ eine logisch äquivalente Formel $A' \in \text{Form}$, in der weder \rightarrow oder \leftrightarrow noch $\text{if } _ \text{ then } _ \text{ else}$ oder $\text{IF } _ \text{ THEN } _ \text{ ELSE}$ vorkommt, effektiv bestimmt werden kann.

39. Aufgabe: [Modelle, 4P]

Sei $M = \{ \forall x \forall y p(x, y) \vee p(y, x) \vee x = y,$
 $\forall x \forall y \forall z (p(x, y) \wedge p(y, z)) \rightarrow p(x, z)$
 $\forall x \neg p(x, x)$
 $\exists w \forall x \forall y \forall z (p(x, y) \wedge p(y, z)) \rightarrow w = y \}$.

Zeigen oder widerlegen Sie: Jede Interpretation I , die M erfüllt, ist endlich.

40. Aufgabe: [Natürliche Zahlen, 3+3+4]

Betrachte Beispiel 3.12 von Folie 169, die Arithmetik der natürlichen Zahlen. Dort sind allquantifizierte Gleichungen $l_i = r_i$ formuliert. Wir betrachten hier Gleichungen 3 bis 6 ohne die Quantoren.

1. Zeigen Sie, dass jeder Term t aus der Arithmetik, in dem $+$ oder $*$ vorkommt, einen Teilterm t_1 hat, so dass es eine linke Seite l_j und eine (simultane) Substitution σ gibt mit $\sigma(l_j) = t_1$.
2. Skizzieren Sie einen Beweis für: Wenn das Vorkommen von $\sigma(l_j)$ in t durch $\sigma(r_j)$ ersetzt und so t' aus t erhalten wird, dann gilt für beliebige Interpretationen $I(t) = I(t')$.
3. Was ist der Term, den man aus $(S(0)) * (S(0) + S(0))$ erhält, nachdem man solche Ersetzungsschritte, wie in der letzten Teilaufgabe betrachtet, so oft wie möglich angewendet hat.

Abgabe: bis 2008-06-24, 10:00 Uhr im Kasten neben Raum 34/401.4