

Übungen zur Vorlesung Logik

Prof. Dr. Klaus Madlener

Blatt 11

41. Aufgabe: [F, ohne Punkte]Finden Sie einen Beweis im deduktiven System \mathcal{F} für folgende Formeln:

1. $\forall x A \rightarrow \forall y A_x[y]$, falls $A_x[y]$ eine erlaubte Substitution ist und y nicht frei in A vorkommt,
2. $\forall x (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B)$, falls x nicht frei in A vorkommt,
3. $\forall x \forall y A \rightarrow \forall x A_y[x]$, falls $A_y[x]$ eine erlaubte Substitution ist,
4. $\forall x A \rightarrow (\forall x (A \rightarrow B) \rightarrow \forall x B)$
5. $\forall x \forall y A \rightarrow (\forall x \forall y (A \rightarrow B) \rightarrow \forall x \forall y B)$
6. $\forall x s = t \rightarrow \forall x t = s$,
7. $\forall x r = s \rightarrow (\forall x s = t \rightarrow \forall x r = t)$.

42. Aufgabe: [F und Existenzquantor, 5P]

Entwickeln Sie Axiome, mit deren Hilfe es möglich wird, auch Formeln mit dem Existenzquantor im deduktiven System \mathcal{F} zu behandeln. Begründen Sie die Korrektheit und Vollständigkeit des so entstandenen Kalküls. Beachten Sie Beispiel 4.6 auf Folie 203.

43. Aufgabe: [Beispiele in F, 15P]

Zeigen Sie folgende Aussagen:

1. $\vdash_{\mathcal{F}} \forall y \forall x A \rightarrow \forall x \forall y A$. Beschreiben Sie, wie man den Beweis verwenden kann, um vergleichbare Aussagen für beliebige Vertauschungen (Permutationen) von mehr als zwei aufeinander folgenden Variablen zu beweisen.
2. $\vdash_{\mathcal{F}} \exists x A \rightarrow \exists y A_x[y]$, wobei $A_x[y]$ eine erlaubte Substitution ist und y nicht frei in A vorkommt.
3. $\vdash_{\mathcal{F}} t_1 = t_2 \rightarrow f(t_1) = f(t_2)$, wobei $t_1, t_2 \in \text{Term}$ und f ein einstelliges Funktionssymbol ist. Beschreiben Sie, wie man den Beweis auf mehrstellige Funktionssymbole erweitern kann.

44. Aufgabe: [Theorien, 6P]

Zeigen oder widerlegen Sie:

1. Sei M eine Theorie erster Stufe. Es gibt ein Modell I mit $I \models M$ genau dann, wenn M konsistent ist.
2. Falls T eine konsistente, nicht vollständige Theorie erster Stufe ist, dann gibt es eine Formel A , so dass $T \cup \{A\}$ und $T \cup \{\neg A\}$ beide konsistente Theorien sind.

45. Aufgabe: [Tableau-Methode, 4+6P]

Seien $A(x), B(x)$ Formeln, in denen die Variable x frei vorkommt. Stellen Sie für die folgenden Behauptungen ein semantisches Tableau auf, und leiten sie daraus die bestmögliche Aussage über deren Gültigkeit ab:

1. $\models ((\forall x A(x)) \vee (\forall x B(x))) \rightarrow (\forall x (A(x) \vee B(x)))$
2. $\models (\forall x (A(x) \vee B(x))) \rightarrow ((\forall x A(x)) \vee (\forall x B(x)))$

Abgabe: bis 2008/07/01, 10:00 Uhr im Kasten neben Raum 34/401.4