

Computeralgebra

Prof. Dr. K. Madlener

18. April 2009

Moderne CA-Systeme

Derive, Macsyma, Maple, Mathematica, Reduce, Scratchpad, Mupad, Mumath, Axiom, Magma, Mathlab

Ziele:

- ▶ Breite Funktionalität
- ▶ Einfache Bedienung
- ▶ Effizienz
- ▶ Erweiterbarkeit

Probleme:

- ▶ Darstellung der Strukturen und ihrer Elemente
- ▶ Effiziente Lösungen: Darstellungsabhängig
- ▶ Effiziente Transformationen zwischen Darstellungen

Probleme bei der Implementierung von CA-Systemen

- ▶ Allgemeine Systeme: Sprachumgebung, Notationen, Ein/Ausgaben, . . .
- ▶ Erfordern oft spezielle Programmiersprachen und Umgebungen
- ▶ Spezielle Systeme, z. B. Gruppen oder Gröbnerbasen, können oft nicht in andere Systeme verwendet werden.
- ▶ Vielzahl algorithmischer Lösungen, Vergleich schwer.
- ▶ Analyse der Algorithmen erfordert oft tiefe mathematische Ergebnisse.
- ▶ Wahl der Implementierungs- und Programmiersprachen

Symbolische Numerische Berechnungen

1.1 Beispiel Chebyshev-Polynome. Rekursive Definition.

$$T_0(x) = 1; T_1(x) = x; T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x) \text{ für } k \geq 2.$$

Liste der Polynome: $1, x, 2x^2 - 1, 4x^3 - 3x, 8x^4 - 8x^2 + 1, \dots$

Werte die Polynome an bestimmten Stellen aus.

Etwa für $x = 0.3$: $1, 0.3, -0.82, -0.792, 0.3448, \dots$

Programm: Berechnung der 5 ersten Werte an einer Stelle x .

Für 0.3 sollte das Programm die Ausgabe:

$$T_0[0.3] = 1.0; T_1[0.3] = 0.3; T_2[0.3] = -0.82; T_3[0.3] = -0.792;$$

$$T_4[0.3] = 0.3448 \text{ liefern.}$$

Maple Version für Chebyshev Polynome

$$T[0] := 1;$$

$$T[1] := x;$$

for $n = 2$ **to** 4 **do**

$$T[n] := \text{expand}(2 \cdot x \cdot T[n-1] - T[n-2]);$$

$$T[0] := 1$$

$$T[1] := x$$

$$T[2] := 2x^2 - 1$$

$$T[3] := 4x^3 - 3x$$

$$T[4] := 8x^4 - 8x^2 + 1$$

Interne Darstellung

Externe Darstellung.

Historische Entwicklung der Case

Faktoren:

- ▶ Systeme (Programmiersprachen, HW.)
- ▶ Algorithmen (spezielle Lösungen)
- ▶ Anwendungen (Erweiterungen)

Höhere Programmiersprachen: Ende der 50er Anfang 60er.
Fortran (58), Algol (60), Lisp (61).

Systeme 1961-1966:

- ▶ I. Slagle (MIT): Lisp-Programm **SAINT** (Symbolic Automatic Integration): Lösen von unbestimmten Integralen unter Ausnutzung von Heuristiken.
- ▶ J. Sammet, R. Tobey (IBM): **FORMAC** (Fortran-Preprozessor): Symbolisches Rechnen mit elementaren Funktionen: Polynome, rationale Funktionen, u.a.
- ▶ W.S. Brown (Bell Labs): **ALPAK** (in Assembler geschriebene Subroutinen für Fortran): Symbolisches Rechnen mit Polynomen und rationalen Funktionen.
- ▶ G. Collins (IBM, University of Wisconsin at Madison): **PM**: symbolisches Rechnen mit Polynomen.
- ▶ C. Engelman (MIT): **MATHLAB** (LISP-basiert): symbolisches Rechnen mit Polynomen und rationale Funktionen, erstes interaktives System.

Systeme 1966-1971:

- ▶ J. Moses (MIT): LISP-Programm **SIN** (Symbolic INtegrator).
- ▶ T. Hearn (Stanford University): **REDUCE** (LISP-basiert, interaktiv): für physikalische Berechnungen, hohe Portabilität.
- ▶ C. Engelman (MIT): **MATHLAB-68** (graphische Ausgaben).
- ▶ A.D. Hall: **ALTRAN** (ALgebraic TRANslator): Sprache und System für das symbolische Rechnen mit Polynomen und rationale Funktionen.
- ▶ G. Collins: **SAC-1** (Symbolic and Algebraic Calculations).
- ▶ D. Barton, S. Bourne, J. Fitch (University of Cambridge): **CAMAL** (CAMbridge ALgebra system: für astronomische Berechnungen und für Berechnungen der allgemeinen Relativitätstheorie.
- ▶ T. Hearn: **REDUCE-2**: allgemeines System mit Schwerpunkt für Berechnungen in der Hochenergie-Physik, geschrieben in RLISP (ALGOL-ähnlich).

Systeme 1971-1981:

Alle bisherigen Systeme rein experimenteller Natur, wurden auch außerhalb der Gruppe der Entwickler verwendet. Insbesondere REDUCE weite Verbreitung aufgrund der leichten Portierbarkeit.

- ▶ J. Griesmer, R. Jenks (IBM Research): **SCRATCHPAD**: LISP-basiert, interaktiv, beinhaltet MATHLAB-68, REDUCE-2 und SIN.
- ▶ J. Moses, W. Martin (MIT): **MACSYMA**: algebraische Berechnungen, Grenzwert-Berechnungen, symbolisch Integrieren, Lösen von Gleichungen.
- ▶ G. Collins, R. Loos: **SAC/ALDES**: Bibliothek von Modulen, die in ALDES (ALgebraic DEScription language) geschrieben sind, zusammen mit einem Übersetzer nach ANSI FORTRAN. Alle verwendeten Algorithmen waren vollständig und ausführlich dokumentiert.
- ▶ D. Stautemeyer, A. Rich (University of Hawai): **muMATH**: eigene Programmiersprache, lief auf PC.

Spezielle Systeme:

- ▶ I. Frick (University of Stockholm): **SHEEP**: Berechnungen von Tensorprodukten.
- ▶ W. Jeffreys (University of Texas at Austin): **TRIGMAN**: in FORTRAN geschrieben, zur Berechnung von Poisson-Reihen.
- ▶ H. Veltman (NL): **SCHOONSHIP**: für Berechnungen in der Hochenergie-Physik.
- ▶ V.M. Glushkov (Hiev): **ANALYTIK**: Implementierung in Hardware.

CASe, die portabel sind meistens C-basiert. Wegen der stark angestiegenen Rechenleistung der Computer finden CASe mehr und mehr Anwendungen und Benutzer. Insbesondere entstehen nun auch kommerzielle CASe.

Systeme 1981-1991:

- ▶ G. Gonnet, K. Geddes (University of Waterloo): **MAPLE**: modulare Struktur, bestehend aus einem kleinen kompilierten Kern in C, und einer großen Library von mathematischen Subroutinen, die alle in der eigenen MAPLE Sprache geschrieben sind. Interpreter für die Kommandos, Integer und rationale Arithmetik, Polynom-Routinen und ein effizientes Speicherverwaltungssystem.
- ▶ S. Wolfram (Caltech): **SMP** (Symbolic Manipulation Program): in C geschrieben, Regel-basiert.
- ▶ S. Wolfram: **MATHEMATICA**: symbolische und numerische Berechnungen, graphische Wiedergabe (2-D und 3-D, inkl. Animation), C-basiert mit eigener Programmiersprache.
- ▶ D. Stoutemeyer, A. Rich: **DERIVE**: interaktiv, nicht als Programmierumgebung.
- ▶ weitere allgemeine Systeme: **REDUCE 3, DOE-MACSYMA, MuPAD, AXIOM (SCRATCHPAD II)**.

Spezielle Systeme:

- ▶ J. Cannon (University of Sydney): **CAYLEY**: Gruppentheoretische Berechnungen. Mittlerweile **MAGMA**.
- ▶ J. Neubüser (RWTH Aachen): **GAP** (Group Algorithms and Programming). Mittlerweile in St. Andrews neu implementiert.
- ▶ J. Vermaseren: **FORM**: Berechnungen in der Hochenergie-Physik.
- ▶ A.M. Cohen: **Lie**: Berechnungen in Lie Algebren.
- ▶ M. Stillman: **MACAULAY**: Algebraische Geometrie und komm. Algebra.
- ▶ H. Cohen: **PARI**: Zahlentheorie.
- ▶ Greuel, Pfister (KL): **SINGULAR**: Gröbner Basen, Algebraische Geometrie, Singularitäten.
- ▶ **COCOA** (Genova) Kommutative Algebra. **MAGNUS** Gruppen.

Literatur

- ▶ von zur Gathen/Gerhard: Modern Computer Algebra, 1999, Cambridge University Press, ISBN 0-521-64176-4, INF 235/167 und L inf 92
- ▶ Geddes/Czapor/Labahn: Algorithms for Computer Algebra, INF 235/132, L inf 694.
- ▶ Davenport/Siret/Tournier: Computer Algebra, INF 235/116.
- ▶ Buchberger et al. (Eds.): Computer Algebra, INF 235/095.
- ▶ Mignotte: Mathematics for Computer Algebra, INF 235/126.
- ▶ Mignotte/Stefanescu: Polynomials: An Algorithmic Approach, INF 246/057.
- ▶ Winkler: Polynomial Algorithms in Computer Algebra, INF 235/132.
- ▶ Zippel: Effective Polynomial Computation, INF 246/054.
- ▶ Kreuzer, Robbiano Computational Commutative Algebra (0,1,2)

Inhalt Teil I

Einführung

Einleitung

Symbolische Numerische Berechnungen

Historische Entwicklung der CASE

Literatur

Algebraische Grundlagen: Polynome, rationale Funktionen und Potenzreihen

Grundlagen

ZPE (UFD)-Bereiche

Euklidische Bereiche

Ringkonstruktionen: Polynomring

Ringkonstruktionen: Quotientenkörper

Ringkonstruktionen: Potenzreihen

Grundlegende Konzepte der Algebra

2.2 Beispiel Einheiten, assoziierte Elemente:

\mathbb{Z} :: Einheiten 1, -1 6, -6 sind GGT von 18 und 30,
6, -6 sind assoziiert.

Assoziiert sein ist Äquivalenzrelation, Klassen assoziierter Elemente.

\mathbb{Z} :: {0}, {1, -1}, {2, -2}, ...

Auswahl von Repräsentanten aus assoziierten Klassen: \rightsquigarrow

Einheits-normale Elemente :: $n : D \rightarrow D$ $n(a)$ EN.

\mathbb{Z} :: \mathbb{N} als Einheits-normale Elemente

F Körper :: 0, 1 Einheits-normal.

Einheits-normaler GGT und KGV sind dann eindeutig.

In der Regel: 0 ist EN, 1 ist EN, a, b EN, so auch ab .

Für $a \in D$, so $a = u(a)n(a)$ eindeutig, wobei $u(a)$ Einheit und $n(a)$ EN.

Diese Begriffe, geeignet angepasst, sind auch für Ringe und Halbgruppen sinnvoll.

Nullteiler: $0 \neq a \in R$ ist Nullteiler, falls $ab = 0$ für ein $0 \neq b \in D$.

ZPE (UFD)-Bereiche

Prim-Elemente (irreduzible Elemente):: $p \in D - \{0\}$ ist Prim, falls

- a) p ist keine Einheit, b) $p = ab$, so a oder b Einheit.

$a, b \in D$ heißen **relativ Prim (teilerfremd)**, falls $\text{GGT}(a, b) = 1$.

Ein Integritätsbereich heißt **ZPE-Ring (UFD)**, falls für $a \in D - \{0\}$ gilt, a ist Einheit oder a kann als (endliches Produkt) von Primelementen dargestellt werden und diese Darstellung ist eindeutig bis auf

Assoziativität und Umordnung:

$a = p_1 \cdots p_n$ Primelemente p_i , $1 \leq i \leq n$ und ist $a = q_1 \cdots q_m$ mit Primelemente q_i , so $m = n$ und bei geeigneter Umordnung der q_j gilt p_i ist assoziiert mit q_i .

Wähle **Einheitsnormale Primelemente** : Eindeutige Primfaktorisation:
 $a = u(a)p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_n^{e_n}$ p_i Einheitsnormale Primelemente, $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$.

2.3 Satz

Ist D ein ZPE-Ring $\{a, b\} \neq \{0\}$, so existiert $\text{GGT}(a, b)$ und ist eindeutig.

Polynomringe

Polynomring über R : $R[x]$

$$a(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k, \quad a_k \in R, \quad m \geq 0, \quad \text{Koeffizienten } a_k$$

Grad von $a(x)$: größtes n mit $a_n \neq 0$: $\text{grad}(a(x))$

Standardform $\sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad a_n \neq 0$: a_n Leitkoeffizient

0 Polynom: $a_k = 0$ für alle k : $\text{grad}(0) := -\infty$

Monisch, falls $a_n = 1$

Addition, Multiplikation definiert wie üblich.

Eigenschaften von $R[x]$

- i) R ist kommutativ, so auch $R[x]$, 0 add. Einheit, 1 mult. Einheit.
- ii) D Integritätsbereich, so auch $D[x]$.
Einheiten sind die konstanten Polynome a_0 mit a_0 ist Einheit in D .
- iii) Ist D ein ZPE-Ring, so auch $D[x]$.

Polynome mit einheitsnormalen Leitkoeffizienten heißen einheitsnormal.

Euklidische Bereiche

2.5 Definition

Euklidischer Ring ist Integritätsbereich D mit einer Bewertung $v : D - \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$, die folgende Eigenschaft hat:

- 1) für alle $a, b \in D - \{0\} : v(ab) \geq v(a)$
- 2) für alle $a, b \in D$ mit $b \neq 0$ gibt es $q, r \in D$: $a = bq + r$, wobei $r = 0$ oder $v(r) < v(b)$.

2.6 Beispiel

- ▶ \mathbb{Z} mit $v(a) = |a|$ erfüllt 1), 2).
- ▶ F Körper $v(a) = 1, a \neq 0$ (r immer 0).
- ▶ $\mathbb{Q}[x]$ (allgemeiner $F[x]$ F Körper)
 $v(a(x)) = \text{grad}(a(x))$ erfüllt 1) + 2).

Beachte:

q (Quotient), r (Rest) in 2) müssen nicht eindeutig bestimmt sein (falls $r \neq 0$).

Euklidische Bereiche

2.7 Beispiel

\mathbb{Z} : $a = -8$ $b = 3$, so
 $-8 = 3 \cdot (-2) - 2 = 3 \cdot (-3) + 1$,
d. h. $q = -2$, $r = -2$ und $q = -3$, $r = 1$ erfüllen 2).

Vereinbarungen um Eindeutigkeit zu erreichen:

- ▶ In \mathbb{Z}
 - Wähle q, r mit $r = 0$ oder $\text{sign}(r) = \text{sign}(a)$
 - Wähle q, r mit $r = 0$ oder $\text{sign}(r) = \text{sign}(b)$
- ▶ In $F[x]$ sind q, r eindeutig. (warum?)

Euklidische Ringe sind ZPE-Ringe.

$g = \text{GGT}(a, b)$, so gibt es $s, t \in D$ mit $g = sa + tb$ (nicht eindeutig!)
 s, t heißen **Bezout-Koeffizienten**.

Annahme: In “effektiven” Euklidischen Ringen sein zu a, b stets
eindeutige q, r berechenbar.

Euklidischer Algorithmus

2.8 Beispiel

In \mathbb{Z} : GGT-Berechnung von 126 35

$$126 = 3 \cdot 35 + 21$$

$$35 = 1 \cdot 21 + 14$$

$$21 = 1 \cdot 14 + 7$$

$$14 = 2 \cdot 7 + 0$$

7 ist GGT(126, 35)

Anwendung: Simplifikation rationaler Ausdrücke: $35/126 \rightsquigarrow 5/18$

Nutzen: Zahlen „klein“ halten.

Sei D euklidischer Bereich $a, b \in D, b \neq 0$. Seien q, r Quotient und Rest mit $a = bq + r$, wobei $r = 0$ oder $v(r) < v(b)$ setze

$$\begin{aligned} \text{quo}(a, b) &= q \quad (\text{auch } a \text{ quo } b) \text{ und} \\ \text{rem}(a, b) &= r \quad (\text{auch } a \text{ rem } b \text{ oder } a \text{ mod } b) \end{aligned}$$

Es gilt dann $\text{GGT}(a, b) = \text{GGT}(b, r)$

Grundlage für Euklidischen Algorithmus

2.9 Lemma $\text{GGT}(a, b) = \text{GGT}(b, r)$

Beweis: Sei $a = bq + r$, dann gilt

$\text{GGT}(b, r) \mid a$ und $|b \rightsquigarrow \text{GGT}(b, r) \mid \text{GGT}(a, b)$, wegen $r = a - bq$ folgt

$\text{GGT}(a, b) \mid r$ und $|b \rightsquigarrow \text{GGT}(a, b) \mid \text{GGT}(b, r)$, d. h.

$\text{GGT}(a, b)$ und $\text{GGT}(b, r)$ sind assoziiert, da EN sind sie gleich.

Seien $a, b \in D$, $b \neq 0$, $v(a) \geq v(b)$.

Eine **Restfolge** für a, b ist definiert durch die Folge $\{r_i\}$ mit

$r_0 := a$, $r_1 := b$ und $r_i = \text{rem}(r_{i-2}, r_{i-1})$, $i = 2, 3, 4, \dots$

Es gilt $v(r_0) \geq v(r_1) > v(r_2) > v(r_3) \dots$

Es gibt ein k mit $r_{k+1} = 0$ ($k \leq v(b)$) und $\text{GGT}(a, b) = n(r_k)$.

Procedure Euclid

```
procedure Euclid (a,b)
  {Berechne  $g = \text{GGT}(a, b)$   $a, b \in D$  euklid. Bereich}
begin
   $c := n(a); d := n(b);$ 
while  $d \neq 0$  do
  begin
     $r := \text{rem}(c, d);$ 
     $c := d;$ 
     $d := r;$ 
  end
   $g := n(c);$  return  $g$ 
end.
```

Korrektheit und Terminierung folgen aus Lemma und Restfolgeneigenschaften. Komplexitätsanalyse folgt.

Erweiterter euklidischer Algorithmus (EEA)

procedure $EEA(a, b; s, t)$

{Berechne $g = \text{GGT}(a, b)$ und $s, t \in D$ mit $g = sa + tb$ }

begin

$c := n(a); d := n(b); c_1 := 1; d_1 := 0; c_2 := 0; d_2 := 1;$

while $d \neq 0$ **do**

begin

$q := \text{quo}(c, d); r := c - q \cdot d;$

$r_1 := c_1 - q \cdot d_1; r_2 := c_2 - q \cdot d_2;$

$c := d; c_1 := d_1; c_2 := d_2;$

$d := r; d_1 := r_1; d_2 := r_2;$

end

$g := n(c);$

$s := c_1 / (u(a) \cdot u(c)); t := c_2 / (u(b) \cdot u(c));$ **return** $(g, s, t);$

end.

$\{ \text{Invariante:} \cdot \}$
 $\{ c = c_1 n(a) + c_2 n(b) \wedge \}$
 $\{ d = d_1 n(a) + d_2 n(b) \}$

Beachte:

$n(c) = c_1 \cdot \frac{n(a)}{u(c)} + c_2 \cdot \frac{n(b)}{u(c)}$: d.h. s, t sind die Bezout-Koeffizienten.

Erweiterter euklidischer Algorithmus: Beispiel

2.10 Beispiel In \mathbb{Z} :: $a = 18$ $b = 30$

Wertefolge::

Iteration	q	c	c_1	c_2	d	d_1	d_2
0	—	18	1	0	30	0	1
1	0	30	0	1	18	1	0
2	1	18	1	0	12	-1	1
3	1	12	-1	1	6	3	-1
4	2	6	2	-1	0	-5	3

$$g = 6, s = 2, t = -1, \text{GGT}(18, 30) = 2 \cdot 18 - 1 \cdot 30 = 6$$

Kostenanalyse von EAA für \mathbb{Z} und $F[x]$

Seien $a, b \in R$ mit $n = v(a) \geq v(b) = m \geq 0$.

Die Anzahl l der Durchläufe der While-Schleife wird durch $l \leq v(b) + 1$ beschränkt. Die wesentliche Operation ist die Division mit Rest.

Diese ist l -mal durchzuführen: $l \leq v(b) + 1 = m + 1$.

Sei $R = F[x]$, F Körper, dann $v(a) = \text{grad}(a)$.

Zähle **Grundoperationen** (go) in F :

Kosten der Division mit Rest: Seien $\text{grad}(a) = n$, $\text{grad}(b) = m$.

Ein Durchgang der Division kostet: Eine Division, m Multiplikationen, m Additionen in F , $n - m + 1$ Durchläufe, d. h.

$$(2m + 1)(n - m + 1) = (2 \text{ grad}(b) + 1)(\text{grad}(q) + 1) \in O(n^2)$$

Operationen in F . **Ist b monisch, so spart man die Division.**

Sei $n_i = \text{grad}(c)$ in Durchlauf i ($0 \leq i \leq l + 1$), wobei d in Durchlauf l Null wird. Dann gilt $n_0 = n \geq n_1 = m > n_2 > \dots > n_l$ und $\text{grad}(q_i) = n_{i-1} - n_i$ für $1 \leq i \leq l$ (q_i Wert von q in Durchlauf i). Kosten der Division mit Rest: $(2n_i + 1)(n_{i-1} - n_i + 1)$ arithm. Operationen in F .

Kostenanalyse von EAA für $F[x]$: Kosten für s und t

Die Kosten für die r_i und q_i sind $\sum_{1 \leq i \leq l} (2n_i + 1)(n_{i-1} - n_i + 1)$
 Operationen in F . Normaler Fall: $n_i = n_{i-1} - 1 = \dots = m - i + 1$
 $2 \leq i \leq l = m + 1 \leq 2mn + 2m$.

2.11 Lemma Sei s_i Wert von c_1 in Durchgang i und t_i Wert von c_2 in Durchgang i . Dann gilt

$$1. \text{ grad } s_i = \sum_{2 \leq j < i} \text{grad } q_j = n_1 - n_{i-1} \quad 2 \leq i \leq l + 1$$

$$2. \text{ grad } t_i = \sum_{1 \leq j < i} \text{grad } q_j = n_0 - n_{i-1} \quad 1 \leq i \leq l + 1$$

Beweis: Wir zeigen nur 1) und $\text{grad } s_{i-1} < \text{grad } s_i$ ($2 \leq i \leq l$) durch Induktion nach i .

$i = 2$:: $s_2 = (s_0 - q_1 s_1) = 1 - q_1 \cdot 0$, $\text{grad } s_1 = -\infty < 0 = \text{grad } s_2$.

Sei $i \geq 2$ Behauptung richtig für $2 \leq j \leq i$, dann

$$\text{grad } s_{i-1} < \text{grad } s_i < n_{i-1} - n_i + \text{grad } s_i = \text{grad } (q_i s_i)$$

Kostenanalyse von EAA für $F[x]$: Kosten für s und t

Also $\text{grad } s_{i+1} = \text{grad } (s_{i-1} - q_i s_i) = \text{grad } q_i + \text{grad } s_i > \text{grad } s_i$

und

$$\text{grad } s_{i+1} = \text{grad } q_i + \text{grad } s_i = \sum_{2 \leq j < i} \text{grad } q_j + \text{grad } q_i = \sum_{2 \leq j < i+1} \text{grad } q_j$$

Die Berechnung $t_{i+1} = (t_{i-1} - q_i t_i)$ bzw. $s_{i+1} = (s_{i-1} - q_i s_i)$.

Multiplikation von Pol $\text{grad } n, m : \leq 2(n+1)(m+1)$ Operationen.

$2(\text{grad } t_i + 1)(\text{grad } q_i + 1) + (\text{grad } t_{i+1} + 1)$, d. h.

$$\sum_{2 \leq i \leq l} 2(n_0 - n_{i-1} + 1)(n_{i-1} - n_i + 1) + (n_0 - n_i + 1)$$

Normalfall

$$\sum_{2 \leq i \leq m+1} 2(n - m + i - 1)2 + n - (m - i + 1) + 1 =$$

$$\sum_{2 \leq i \leq m+1} 5n - 5m + 5i - 4 = 5nm - 5mm + \frac{5}{2}m(m+1) + O(m)$$

Kostenanalyse für \mathbb{Z} : Langzahlarithmetik

Darstellung von Zahlen: Wort 64 Bits. **2^{64} -Standard Darstellung:** Zahl als Feld von Wörtern. Erstes Wort für Vorzeichen und Länge des Feldes, d. h. $a \in \mathbb{Z}$

$$a = (-1)^s \sum_{0 \leq i \leq n} a_i 2^{64i}$$

$s \in \{0, 1\}, 0 \leq n + 1 < 2^{63}, a_i \in \{0, \dots, 2^{64} - 1\}$.

Als Feld: $s2^{63} + n + 1, a_0, \dots, a_n$ von 64 Bit-Wörtern, z. B. $-1 : 2^{63} + 1, 1$ und $1 : 1, 1$.

Bereich: $-2^{64 \cdot 2^{63}} + 1$ bis $2^{64 \cdot 2^{63}} - 1$.

Länge von a : $\lambda(a) = \lfloor \log_{2^{64}} |a| \rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{\log_2 |a|}{64} \right\rfloor + 1$.

Allgemein: Darstellung zur Basis b mit $2 \leq b < \frac{|w|}{2}$, wobei $|w|$ Wortlänge ist (Multiplikation der Koeffizienten in Wort).

$a = (u_1 \dots u_n)_b$ $0 \leq u_i < b$, d. h. $a = \sum_{i=1}^n u_i b^{n-i}$
 $= u_n + u_{n-1}b + \dots + u_1 b^{n-1}$ a ist n -stellig zur Basis b .

$a < b^n \rightsquigarrow a$ hat Länge $\leq n$.

Langzahlarithmetik: Klassische Algorithmen

Klassische Algorithmen für: $+$, $-$, \cdot , quo, Exponentiation

Maß in **Grundoperationen** (go):

- ▶ Addition, Substraktion von 1-stelligen Zahlen
- ▶ Multiplikation von 1-stelligen Zahlen
- ▶ Division von 1-stelligen Zahlen

Algorithmen: Addition

A: Addition nicht negativer ganzer Zahlen zur Basis b .

Eingabe: $(u_1 \cdots u_n)_b$ $(v_1 \cdots v_n)_b$

Ausgabe: $(w_0 \cdots w_n)_b$ w_0 Übertrag mit

$$(u_0 \cdots u_n)_b + (v_1 \cdots v_n)_b = (w_0 \cdots w_n)_b$$

begin

$j := n; k := 0$

$\{k = \text{Übertrag}\}$

while $j > 0$ **do**

begin

$w_j := (u_j + v_j + k) \bmod b;$

$\{k \in \{0, 1\}\}$

$k := \lfloor (u_j + v_j + k) / b \rfloor;$

$j := j - 1;$

end

$w_0 := k;$

end.

Korrektheit! Aufwand $\approx 2n$ go.

Algorithmen: Substraktion

S: Substraktion nicht negativer ganzer Zahlen.

Eingabe: $(u_1 \cdots u_n)_b \geq (v_1 \cdots v_n)_b$

Ausgabe: Nichtnegative Differenz: $u - v = (w_1 \cdots w_n)_b$

begin

$j := n; k := 0$

while $j > 0$ **do**

begin

$w_j := (u_j - v_j + k) \bmod b;$

$k := \lfloor (u_j - v_j + k) / b \rfloor$

$j := j - 1;$

end

end.

$\{k \in \{0, -1\}\}$

Korrektheit! Aufwand $\approx 2n$ go.

Algorithmen: Multiplikation

M: Multiplikation nicht negativer ganzer Zahlen Basis b .

Eingabe: $(u_1 \cdots u_n)_b \geq (v_1 \cdots v_m)_b$, d. h. $n \geq m$

Ausgabe: Produkt $u \cdot v = (w_1 \cdots w_{m+n})_b$

```
for  $i$  from 1 to  $n$  do
```

```
     $w_{m+i} := 0;$ 
```

{Initialisierung $m + i$ -te Stelle}

```
 $j := m;$ 
```

```
while  $j > 0$  do
```

```
    begin
```

```
        if  $v_j = 0$  then
```

```
             $w_j := 0$ 
```

```
        else
```

```
            begin
```

```
                 $i := n; k := 0;$ 
```

```
                while  $i > 0$  do
```

```
                     $t := u_i v_j + w_{i+j} + k; w_{i+j} := t \bmod b; k := \lfloor t/b \rfloor; i := i - 1;$ 
```

```
                 $w_j := k;$ 
```

```
            end
```

```
         $j := j - 1;$ 
```

```
    end
```

{Korrektheit! Aufwand $\approx 3nm$ go}

Algorithmen: Motivation für Multiplikationsalg.

$$(u_1 \cdots u_n)(v_1 \cdots v_m)$$

$$\left. \begin{array}{l} (u_1 v_m) \cdots (u_{n-1} v_m)(u_n v_m) \\ (u_1 v_{m-1}) \cdots (u_n v_{m-1}) \end{array} \right\} m$$

$$(u_1 v_1) \cdots (u_n v_1)$$

$$w_1 \cdots w_m w_{m+1} \quad \cdots w_{n+m}$$

Algorithmen: Division

D: Division mit Rest nicht negativer ganzer Zahlen Basis b .

Eingabe: $(m + n)$ stellige Zahl, n stellige Zahl.

Ausgabe: $(m + 1)$ stelliger Quotient, n stelliger Rest.

Reduktion auf: Division mit Rest einer $(n + 1)$ stelligen Zahl u durch n -stellige Zahl v , mit $0 \leq \lfloor \frac{u}{v} \rfloor < b$.

Rest r ist jeweils kleiner als v , d. h. $rb + (\text{nächste Stelle des Dividenden})$ als „neues“ u ,

z. B.

$$\underline{3142} : \underline{47} = \underline{66} \text{ Rest } 40$$

$$\begin{array}{r} \underline{282} \\ 322 \\ \underline{282} \\ 40 \end{array}$$

Algorithmen: Division

Problem

Eingabe: $u = (u_0 u_1 \cdots u_n)_b$ $v = (v_1 \cdots v_n)_b$ mit $\lfloor \frac{u}{v} \rfloor < b$ (einstellig).

Bestimme: $q = \lfloor \frac{u}{v} \rfloor$ mit $u = qv + r$, wobei $0 \leq r < v$.

Schätzung für q : $\hat{q} = \min \left(\left\lfloor \frac{u_0 b + u_1}{v_1} \right\rfloor, b - 1 \right)$ erste Stelle für q .

2.12 Lemma (Übung): Es gilt

1) $\hat{q} \geq q$

2) Für $v_1 \geq \lfloor \frac{b}{2} \rfloor$ gilt $\hat{q} - 2 \leq q \leq \hat{q}$

D: Division mit Rest nicht negativer ganzer Zahlen Basis t .

Eingabe: $u = (u_1 \cdots u_{m+n})_b$ $v = (v_1 \cdots v_n)_b$, $v_1 \neq 0$, $n > 1$

Ausgabe: Quotient $\lfloor \frac{u}{v} \rfloor = (q_0 \cdots q_m)_b$, Rest $u \bmod v = (r_1 \cdots r_n)_b$

Algorithmen: Division

begin

$$d := \left\lfloor \frac{b}{(v_1+1)} \right\rfloor; \quad \{d \in \{\lfloor b/2 \rfloor, \dots, 1\}\}$$

$$(u_0 \cdots u_{m+n})_b := (u_1 \cdots u_{m+n}) \cdot d; (v_1 \cdots v_n)_b := (v_1 \cdots v_n) \cdot d; \{\text{Normierung}\}$$

for j **from** 0 **to** m **do****begin****if** $u_j = v_1$ **then**

$$\hat{q} := b - 1$$

else

$$\hat{q} := \left\lfloor \frac{u_j b + u_{j+1}}{v_1} \right\rfloor$$

while $v_2 \hat{q} > (u_j b + u_{j+1} - \hat{q} v_1) b + u_{j+2}$ **do**

$$\hat{q} := \hat{q} - 1;$$

if $(u_j \cdots u_{j+n})_b < \hat{q} \cdot (v_1 \cdots v_n)_b$ **then**

$$\hat{q} := \hat{q} - 1;$$

$$(u_j \cdots u_{j+n})_b := (u_j \cdots u_{j+m})_b - \hat{q} \cdot (v_1 \cdots v_n)_b; q_j := \hat{q};$$

end

$$(r_1 \cdots r_n)_b := (u_{m+1} \cdots u_{m+m})_b / d;$$

end.Korrektheit! Aufwand $O(m \cdot n)$ go.

Algorithmen: Exponentiation

E: Exponentiation:: **Eingabe:** x Basis b , $n \in \mathbb{N}$. **Ausgabe:** x^n

Naive Lösung: n -Multiplikationen.

Durch Quadrieren: $\log n$ Multiplikationen, d. h. x^2, x^4, x^8, \dots

Länge der Zahlen: $\lambda(x) = h \rightsquigarrow \lambda(x^n) = n \cdot h$

begin

$y := x; z := 1;$

{Ergebnis in $z, y \rightsquigarrow x, x^2, x^4, \dots$ }

while $n > 1$ **do**

begin

$m := \lfloor \frac{n}{2} \rfloor;$

if $n > 2m$ **then**

$z := zy;$

$y := yy; n := m;$

end

$z := zy;$

end.

Algorithmen: Exponentiation Beispiel

	n	13	13	6	3	
x^{13}	m		6	3	1	
	y	x	x^2	x^4	x^8	
	z	1	x	x	x^5	x^{13}

Grundlage: Ist $n = \sum_{i=0}^k e_i 2^i$ $e_i \in \{0, 1\}$, so

$$x^n = x^{\sum_{i=0}^k e_i 2^i} = \prod_{i=0}^k x^{e_i \cdot 2^i} = \prod_{i: e_i \neq 0} x^{2^i}$$

Anzahl der Multiplikationen:

$$N = k + e_0 + e_1 + \dots + e_k - 1 \leq 2k = 2 \log n$$

Problem:

Naiver Algorithmus x^n $\lambda(x)$ fest $x^i \cdot x$ kostet $c \cdot i \cdot \lambda(x)^2$

Hingegen $y \cdot y$ kostet $c \cdot \lambda(y) \cdot \lambda(y)$. D.h. es kommen größere Zahlen vor!

Algorithmen: Exponentiation Analyse

$$c_{\text{exp}}(n) \approx c \cdot \lambda(x)^2 \sum_{i=0}^{k-1} 2^{2^{i+1}} + c \cdot \lambda(x)^2 \sum_{i=1}^k e_i \left(\sum_{j=0}^{i-1} e_j 2^j \right) 2^i$$

$$c_{\text{naiv}}(n) \approx \frac{1}{2} c \cdot n^2 \cdot \lambda(x)^2 = c \cdot \lambda(x) \cdot \sum_{i=1}^{n-2} i \cdot \lambda(x)$$

d. h. $n = 2^k$

$$c_{\text{exp}}(n) \cong \frac{4}{3} c \cdot n^2 \lambda(x)^2 \cong \frac{8}{3} c_{\text{naiv}}(n)$$

Für $n = 2^k + 2^{k-1}$

$$c_{\text{exp}}(n) \cong \frac{4}{3} c \cdot 2^{2k} \lambda(x)^2 + c \cdot 2^{2k-1} \lambda(x)^2 \simeq \frac{11}{6} c \cdot 2^k \lambda(x)^2$$

$$c_{\text{naiv}}(n) = \frac{9}{4} c \cdot 2^{2k} \lambda(x)^2 \simeq \frac{27}{12} c_{\text{exp}}(n)$$

Falls $x \in R$, R endlich, so können die Kosten der Multiplikation als konstant gesehen werden und exp ist erheblich schneller als naiv.

Anwendungen: Cryptographie: Kodierung und Decodierung

RSA-Methode: $y = x^n \bmod a$, $n > 10^{50}$,

Rekurrenzgleichungen, Potenzreihenentwicklungen.

GGT Kosten für \mathbb{Z} : $v(a) = |a|$

$$a = r_0 \geq b = r_1 > r_2 > \dots > r_l \geq 0 \quad q_i \geq 0 \text{ alle } i$$

Darstellung der Zahlen z. B. 2^{64} -Standard Darstellung

$$\text{Länge } \lambda(a) = \left\lfloor \frac{\log_2 |a|}{64} \right\rfloor + 1$$

Verwendet man $l \leq v(b) + 1 = b + 1 \leq 2^{64\lambda(b)} \rightsquigarrow \exp$ in $\lambda(b)$.

Polynomiale Schranke für $l : 1 \leq i \leq l$

$$r_{i-1} = q_i r_i + r_{i+1} \geq r_i + r_{i+1} > 2r_{i+1}, \text{ d. h.}$$

$$\prod_{2 \leq i < l} r_{i-1} > 2^{l-2} \prod_{2 \leq i < l} r_{i+1} \text{ für } l \geq 2 \quad r_{l-1} \geq 2 \text{ folgt}$$

$$2^{l-2} < \frac{r_1 \cdot r_2}{r_{l-1} r_l} < \frac{r_1^2}{2} \text{ oder } l \leq \lfloor 2 \log r_1 \rfloor + 1 \approx 128\lambda(b)$$

2.13 Satz Lamé 1845

Sei $n \in \mathbb{N}^+$ und u kleinste positive Zahl, für die der EA für Eingabe u, v' n Iterationen benötigt für mindestens eine Zahl v' mit $v' \leq u$. Dann gilt $u = F_{n+1}$ und $v' = F_n$, wobei F_k k -te Fibonacci Zahl.

GGT Kosten für \mathbb{Z} : $v(a) = |a|$

Alle Quotienten gleich 1, z. B. $(a, b) = (13, 8)$ EA

$$13 = 1 \cdot 8 + 5$$

$$8 = 1 \cdot 5 + 3$$

$$5 = 1 \cdot 3 + 2$$

$$3 = 1 \cdot 2 + 1$$

$$2 = 2 \cdot 1$$

$$l \text{ für } (a, b) = (F_{n+1}, F_n)$$

$$\rightsquigarrow l = n - 1 \approx 1.44 \log F_n + O(1)$$

für b fest und a Var gilt

im Mittel $l \approx 0.584 \log b$

Beachte: Dirichlet / Lejeune 1849 Cesaro 1881

Für zufällig gewählte Zahlen a, b gilt

$$PR(\text{GGT}(a, b) = 1) = \frac{6}{\pi^2} \approx 0.6079$$

$$\text{Verwende: } PR(p \nmid n \wedge p \nmid m) = 1 - \frac{1}{p^2}$$

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \approx \frac{6}{\pi^2}$$

Aufwand für EEA über \mathbb{Z}

Sei $n = \lambda(a)$, $m = \lambda(b) \rightsquigarrow O(nm)$ für EA

(Kosten der Div mit Rest $a = qb + r \quad O((\lambda(a) - \lambda(b)) \cdot \lambda(b))$ go)

Für die Bezout Koeffizienten gilt analog

$$|s_i| \leq \frac{b}{r_{i-1}} \quad \text{und} \quad |t_i| \leq \frac{a}{r_{i-1}} \quad 1 \leq i \leq l + 1$$

2.14 Satz Der EEA für Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ $\lambda(a) = n \geq \lambda(b) = m$, kann mit $O(nm)$ go durchgeführt werden.

Weitere Ergebnisse und Bemerkungen siehe von zu Gathen, Gerhard bzw. Mignotte. Siehe auch Knuth Kap. 4.5.3, Bach/Shallit 4.2, 4.3.

Viele Varianten zur Berechnung vom GGT (z. B. ohne Division).

KGV Kleinste gemeinsamer Vielfache (LCM)

$$\text{KGV}(a, b) = \frac{|ab|}{\text{GGT}(a, b)}$$

Reduktion auf GGT-Berechnung.

Ringkonstruktionen: $R[x]$ Polynomring

R ZPE, so $R[x]$ ZPE-Ring. R euklidisch $\not\Rightarrow R[x]$ euklidisch
z. B. $\mathbb{Z}[x]$ nicht euklidisch, da kein Hauptidealring (z. B. $\langle 2, x \rangle$ wird nicht von $a(x) \in \mathbb{Z}[x]$ erzeugt oder $\mathbb{Q}[x, y]$ nicht euklidisch, da kein Hauptidealring (z. B. $\langle x, y \rangle$).

Vorteile E-Ringe: Euklidischer Algorithmus für GGT Berechnung.

Anwendungen: Lösung diophantischer Gleichungen in $F[x]$: $a(x), b(x), c(x)$ gesucht $\sigma(x)$ und $\tau(x)$ mit

$$\sigma(x)a(x) + \tau(x)b(x) = c(x)$$

Lösbar für $g(x) = \text{GGT}(a(x), b(x)) \mid c(x)$. Eindeutigkeit und Schranken für die Grade von $\sigma(x), \tau(x)$ (Übung).

Zerlegung rationaler Funktionen:

$$\frac{c(x)}{a(x)b(x)} = \frac{\tau(x)}{a(x)} + \frac{\sigma(x)}{b(x)} \quad \rightsquigarrow \text{Integration}$$

Problem: wie berechnet man GGT in $\mathbb{Z}[x]$ oder $\mathbb{Q}[x, y]$.

\rightsquigarrow Pseudodivision primitiver EA.

Quotienten-Körper von Integritätsbereichen

Übergang von $\mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathbb{Q}$. D : Integritätsbereich \rightsquigarrow Körper.

Setze: $S = \{a/b : a \in D, b \in D - \{0\}\}$ formale Quotienten.

\sim auf S : $a/b \sim c/d$ gdw $ad = bc$ ist Äquivalenzrelation auf S $[a/b]$

$S/\sim = \{[a/b] : a \in D, b \in D - \{0\}\}$, $a/b \in [a/b]$ Repräsentant.

Addition + Multiplikation auf S/\sim :

$$(a/b) + (c/d) = (ad + bc)/bd$$

$$(a/b) \cdot (c/d) = ac/bd \quad \text{wohldefiniert auf Äquivalenzklassen.}$$

S/\sim ist Körper: $Q(D) = (F_D)$: Quotientenkörper von D .

Kleinster Körper, der D enthält, $D \cong \{[a/1] : a \in D\}$

$0/1 = 1/1 = a/1$ mit a identifiziert.

Praxis: eindeutige Repräsentanten für $[a/b]$, Entscheidung für \sim .

Falls GGT in D existiert:

$a/b \in [a/b] \in S$ ist Repräsentant, falls $\text{GGT}(a, b) = 1$, b ist einheitsnormal, a, b in „Normalform“.

z. B. \mathbb{Z} Quotientenkörper $Q(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$ a/b „kanonisch“, ($b > 0$).

$-2/4, 2/ -4, 100/ -200, -600/1200$ Kan. repräsentant: $-1/2$.

Quotienten-Körper rationaler Funktionen

$D[x]$ mit D ZPE-Ring, $Q(D[x])$ Körper der rationalen Funktionen (Ausdrücke) in x :: Schreibe $D(x)$.

Beachte: Operationen $+$, \cdot sind „teuer“.

Addition: 3-Multiplikationen + Addition + GGT Berechnung

Multiplikation: 2 Multiplikationen und GGT Berechnung.

Wähle geeignete Darstellungen

Fall $\mathbb{Z}[x]$ $\mathbb{Q}[x]$ bzw. $\mathbb{Z}(x)$ $\mathbb{Q}(x)$

$$\text{in } \mathbb{Q}(x) : a(x)/b(x) = \left(\frac{17}{100}x^2 - \frac{3}{113}x + \frac{1}{2}\right) / \left(\frac{5}{9}x^2 + \frac{4}{5}\right)$$

Die Äquivalenzklasse enthält Repräsentanten mit ganzzahligen Koeffizienten: z. B.

$$a(x)/b(x) = (4284x^2 - 675x + 12600)/(14000x^2 + 20160) \in \mathbb{Z}(x).$$

D mit Quotienten-Körper F_D dann $D(x) \cong F_D(x)$.

Beachte: unterschiedliche kanonische Repräsentanten möglich.
Siehe Beispiel oben.

Potenzreihen - erweiterte Potenzreihen

$R[[x]]$ **Potenzreihen** mit Koeffizienten in R : Ausdrücke

$$a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad a_k \in R$$

$\text{ord}(a(x)) = \min\{k : a_k \neq 0\}$.

0 alle $a_k = 0$, $a_k = 0$ für $k \geq 1$ **Konstante PR.**

Addition + Multiplikation wie üblich!

$$d(x) = a(x) \cdot b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k \quad \text{mit } d_k = a_0 b_k + \dots + a_k b_0 \quad k \geq 0$$

Eigenschaften:

1. $R[x] \hookrightarrow R[[x]]$
2. R kommutativ, so auch $R[[x]]$ 0, 1
3. R Intbereich, so auch $D[[x]]$. Einheiten sind **PR** mit a_0 Einheit in R .
4. F Körper, so ist $F[[x]]$ euklidischer Ring mit Bewertung $v(a(x)) = \text{ord}(a(x))$.

Potenzreihen - Einheiten

$$a(x) = \sum a_k x^k \quad b(x) = \sum b_k x^k \quad a(x) \cdot b(x) = 1 \text{ so}$$

$$1 = a_0 b_0$$

$$0 = a_0 b_1 + a_1 b_0$$

$$\vdots$$

$$0 = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$$

$$\rightsquigarrow a_0 \text{ ist Einheit}$$

Ist a_0 Einheit in R , so wird b bestimmt durch

$$b_0 = a_0^{-1}, b_1 = -a_0^{-1}(a_1 b_0), \dots, b_n = -a_0^{-1}(a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0)$$

$$\text{In } \mathbb{Z}[[x]] \text{ gilt } (1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Beachte

$$\text{ord}(a(x) + b(x)) \geq \min\{\text{ord}(a(x)), \text{ord}(b(x))\}$$

$$\text{ord}(a(x) \cdot b(x)) = \text{ord}(a(x)) + \text{ord}(b(x)).$$

Für $a(x), b(x) \in F[[x]]$, $a(x) \neq 0 \neq b(x)$, so $a(x) \mid b(x)$ oder $b(x) \mid a(x)$.

Sei $\text{ord}(a(x)) = l$ $\text{ord}(b(x)) = m$, d. h.

$$a(x) = x^l \bar{a}(x) \quad b(x) = x^m \bar{b}(x) \quad \bar{a}(x), \bar{b}(x) \text{ Einheiten.}$$

$$l \geq m, \text{ so } a(x)/b(x) = x^{l-m} \bar{a}(x) \cdot \bar{b}(x)^{-1} \in F[[x]].$$

Potenzreihen - Einheiten, GCD in $F[[x]]$

Für $a(x), b(x) \in F[[x]]$, $b(x) \neq 0$ gibt es $q(x), r(x)$ mit
 $a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x)$ mit
 $r(x) = 0$ falls $\text{ord}(a(x)) \geq \text{ord}(b(x))$, $r(x) = a(x)$ falls
 $\text{ord}(a(x)) < \text{ord}(b(x))$.

Quotientenkörper: $Q(D[[x]])$ **Schreibe** $D((x))$.

Achtung: D ZPE Ring $\not\rightarrow D[[x]]$ ZPE Ring, d. h. Normalformen schwer, assoziierte Elemente!

$$a(x) = 2 + 2x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots$$

$$b(x) = 2 + 4x + 6x^2 + 9x^3 + 13x^4 + \dots$$

$$c(x) = 2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \dots$$

sind assoziiert

$$b(x) = a(x)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots)$$

$$c(x) = a(x)(1 - x)$$

Welche **PR** soll als einheitsnormal gewählt werden! In $F[[x]]$ geht dies:

$$a(x) = x^l \cdot b(x), \quad l = \text{ord}(a(x)) \quad b(x) = a_l + a_{l+1}x + \dots \quad a_l \neq 0 \text{ also } b(x)$$

Einheit. Die Monome x^l ($l \geq 0$) und 0 sind einheitsnormal.

$$\text{GCD}(a(x), b(x)) = x^{\min\{\text{ord}(a(x)), \text{ord}(b(x))\}}$$

Verschiedene Darstellungsebenen

Elemente der algebraischen Struktur, Darstellungen, Rechnerdarstellung.

Objektebene, Formebene, Darstellungsebene

3.1 Beispiel Funktionenringe, Differentiation als Operator

$\frac{\partial}{\partial x}(ax + xe^{x^2})$ Regeln (Axiome-Gleichungen)

$$\frac{\partial c}{\partial x} \rightarrow 0 \quad \frac{\partial x}{\partial x} \rightarrow 1 \quad \frac{\partial(u+v)}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x} \rightarrow u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} v$$

$$\frac{\partial(u^v)}{\partial x} \rightarrow v u^{v-1} \frac{\partial u}{\partial x} + (\log_e u) u^v \frac{\partial v}{\partial x}$$

↪ Simplifikation symbolischer Ausdrücke ↪ Reduktionsmethoden.

Wortproblem - 0-Äquivalenz

Richardson: Some unsolvable problems involving elementary functions of a real var. J. Symb. Logic 33 (1968). How to recognize zero. J. Symb. Comp. 24 (1997). Funktionsklassen: $\{f : f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$, $+$, \cdot , 0 , 1 .

3.3 Satz Sei R die Klasse aller Terme, die man aus

1. \mathbb{Q} (rationale Zahlen), π Konstanten.
2. Einer Variablen x und Funktionen $\sin(x)$, $|x|$.
3. Operatoren: $\text{add}(+)$, $\text{mult}(*)$, $\text{komp}(\circ)$.

Wie üblich definiert: $t_1(x) \circ t_2(x) = t_1(t_2(x))$

Interpretiert man die Konstanten als konstante Funktionen auf \mathbb{R} , x als Identitätsfunktion und $\sin(x)$, $|x|$ durch die Standardfunktionen, so stellt jeder Term eine eindeutige Funktion aus $(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ dar.

Folgendes Problem ist unentscheidbar:

Eingabe: $E \in R$ **Frage:** Gilt $E = 0$?

Wortproblem - 0-Äquivalenz

3.4 Beispiel

$$\frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{2}\right) = \sin(x) \circ \frac{1}{2} \sin(|x|)$$
$$|\sin(x)|, \sin(\sin(\sin(x))), \sin(x)^2, \sin(x) + |x|$$

Beweisidee: Reduziere Hilbert's 10. Problem auf „ $E = 0$ “.

Matiassevich 1970: Unentscheidbarkeit.

Hilbert's 10. Problem

Es gibt eine Menge $\mathcal{P} = \{p(x_1, \dots, x_n) \mid p \text{ Polynome über } \mathbb{Z}\}$ mit Prädikat: $p \in \mathcal{P}$ hat p Nullstelle in \mathbb{N}^n ist nicht rekursiv entscheidbar.

Idee der Reduktion: Sei $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so

$$f^0(x) = x \quad f^{(n+1)}(x) = f(f^n(x)) \quad n > 0$$

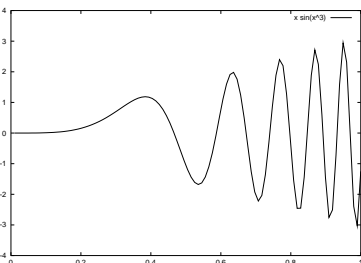
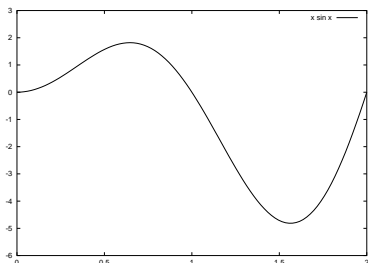
Wortproblem - 0-Äquivalenz

3.5 Lemma Jedes Tupel reeller Zahlen kann durch eine reelle Zahl dargestellt werden (bis auf ε). Seien $h(x) = x \sin x$, $g(x) = x \sin(x^3)$.

Dann gibt es für alle $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon < 1$ ein $b \in \mathbb{R}$ mit

$$|h(g^{(k+1)}(b)) - a_k| < \varepsilon \quad 1 \leq k \leq n.$$

$$h(x) = x \sin x \qquad \qquad \qquad g(x) \qquad = \qquad \qquad x \sin(x^3)$$



Wortproblem - 0-Äquivalenz

3.6 Definition Eine Funktion (Term) $F(x_1, \dots, x_n) \in R$ wird von $G(x_1, \dots, x_n) \in R$ dominiert, wenn für alle $x_i \in \mathbb{R}$

- $G(x_1, \dots, x_n) > 1$
- $\forall \delta_1, \dots, \delta_n \in \mathbb{R}, |\delta_i| < 1 : F(x_1 + \delta_1, \dots, x_n + \delta_n) < G(x_1, \dots, x_n)$

3.7 Lemma Zu jeder Funktion $F \in R$ gibt es eine Funktion $G \in \mathcal{P}$, die F dominiert.

3.8 Lemma Für alle $P \in \mathcal{P}$ existiert $F \in R$ mit: Es gibt $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ mit $P(a_1, \dots, a_n) = 0$ gdw es gibt $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ mit $F(b_1, \dots, b_n) < 0$.

Wortproblem - 0-Äquivalenz: Positive Ergebnisse

3.9 Satz Richardson

Betrachte Funktionenklasse, die durch Termmenge Λ definiert wird mit

1. $\mathbb{Q}, \pi \in \Lambda$
2. Var x Identität
3. $F, G \in \Lambda$, so $(F + G), (F * G), (F/G)$
4. $F \in \Lambda$, so $\log(|F|)$ und $\exp(F)$ in Λ

Interpretiere $F \in \Lambda$ als $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Das Prädikat „ $F(x) \equiv 0$ “ auf Λ ist entscheidbar.

Wortproblem - 0-Äquivalenz: Positive Ergebnisse

Beweisidee: Komplexität von Ausdrücken + Induktion. Sei etwa y Unterausdruck mit größter Komplexität etwa $y = \log u$

$$F = a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_1 y + a_0$$

wende Verfahren an:

$$a_n = 0 \rightsquigarrow F_1 = a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_0, F \equiv 0 \text{ gdw } F_1 \equiv 0.$$

$$a_n \neq 0 \rightsquigarrow F_2 := \frac{F}{a_n} = y^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} y + \dots$$

$$F_3 = F_2' = n y^{n-1} y' + \dots + \frac{a_n a_0' - a_0 a_n'}{a_n^2}$$

$$F_2 \equiv 0 \rightsquigarrow F_3 \equiv 0 \quad F_3 \equiv 0 \rightsquigarrow F_2 \text{ konstant.}$$

Klasse ist abgeschlossen gegen Ableitungen und die Ableitungen sind weniger komplex.

$$y = \log u \rightsquigarrow y' = \frac{u'}{u} \quad u', u \text{ weniger komplex.}$$

$y = e^u$ ist dies nicht der Fall, unterscheide hier

$$F \equiv a_n y^n + \dots + a_0 \begin{cases} a_0 \equiv 0 \rightsquigarrow F_1 = a_n y^n + \dots + a_1 y = Qy \\ a_0 \neq 0 \rightsquigarrow F_2 = F/a_0 \rightsquigarrow F_2'/y \equiv 0 \rightsquigarrow F \equiv c \end{cases}$$

Formalisierung des Simplifikationsbegriffs

Zwei Ziele:

1. „Einfachere“ äquivalente Objekte zu definieren und sie bei Operationen zu verwenden.
2. Wenn möglich kanonische (d. h. eindeutige) Darstellung in (einigen/allen) Äquivalenzklassen festzulegen und wenn möglich effektiv zu bestimmen.

3.10 Definition Sei E Menge syntaktischer Objekte (z. B. Terme über Signatur, Formeln, Wörter, Programme) und sei \sim eine Äquivalenzrelation auf E . Sei weiterhin \preceq eine Partialordnung auf E . Eine **Simplifikationsfunktion** für $[E; \sim]$ bzgl. \preceq ist eine rekursive Funktion $f : E \rightarrow E$ mit

$$\text{i) } f(t) \sim t \quad \text{ii) } f(t) \preceq t$$

i. Allg. \preceq wohlfundierte Partialordnung auf E , d. h. es gibt keine

∞ -Ketten $e_1 \succ e_2 \succ e_3 \succ \dots$,

z. B. $|e|$ Länge des Ausdrucks $e_1 \succ e_2$ gdw $|e_1| \succ |e_2|$.

Formalisierung des Simplifikationsbegriffs

Eine **Normalisierungsfunktion** bzgl. \preceq ist eine Simplifikationsfunktion f bzgl. \preceq mit $f(f(t)) = f(t)$ für alle t .

D. h. $f(t)$ ist simplifiziert oder in Normalform.

Oft wird verlangt, dass für bestimmte Äquivalenzklassen z. B.

$[0], [1] : t \sim 0$ so $f(t) = f(0) = 0$.

Eindeutige Normalformen für spezielle Äquivalenzklassen in der Regel solche, die ausgewählte Konstanten der Signatur enthalten.

Eine **kanonische Funktion** ist eine Simplifikationsfunktion f mit

$$s \sim t \text{ so } f(s) = f(t) \text{ für alle } s, t \in E$$

Sie berechnet eindeutige (kanonische) Repräsentanten für jede Äquivalenzklasse.

Berechenbare Quotientenstrukturen

3.12 Satz Sei E entscheidbar, R berechenbare Operation auf E , d. h.

$R : E^n \rightarrow E$ und \sim eine Kongruenz bzgl. R .

Hat E eine kanonische Funktion f bzgl. \sim und ist

$\text{rep}(E) = \{t \in E : f(t) = t\}$ die Menge der kanonischen Repräsentanten, so lässt sich die Quotientenstruktur wie folgt darstellen:

$$R'(s_1, \dots, s_n) := f(R(s_1, \dots, s_n)) \text{ für } s_1, \dots, s_n \in \text{rep}(E)$$

und

$$(\text{rep}(E), R') \cong (E / \sim, R / \sim)$$

$\text{rep}(E)$ ist entscheidbar, R' ist berechenbar.

Beispiele: Monoide und Gruppen

3.13 Beispiel

- ▶ $(a, b : ba = \lambda)$ Normalformen $a^n b^m \quad n, m \geq 0$

Wortersetzungssystem: $ba \rightarrow \lambda$ terminierend (Längen kürz.)

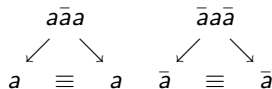
konfluent (d. h. eindeutige NF)

$$(a^n b^m) \circ (a^{n'} b^{m'}) = \begin{cases} a^{n+(n'-m)} b^{m'} & n' \geq m \\ a^n b^{(m-n')+m'} & m > n' \end{cases}$$

- ▶ $(a, b, \bar{a}, \bar{b} : a\bar{a} = \bar{a}a = b\bar{b} = \bar{b}b = \lambda)$

WES: $a\bar{a} \rightarrow \lambda \quad \bar{a}a \rightarrow \lambda \quad b\bar{b} \rightarrow \lambda \quad \bar{b}b \rightarrow \lambda$ terminierend.

Konfluent: Kritische Paare:



Beispiele: Monoide und Gruppen

- ▶ Normalformen: Wörter, die keine linke Seite als Teilwort enthalten \rightsquigarrow reguläre Sprache

- ▶ $(a, b : aba = bab = \lambda)$

WES: $aba \rightarrow \lambda$ $bab \rightarrow \lambda$ terminierend.

Nicht konfluent

$$\begin{array}{ccc} & abab & \\ \swarrow & & \searrow \\ b & \neq & a \end{array}$$

Hinzunahme von Regeln $b \rightarrow a \rightsquigarrow$ Knuth Bendix Vervollständigung.

Länge-Lexikographische Ordnung $b \succ a$

$(a, b; b \rightarrow a, a^3 \rightarrow \lambda)$, Repr: λ, a, a^2

Multiplikation:

	λ	a	a^2
λ	λ	a	a^2
a	a	a^2	λ
a^2	a^2	λ	a

Abstraktionsebenen für algebraische Strukturen

► \mathbb{Z}_m $f(n) = n \bmod m$ positive Reste

Repr. $0, 1, \dots, m - 1$, Definition von $+$, \cdot auf \mathbb{Z}_m .

I) **Objektebene**: Menge Operationen = Elemente der Mengen

II) **Form-Ebene**

Objekte werden explizit dargestellt „Bezeichner“

mehrere Gleichheiten \equiv syntaktische $=$ semantische
gleiche Bezeichner gleiche Objekte

Typische Bezeichner: Terme $12x^2y - 4xy + 9x - 3$ $(3x - 1)(4xy + 3)$
 $(12y)x^2 + (-4y + 9)x - 3$

Syntaktisch verschieden, aber semantisch gleich.

Abstraktionsebenen für algebraische Strukturen

III) **Datenstrukturebene**

Darstellung der Objekte aus Ebenen I), II) im Rechner:

Speicherorganisation

Listen, Felder, Verbunde usw.

Simplifikation definiert auf Ebene II).

Realisiert in Ebene III).

Wichtige Entscheidungen: Welche Darstellungen erlaubt man in Ebene II), wie werden diese in III) dargestellt.

Oft Unterscheidung nötig: Eingabe, Intern, Ausgabe.

Beispiele

a) $E = \mathbb{Z}[x]$

Formebene

- ▶ Jedes Polynom $\sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathcal{F}$
- ▶ $p_1, p_2 \in \mathcal{F}$, so auch $(p_1 * p_2) \in \mathcal{F}$
- ▶ $p_1, p_2 \in \mathcal{F}$, so auch $(p_1 + p_2) \in \mathcal{F}$

Normalisierungsfunktionen:

$$f_2 \left\{ \begin{array}{l} f_1 \left\{ \begin{array}{l} \text{Multipliziere Produkte aus (Distributivgesetz) } \Sigma \text{ Monom.} \\ \text{Fasse Monome mit gleichem Grad zusammen.} \\ \text{Ordne Monome nach aufsteigendem Grad} \\ \hspace{15em} \text{(absteigendem)} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Beispiele (2)

f_1 ist Normalisierungsfunktion, f_2 ist kanonische Funktion.

Normalform bzgl. f_1 :

$$a_1x^{e_1} + a_2x^{e_2} + \dots + a_mx^{e_m} \quad e_i \neq e_j \text{ für } i \neq j$$

Kanonische Form bzgl. f_2 :

$$a_1x^{e_1} + a_2x^{e_2} + \dots + a_mx^{e_m} \quad e_i < e_j \text{ für } i < j$$

Oft gilt $s \sim t$ gdw $M(s, t) \sim 0$, \exists Normalisierungsfunktion \rightsquigarrow kanonische Funktion.

Beispiele (3)

- b) Abelsche Halbgruppen Varietät
 Erzeugende Relationen
 $\Sigma :: a, b, c, f, s$ $E :: as = c^2s, bs = cs, s = f$
 + Kommutativität

Faktorhalbgruppe des freien komm. Monoids in a, b, c, f, s

Formebene: $\{a^{n_1} b^{n_2} c^{n_3} f^{n_4} s^{n_5} \mid n_i \in \mathbb{N}\}$

$\circ : M \times M \rightarrow M$ Addition der Exponenten.

Kongruenz, die von E erzeugt wird: **Ersetzungsregeln**

$\underline{s} \rightarrow f$ $\underline{c}f \rightarrow bf$ $\underline{b^2}f \rightarrow af$ „Modulo Kommutativität“

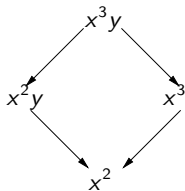
Definiere kanonische Funktion $\xrightarrow{*}$ mit kanonischen Formen
 $\underline{\subseteq} a^{n_1} b^{n_2} c^{n_3} f^{n_4}$

Beispiele (4)

c) $E = \mathbb{Q}[x, y] : x^3 - x^2, x^2y - x^2$

$$i = \langle x^3 - x^2, x^2y - x^2 \rangle \quad E/i$$

Regeln: $x^3 \rightarrow x^2$ $x^2y \rightarrow x^2$ Reduktionsfunktion



$$x^3 - x^2y \xrightarrow{*} 0$$

→ definiert Simplifikationsfunktion $p \xrightarrow{*} NF(p)$, sie ist kanonisch (\rightsquigarrow Gröbner Basen).

Normalformen für Polynomringe und Quotientenkörper, d. h.

Normalformen für Polynome und rationale Ausdrücke.

Beispiele (5)

Ringe: Axiome kommutative Ringe mit 1.

Signatur: $0, 1, -, +, *$

Axiome: $+$ Komm., Ass., 0 neutr. El., Gruppe inv. -

$*$ Komm., Ass., Einh. $+$ Distributivgesetz

Gleichheitsaxiome \rightsquigarrow Varietät.

Univariate Polynome: Formebene.

$R[x] : a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, n \geq 0, a_i \in R, a_n \neq 0 \cup \{0\}$

System kanonischer Formen für $R[x]$ (**dicht**) oder **dünn** alle

Koeffizienten $\neq 0$.

Multivariate Polynome: Formebene.

Rekursive Darstellung: $R[x_1 \dots x_n] = R[x_1 \dots x_{n-1}][x_n]$

$$a(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^{\text{grad}(a(\bar{x}))} a_i(x_1 \dots x_{n-1}) x_n^i$$

dicht/dünn

Beispiele (6)

3.14 Beispiel

$$a(x, y, z) = (3y^2 + (-2z^3)y + 5z^2)x^2 + 4x + ((-6z + 1)y^3 + 3y^2 + (z^4 + 1))$$

Distributive Darstellung $a(\bar{x}) \in D[x]$

$$a(\bar{x}) = \sum_{e \in \mathbb{N}^n} a_e x^e \quad \text{mit } a_e \in D \quad \text{dicht / dünn } a_e \neq 0$$

x^e $e \in \mathbb{N}^n$ werden oft Terme genannt.

$$a(x, y, z) = 3x^2y^2 - 2x^2yz^3 + 5x^2z^2 + 4x - 6y^3z + y^3 + 3y^2 + z^4 + 1$$

Reihenfolge der Terme? Ordnungen auf Termmengen, die kompatibel mit Termmultiplikation sind, z. B.

Lex $x > y > z$ $x^2y^2 > x^2yz^3 > x^2z^2 > x > y^3z \dots$

oder

Grad-Lex $x^2yz^2 > x^2y^2 > x^2z^2 > y^3z > z^4 > y^3 > y^2 > x$

Beispiele (7)

3.15 Beispiel

$$a(x, y) =$$

$$((x^2 - xy + x) + (x^2 + 3)(x - y + 1)) \cdot ((y^3 - 3y^2 - 9y - 5) + x^4(y^2 + 2y + 1))$$

Distributive Darstellung:

$$f_1(a(x, y)) = 5x^2y^3 + 3x^2y^2 - 13x^2y - 10x^2 + 3x^6y + 2x^6 - xy^4 + 7xy^3 \dots$$

Kanonische distributive Darstellung:

$$f_2(a(x, y)) = x^7y^2 + 2x^7y + x^7 - x^6y^3 + 3x^6y + 2x^6 - x^5y^3 + 2x^5y^2 + \dots$$

Faktorierte Normalform:

$$f_3(a(x, y)) =$$

$$(x^3 - x^2y + 2x^2 - xy + 4x - 3y + 3)(x^4y^2 + 2x^4y + x^4 + y^3 - 3y^2 - 9y - 5)$$

Faktorierte kanonische Form:

$$f_4(a(x, y)) = (x - y + 1)(x^2 + x + 3)(x^4 + y - 5)(y + 1)^2$$

Beispiele (8)

- Rekursive Darstellung
 - Distributive Darstellung
- $$f_1$$
- Kanonische distributive Darstellung (Ordnung auf Termen) f_2

- Faktorisierte Normalform

$$\prod_{i=1}^k p_i \rightarrow \prod_{i=1}^k f_2(p_i)$$

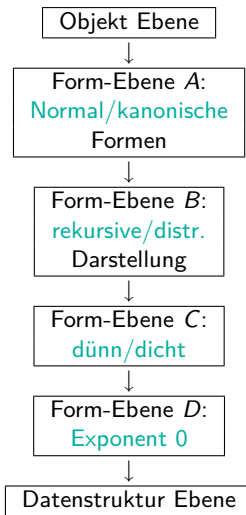
$$f_3$$

- Faktorisierte kanonische Form (D ZPE)

$$\prod_{i=1}^k p_i \rightarrow \prod_{i=1}^k f_2(p_i)$$

Faktorisiere die $f_2(p_i)$, fasse gleiche Faktoren zusammen.

Einheitsnormale Faktorisierung +
Ordnung der Faktoren



Beispiele (9)

- ▶ f_1, f_2, f_3 sind „einfach“ zu berechnen.
- ▶ f_4 kostspielig!
- ▶ f_2, f_3 werden am häufigsten verwendet.
- ▶ $(x + y)^{1000} - y^{1000}$ von f_2 und f_3 expandiert!
- ▶ Weitere Transformationen erwünscht!

Normalformen für rationale Ausdrücke

D Integritätsbereich, Quotientenkörper $(D) \quad F_D$

Annahme: D ZPE-Ring, d. h. GGT existiert.

$D[x_1, \dots, x_n] \quad D(x_1 \dots x_n)$

Formebene: $\frac{a}{b} :: \text{GGT}(a, b) = 1, b \in \text{EN}, a, b \text{ kanon.}$

$$(\text{exp} * \text{exp}) \quad (\text{exp} + \text{exp}) \quad \frac{p}{q}$$

Normalisierungsfunktion für rationale Ausdrücke

$f_5 ::$

1. Bringe in Gestalt $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in D[x_1, \dots, x_n]$
(Gemeinsamer Nenner, Ausmultiplizieren) $\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} \rightarrow$
2. GGT $(a, b) = 1$ $\frac{a}{b} \rightarrow \frac{a'}{b'}$ $a = a' \cdot g, b = b' \cdot g$
3. b Einheitsnormal: $\frac{a'}{b'} \rightarrow \frac{a''}{b''}, a'' = a' \cdot (u(b'))^{-1}, b'' = b' \cdot (u(b'))^{-1}$
4. $\frac{a''}{b''} \rightarrow \frac{f_2(a'')}{f_2(b'')}$

Andere Formen: a/b

Fakt/Fakt

Fakt / erweitert

erweitert / Faktor

mit $\text{GGT}(a, b) = 1, b$ einheitsnormal.

Normalformen Potenzreihen

Potenzreihen Truncated Power Series: Abbruchgrad t

$$a(x) = \sum_{k=0}^t a_k x^k + 0(x^{t+1})$$

↪ Problem Normalformen

Explizite Darstellung unendlicher Reihen:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \text{ d. h.}$$

$$a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_a(k) x^k$$

Koeffizientenfunktion $f_a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ rekursiv.

Datenstrukturebene

Darstellung der Objekte der Formebene im Rechner.

Entscheidung:

Alle nur Normalformen nur kanonische Formen

Ziel: Effiziente Unterstützung (Realisierung) der grundlegenden Operationen.

1. \mathbb{Z}, \mathbb{Q}

Single-Precision \rightsquigarrow Wortlänge z. B. 64 Bits

Multi-Precision \rightsquigarrow Langzahlen

SP-Zahl mit Vorzeichen: $-2^{63} + 1 \leq \text{SP-Zahl} \leq 2^{63} - 1$

Langzahlen als Listen von SP-Zahlen.

$$(d_0, \dots, d_{l-1}) \longleftrightarrow \sum_{i=0}^{l-1} d_i \beta^i$$

Wahl von β

$1 \leq \beta - 1 \leq \text{SP-Zahl}$ oder als Feld var. Länge (wie gehabt!)

Datenstrukturebene (Forts.)

Wahl von β :

i) $\beta - 1$ größte SPZ

ii) $\beta = 10^p$ p so groß wie möglich.

Länge l der Liste: Dynamisch oder statisch.

Implementierung: Zeiger oder Felder.

Referenzierte / sequentielle Zuweisung (-Vorzeichen, -Länge)

$$d \rightarrow \boxed{d_0} \rightarrow \boxed{d_1} \rightarrow \dots \rightarrow \boxed{d_{l-1}} \rightarrow \text{nil}$$

$$\beta = 10^3 \quad N = 1/234/567/890$$

$$N \rightarrow \boxed{890} \rightarrow \boxed{567} \rightarrow \boxed{234} \rightarrow \boxed{1} \rightarrow$$

Feld

890	567	234	1	0	0...
-----	-----	-----	---	---	------

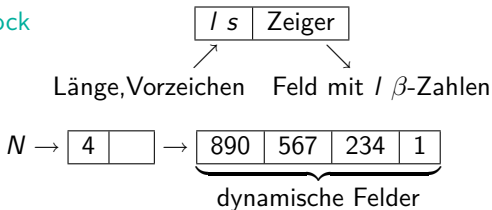
Probleme

- Feste Länge (Überlauf), auffüllen mit 0 (Platz Verschwendung).
- Listen, Pointer Kosten Platz, Kosten für nächste Stelle.

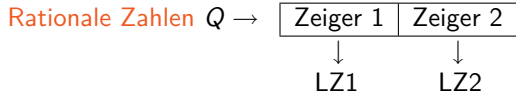
Descriptor Allocation

Mischung

Beschreibungsblock



Problem: Speicherverwaltung kostspielig Garbagecollection





Inhalt Kapitel 4

Arithmetik in Polynomringen - Modulare Arithmetik

Arithmetik in Polynomringen

Pseudo-Division mit Rest-Primitiver EA

Modulare Arithmetik

Schnelle Arithmetik

Die schnelle Fourier Transformation (FFT) Anwendung auf

Polynommultiplikation

Anwendung FFT auf Langzahlmultiplikation

Modulare Methoden

Chinesische Reste Algorithmen

Garner & Newton Interpolationsalgorithmen

Arithmetik in Polynomringen

Euklidischer Algorithmus für $D[\bar{x}]$?

Problem: $D[\bar{x}]$ i. Allg. nicht euklidisch, aber ZPE Ring, falls D ZPE-Ring: wie berechnet man GGT?.

4.1 Beispiel $\mathbb{Z}[x]$ seien

$$a(x) = 48x^3 - 84x^2 + 42x - 36$$

$$b(x) = -4x^3 - 10x^2 + 44x - 30$$

Eindeutige EN-Faktorisierungen in $\mathbb{Z}[x]$

$$a(x) = (2) \cdot (3)(2x - 3)(4x^2 - x + 2)$$

$$b(x) = (-1)(2)(2x - 3)(x - 1)(x + 5)$$

$$\rightsquigarrow \text{GGT}(a, b) = 2 \cdot (2x - 3) \\ = 4x - 6$$

Beispiel (Forts.)

Berechnung in $\mathbb{Q}[x]$ (euklid. Ring) Zwei Möglichkeiten:

Eindeutige EN-Faktorisierungen in $\mathbb{Q}[x]$

$$a(x) = (48) \left(x - \frac{3}{2}\right) \left(x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)$$

$$\rightsquigarrow \text{GGT}(a, b) = x - \frac{3}{2}$$

$$b(x) = (-4) \left(x - \frac{3}{2}\right) (x - 1)(x + 5)$$

Euklidischer Algorithmus in $\mathbb{Q}[x]$

$$\rightsquigarrow \text{GGT}(a, b) = x - \frac{3}{2}$$

Wie hängen die beiden berechneten GGT's voneinander ab? Übung

Beispiel

4.2 Beispiel

$$a(x) = 3x^3 + x^2 + x + 5$$

$$b(x) = 5x^2 - 3x + 1 \text{ in } \mathbb{Q}[x]$$

$\rightsquigarrow a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x)$ mit

$$q(x) = \frac{3}{5}x + \frac{14}{25} \quad r(x) = \frac{52}{25}x + \frac{111}{25}$$

Hauptkoeffizient von $b(x)$ ist 5. Nenner sind Potenzen von 5.

In $\mathbb{Z}[x]$ ist obige Division nicht möglich: $3 = 5q_1, q_1 \in \mathbb{Z} \nmid$

Wählt man $\bar{a}(x) = 5^2 \cdot a(x)$, so gilt

$$5^2 \cdot (3x^3 + x^2 + x + 5) = (5x^2 - 3x + 1) \cdot (15x + 14) + (52x + 111) \text{ in } \mathbb{Z}[x], \text{ wobei } \text{grad}(52x + 111) < \text{grad}(5x^2 - 3x + 1)$$

\rightsquigarrow Pseudo-Divisions-Eigenschaft



Pseudo-Division mit Rest-Primitiver EA

PD-Eigenschaft: D ZPE Ring, $a(x), b(x) \in D[x]$ mit $b(x) \neq 0$,
 $\text{grad}(a(x)) \geq \text{grad}(b(x))$. Dann gibt es Polynome $q(x), r(x) \in D[x]$ mit
 $\beta^l a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x) \quad \text{grad}(r(x)) < \text{grad}(b(x))$
wobei

- ▶ $\beta = \text{Haupt_Koeff}(b(x))$,
- ▶ $l = \text{grad}(a(x)) - \text{grad}(b(x)) + 1$
- ▶ $q(x)$:: **Pseudo_Quotient** und
- ▶ $r(x)$:: **Pseudo_Rest**.

Beachte: $q(x)$ und $r(x)$ sind eindeutig und können durch die „übliche“ Division bestimmt werden.

Pseudo-Division mit Rest-Primitiver EA (Forts.)

Beweis: $\text{GGT}(\beta^l a(x), b(x)) = \text{GGT}(b(x), r(x))$

und

$\text{GGT}(\beta^l a(x), b(x)) = \text{GGT}(\beta^l, 1) \text{GGT}(a(x), b(x)) = \text{GGT}(a(x), b(x))$

da a, b primitiv. Somit

$$\begin{aligned} \text{GGT}(b(x), r(x)) &= \text{GGT}(1, \text{cont}(r(x))) \text{GGT}(b(x), \text{PP}(r(x))) \\ &= \text{GGT}(b(x), \text{PP}(r(x))) \end{aligned}$$

↪ Pseudo polynomiale Restefolge zur Berechnung des GGT

↪ Primitiver EA

Lässt sich verallgemeinern: **PP Restefolge** für F_1, F_2 :

$F_1, F_2, \dots, F_{k-1}, F_k$ mit $F_i(x) = \alpha_i F_{i-2}(x) - q_i(x) F_{i-1}(x)$ mit $\text{grad}(F_i) < \text{grad}(F_{i-1}) (i > 2)$ $\alpha_i \in D, F_i \in D[x]$.

(Eine Wahl für α_0 ist $f_{i-1}^{n_i - n_{i-1} + 1} f_i$ HK von $F_{i-1}, n_i = \text{grad}(F_i)$)

Modulare Arithmetik

Wie prüft man für große Zahlen a, b , ob $a \cdot b = c$?

„Fingerprinting“ Technik:

Wähle SP-Primzahl p und teste, ob $a \cdot b \equiv c \pmod{p}$,
d. h. $a \cdot b - c$ ist teilbar durch p oder $a \cdot b$ und c haben gleichen Rest
nach Teilung durch p .

$a^* = a \pmod{p}$, $b^* = b \pmod{p}$, $c^* = c \pmod{p}$ teste, ob
 $a^* \cdot b^* \equiv c^* \pmod{p}$ (Beachte mehr als $2 \cdot 10^{17}$ 64 Bit PZ).

Testen von Polynomgleichungen $f \cdot g = h$ oder Matrizen $A \cdot B = C$ durch
Auswertung an einer Stelle.

Spezialfall von **Berechnungen via Homomorphismen**.

Hier: $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_p$ oder \mathbb{Z}_n .



Modulare Arithmetik in $R[x]$

Einfachste Moduli: $x - u$ mit $u \in R$.

Ist $f \in R[x]$, so hat $f(x) - f(u)$ u als Nullstelle, ist also durch $x - u$ teilbar.

Setzt man $q = (f(x) - f(u))/(x - u)$, so $f = q(x - u) + f(u)$ und da $f(u)$ konstant, ist sein Grad $< 1 = \text{grad}(x - u)$ oder

$f \equiv f(u) \pmod{x - u}$. \rightsquigarrow Berechnung modulo $x - u$ ist Auswertung in u .

Auswertungsmorphismus $R[x] \rightarrow R[x]/(x - u)$.

- ▶ Restklassenring nach Ideal.
- ▶ Repräsentanten $f \text{ rem } m$.
- ▶ $\mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}_m[x] \rightarrow \mathbb{Z}_m[x]/(f)$



Modulo irreduzible Polynome f

4.9 Lemma Sei F Körper, $f \in F[x]$ monisch, irreduzibel nicht konstant und $K = F[x]/(f)$. Dann ist K eine Körpererweiterung von F und $f(\alpha) = 0$ für $\alpha = (x \bmod f) \in K$.

Beweis: K ist Körper, da f irreduzibel, $F \subset K$, f nicht konstant.

$$f(\alpha) = f(x \bmod f) = (f(x) \bmod f) = 0$$



Die Euler Funktion

Erinnerung:

Eulersche Funktion: $\varphi : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$

$$\begin{aligned}\varphi(m) &= |\{0 \leq a \leq m : \text{GGT}(a, m) = 1\}| \\ &= |Z_m^\times|\end{aligned}$$

wobei Z_m^\times die **Einheitengruppe** von \mathbb{Z}_m ist.

$$\varphi(1) = 1, \varphi(p) = p - 1, \varphi(p^e) = p^e - p^{e-1} = (p - 1)p^{e-1}.$$

Schnelle Arithmetik

Wie schnell kann multipliziert/dividiert werden? Sind die Schranken für die Multiplikation bzw. Division von Langzahlen und Polynome, die wir abgeleitet haben, gut?

Multiplikation nach Karatsuba (1962 $b = 2$)

- ▶ Multiplikation von Langzahlen (oder Polynome).

Idee: Divide&Conquer Ansatz

$$\begin{array}{lll}
 u = (u_{2n-1} \cdots u_0)_b & v = (v_{2n-1} \cdots v_0)_b & \text{Basis } b \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline \bar{u}_1 & \bar{u}_0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline \bar{v}_1 & \bar{v}_0 \\ \hline \end{array} & \text{d. h.} \\
 u = \bar{u}_1 b^n + \bar{u}_0 & v = \bar{v}_1 b^n + \bar{v}_0 & \text{mit} \\
 \bar{u}_1 = (u_{2n-1} \cdots u_n)_b & \bar{u}_0 = (u_{n-1} \cdots u_0)_b &
 \end{array}$$

Reduktion:

Multiplikation Zahlen Länge $2n \rightarrow$ Multiplikation Zahlen Länge n

Schnelle Arithmetik (Forts.)

- Aufwand nach (**):

$$T(1) = 1 \quad T(2n) = 3T(n) + c \cdot n$$

für $n = 2^m$:

$$\begin{aligned}
 T(n) &= 3(3T(2^{m-2}) + c \cdot 2^{m-2}) + c \cdot 2^{m-1} \\
 &= 3^m T(1) + c \cdot 2^{m-1} (1 + 3/2 + \dots + (3/2)^{m-1}) \\
 &\approx \hat{c} \cdot 3^m = \hat{c} 2^{m \log_2 3} = \hat{c} n^{\log_2 3} \\
 &\approx \hat{c} n^{1.585}
 \end{aligned}$$

Problem: Konstante größer als bei der Schulmethode, lohnt nur ab Zahlen ($b = 2$) der Länge ≥ 500 .
Zusatzplatz für Zwischenergebnis. Implementierung „in place“ Multiplikation.

Modulare Darstellung großer Zahlen (Forts.)

Zeige:: Jede Zahl $a < m$ kann eindeutig durch Liste $a = (a_0, \dots, a_n)$ mit $a_i = a \bmod m_i$ dargestellt werden.

Surjektivität: Behauptung:

Es gibt l_j mit $\Phi(l_j) = (0, \dots, 0, 1, 0 \dots 0)$

$i = 0 : m_1 \dots m_n = m/m_0$ GGT($m/m_0, m_0$) = 1 EEA liefert $s, t \in R$ mit $s \cdot m/m_0 + tm_0 = 1 = \text{GGT}(m/m_0, m_0)$.

Setze $l_0 = s \cdot m/m_0 \rightsquigarrow l_0 \equiv 0 \bmod m_j \quad 1 \leq j \leq n$

$$l_0 = s \frac{m}{m_0} \equiv s \frac{m}{m_0} + tm_0 = 1 \bmod m_0$$

d. h. $\Phi(l_0) = (1, 0 \dots 0)$

\rightsquigarrow Algorithmus zur Berechnung von a bei Vorgabe a_0, \dots, a_n
(Lagrange, Garner).

Operationen via mod. Darstellungen

$$a = (a_0, \dots, a_n)$$

$$b = (b_0, \dots, b_n)$$

$$a, b < m$$

▶ $a + b < m \rightsquigarrow a + b = (c_0, \dots, c_n)$ mit $c_i = a_i + b_i \bmod m_i$

▶ $a \cdot b < m \rightsquigarrow a \cdot b = (c_0, \dots, c_n)$ mit $c_i = a_i b_i \bmod m_i$.

Aufwand $O(n)$ Operationen (Hier $a_i + b_i \bmod m_i$, bzw. $a_i \cdot b_i \bmod m_i$)
als Elementaroperation.

Operationen via mod. Darstellungen (Forts.)

Darstellung von Polynom a in **Koeffizientendarstellung**:

$$a(x) \leftarrow (a_0, \dots, a_n) \text{ mit } a(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

Auswertungsdarstellung:

$$a(x) \leftarrow (\hat{a}_0, \dots, \hat{a}_n) \text{ mit } \hat{a}_i = a(a_i)$$

Multiplikation und Addition, Polynom $O(n)$ Operationen
 Polynomgrad $\leq (n+1)/2$

$$a(x) \cdot b(x) \leftarrow (\hat{a}_0 \cdot \hat{b}_0, \dots, \hat{a}_n \cdot \hat{b}_n)$$

Wie sieht es mit der Division aus?



Beispiel (Forts.)

b) $R = F[x]$, $m_i = x - a_i$, $0 \leq i \leq n$, $a_0, \dots, a_n \in F$ (pv).

$f \equiv f(a_i) \pmod{(x - a_i)}$, $0 \leq i \leq n$, $f \rightarrow (f(a_0), \dots, f(a_n))$

d. h. **Auswertungshom.** in a_0, \dots, a_n , F^{n+1} koordinatenweise Operationen.

$l_i \equiv 1 \pmod{(x - a_i)}$ $l_i \equiv 0 \pmod{(x - a_j)}$, $j \neq i$

$\text{grad}(l_i) \leq n$ sind die **Lagrange Interpolanden**

$$l_i = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}$$

Für $b_0, \dots, b_r \in F$, so $f = \sum_{0 \leq i \leq n} b_i l_i$ Lagrange Interpolationspolynom mit

$f(a_i) = b_i$ für $0 \leq i \leq n$.

d. h. Chinesische Reste Algorithmus für $n + 1$ Lin Polynome ist Interpolation in $n + 1$ Werte. **Polynom ist eindeutig: Grad $\leq n$.**

Diskrete Fourier Transformation

Koeffizienten Darstellung zur modularen Darstellung (d. h. Wertedarstellung an speziellen Stellen)

x_0, \dots, x_{n-1} (hier $x_j = \omega^j$ ω nte-Einheitswurzel.)

$T_{(x_0, \dots, x_{n-1})}(a_0, \dots, a_{n-1}) = (\hat{a}_0, \dots, \hat{a}_{n-1})$, wobei

$$\hat{a}_j = a_0 + a_1 x_j + \dots + a_{n-1} x_j^{n-1}.$$

Setzt man $a(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}$

\rightsquigarrow Auswertung von Polynomen vom Grad höchstens $n - 1$ an den Stellen $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$.

Auswertung eines Polynoms vom Grad $n - 1$ (Horner's Regel) an einer Stelle kostet $O(n)$ Operationen (in R). Übliche Kosten an n Stellen $\rightsquigarrow O(n^2)$.

Ziel: Reduktion dieser Kosten auf $O(n \log n)$ durch **geeignete Wahl** der Auswertungsstellen x_j : **prim. E.W.**

Diskrete Fourier Transformation: Die Auswertung

Angenommen n **gerade**, dann $a(x) = b(x^2) + x \cdot c(x^2)$, wobei

$$b(y) = a_0 + a_2y + \cdots + a_{n-2}y^{n/2-1}, \quad c(y) = a_1 + a_3y + \cdots + a_{n-1}y^{n/2-1}.$$

Hierbei haben $b(y)$ und $d(y)$ $\text{grad} \leq \text{grad}(a(x))/2$.

4.12 Lemma Sei $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ Punktmenge in R , die die **Symmetriebedingung**

(*) $x_{(n/2)+i} = -x_i, i \in \{0, 1, \dots, n/2 - 1\}$ erfüllt.

Es gibt ein Auswertungsverfahren, so das für die Kosten $T(n)$ für die Auswertung eines Polynoms vom Grad $n - 1$ an dieser Punktmenge, gilt

$$T(1) = 0 \text{ und } T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + c \cdot \frac{n}{2}$$

für geeignete Konstante c .

Diskrete Fourier Transformation: Die Auswertung

Beweis: Wegen (*) gilt

$$x_0^2 = x_{n/2}^2, x_1^2 = x_{n/2+1}^2 \cdots x_{n/2-1}^2 = x_{n-1}^2,$$

d. h. es gibt nur $n/2$ verschiedene Quadrate, d. h.

- ▶ a vom Grad höchstens $n - 1$ kann an den Stellen $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ ausgewertet werden, durch Auswertung der Polynome b und c an den Stellen $\{x_0^2, \dots, x_{n/2-1}^2\}$, diese sind vom Grad höchstens $\frac{n}{2} - 1$.
- ▶ Hinzukommen $n/2$ Multiplikationen (Berechnung von x_j^2) und $\frac{n}{2}$ Multiplikationen, Additionen und Subtraktionen, um die Werte zu kombinieren. \rightsquigarrow Behauptung.

Die schnelle Fourier Transformation verwendet dieses Lemma rekursiv, d. h. **Symmetrie-Eigenschaft muss für die $n/2$ Punkte gelten usw.**

Diskrete Fourier Transformation bzgl. Primitiven Einheitswurzeln

Voraussetzung:

n besitze eine multiplikative Inverse in R (z. B. wenn R Körper)

Seien

$A = (A_{ij})_{n \times n}$ mit $A_{ij} = \omega^{ij}$, $0 \leq i, j \leq n$, $\mathbf{a} = [a_0, \dots, a_{n-1}]^T$, dann

$$F(\mathbf{a}) := A\mathbf{a}, \text{ wobei } F(\mathbf{a})_i = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{ik}$$

heißt **diskrete Fourier Transformierte von \mathbf{a}** (bzgl. ω).

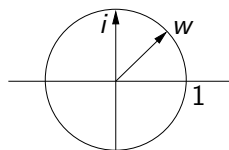
Beispiel

4.14 Beispiel

a) Sei $R = \mathbb{C}$ komplexe Zahlen, $n = 8$

$\omega = e^{2\pi i/8} = e^{\pi i/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ist primitive 8-EW.

$\omega^2 = e^{\pi i/2} = i$ erfüllt auch
 $(\omega^2)^8 = 1$, aber $(\omega^2)^4 = 1$,
 d. h. ω^2 ist 8-Wurzel von 1,
 aber nicht primitiv.



$$\sum_{j=0}^{8-1} e^{\pi i j/4} = 1 + e^{\pi i/4} + e^{\pi i/2} + e^{3\pi i/4} + \dots + e^{7\pi i/4} = 0$$

(heben sich paarweise auf!)

Beispiel (Forts.)

b) $R = \mathbb{Z}_{17}$, $n = 4$. 4 ist eine 4 EW, da $4^4 = 256 \equiv 1 \pmod{17}$.

Sie ist auch primitiv, da $4^2 = 16$ und $4^3 = 13$ und $\sum_{j=0}^3 4^j = 0 \pmod{17}$.

Fourier Punkte: $\{1, 4, 4^2, 4^3\} = \{1, 4, 16, 13\}$

Diskrete Fourier Transformation:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 16 & 13 \\ 1 & 16 & 1 & 16 \\ 1 & 13 & 16 & 4 \end{bmatrix} : (\mathbb{Z}_{17})^4 \rightarrow (\mathbb{Z}_{17})^4$$

Schnelle Fourier Transformation (FFT)

```

procedure FFT( $N, \omega, a(x)$ )
begin
    {  $N$  Potenz von 2,  $\omega$  primitive  $n$ -te EW,  $a(x)$  Polynom }
    { mit  $\text{Grad}(a(x)) \leq N - 1$ . Ausgabe  $N$  Komponenten der FFT }
if  $N=1$  then
     $A_0 := a_0$ 
else
    begin
 $b(x) := \sum_{i=0}^{N/2-1} a_{2i} \cdot x^i$ ;  $c(x) := \sum_{i=0}^{N/2-1} a_{2i+1} \cdot x^i$ ;
 $B := \text{FFT}(N/2, \omega^2, b(x))$ ;  $C := \text{FFT}(N/2, \omega^2, c(x))$ ;
for  $i$  from 0 to  $N/2 - 1$  do
    begin
 $A_i := B_i + \omega^i C_i$ ;  $A_{N/2+i} := B_i - \omega^i C_i$ ;
    end
    end
return  $((A_0, A_1, \dots, A_{N-1}))$ ;
end.

```

Schnelle Fourier Transformation (FFT): Analyse

Aufwand: $O(n \log n)$ Operationen: Sei $n = 2^m$ dann

$$T(1) = 0, T(2^k) = 2T(2^{k-1}) + c2^{k-1} \quad k \geq 1$$

$$\begin{aligned} T(n) &= T(2^m) = 2T(2^{m-1}) + c2^{m-1} = 2^2T(2^{m-2}) + c2^{m-1}2 \\ &= 2^3T(2^{m-3}) + c2^{m-1}3 \dots = 2^mT(1) + c2^{m-1}m \\ &= c2^{m-1}m = c\frac{n}{2} \log n \end{aligned}$$

Beachte: Eignet sich gut für Parallelisierung: Rekurrenzgleichung:

$$T^P(2^k) = T^P(2^{k-1}) + c2^{k-1}$$

(FFT):: Ergebnis

Modulare Darstellung eines Polynoms vom Grad $N - 1$ an N -Fourierpunkte kann mit $O(N \log N)$ Grundoperationen in $R (K)$ berechnet werden.

$$\begin{array}{l} R[x] \\ \text{grad} \leq N-1 \end{array} \rightarrow R[x]/(x - \omega^0) \times \cdots \times R[x]/(x - \omega^{N-1})$$

Wie sieht es mit der **Umkehrung** aus

$$T_{(x_0, \dots, x_{N-1})} \leftrightarrow V(x_0, \dots, x_{N-1}) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 \cdots (x_0)^{N-1} \\ 1 & x_1 \cdots (x_1)^{N-1} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{N-1} \cdots (x_{N-1})^{N-1} \end{vmatrix}$$

Vandermonde Matrix

Inverse Fourier Transformation

Beweis: Sei $0 < p < N$. Dann

$(\omega^p)^N = (\omega^N)^p = 1$ und $(\omega^p) \neq 1$. Da ω PEW

$(x^N - 1) = (x - 1)(x^{N-1} + x^{N-2} + \dots + x + 1)$, d. h. ω^p ist Nullstelle von $x^{N-1} + \dots + x + 1 \rightsquigarrow 0 = (\omega^p)^{N-1} + (\omega^p)^{N-2} + \dots + (\omega^p) + 1$.

Für $0 < p < N$ und $-N < p < 0$ (Mult. $\omega^{-p(N-1)}$).

Für $p = 0$ ist der Ausdruck N .

Sei $T_{(1, \omega, \dots, \omega^{N-1})}(a_0, \dots, a_{N-1}) = (\hat{a}_0, \dots, \hat{a}_{N-1})$ mit

$$\hat{a}_i = \sum_{j=0}^{N-1} a_j (\omega^i)^j, \quad i = 0, \dots, N-1$$

$$N^{-1} \sum_{i=0}^{N-1} \hat{a}_i \omega^{-ki} = N^{-1} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} a_j \omega^{ij} \omega^{-ki}$$

$$= N^{-1} \sum_{j=0}^{N-1} a_j \sum_{i=0}^{N-1} \omega^{ij} \omega^{-ki} = N^{-1} \sum_{j=0}^{N-1} a_j \left(\sum_{i=0}^{N-1} \omega^{(j-k)i} \right) = a_k$$

Inverse Fourier Transformation

$$\begin{aligned}
 V(1, \omega, \dots, \omega^{N-1})^{-1} &= N^{-1} \begin{vmatrix} 1 & & 1 \dots 1 \\ 1 & \omega^{-1} & \dots \omega^{-(N-1)} \\ \vdots & & \\ 1 & \omega^{-(N-1)} & \dots \omega^{-(N-1)^2} \end{vmatrix} \\
 &= N^{-1} V(1, \omega^{-1}, \dots, \omega^{-(N-1)})
 \end{aligned}$$

Schnelle Polynommultiplikation

$$\begin{array}{lcl}
 a(x) \text{ grad } m & & a(x) \cdot b(x) \quad \text{grad } m+n \\
 b(x) \text{ grad } n & &
 \end{array}$$

- ▶ Sei $N = 2^k > m + n$ ω prim. n-te EW
- ▶ $T_{(1, \omega, \dots, \omega^{N-1})}(a_0, \dots, a_m, 0, \dots, 0) = (\hat{a}_0, \dots, \hat{a}_m, \dots, \hat{a}_{N-1})$
- ▶ $T_{(1, \omega, \dots, \omega^{N-1})}(b_0, \dots, b_n, 0, \dots, 0) = (\hat{b}_0, \dots, \hat{b}_n, \dots, \hat{b}_{N-1})$
- ▶ $a(x) \cdot b(x) = (c_0, c_1, \dots, c_{m+n})$
- ▶ $T_{(1, \omega, \dots, \omega^{N-1})}(c_0, \dots, c_{m+n}, 0, \dots, 0) = (\hat{a}_0 \hat{b}_0, \dots, \hat{a}_{N-1} \hat{b}_{N-1})$

Beispiel

4.21 Beispiel

$$a(x) = 3x^3 + x^2 - 4x + 1$$

$$b(x) = x^3 + 2x^2 + 5x - 3 \quad (\mathbb{Z}_{41})$$

14 primitive 8-te EW (wie eben).

$$A = \text{FFT}(8, 14, a(x)) = (1, 9, -19, -18, 3, 16, 19, -3)$$

$$B = \text{FFT}(8, 14, b(x)) = (5, 5, 0, 14, -7, -6, -10, 16)$$

$$C = (5, 4, 0, -6, 20, -14, 15, -7)$$

$$= \text{FFT}(8, 14, a(x)b(x))$$

$$c = 8^{-1} \text{FFT}(8, 3, -7x^7 + 15x^6 - 14x^5 + 20x^4 - 6x^3 + 4x + 5)$$

$$= (-3, 17, 20, -11, 13, 7, 3, 0)$$

$$c(x) = 3x^6 + 7x^5 + 13x^4 - 11x^3 + 20x^2 + 17x - 3$$

Berechnung primitiver n-ter EW

- ▶ $F = \mathbb{C}$ einfach $\omega = e^{2\pi i/n}$
z. B. $e^{\pi i/6} = (\sqrt{3} + i)/2$ ist primitive 12-te EW in \mathbb{C}
- ▶ $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}_p$

4.22 Satz \mathbb{Z}_p hat primitive n-te EW gdw $n \mid p - 1$.

Beweis: Ist w primitive n-te EW in \mathbb{Z}_p , so bildet die Menge der Fourier Punkte $\{1, \omega, \dots, \omega^{n-1}\}$ eine zyklische Untergruppe der multiplikativen Gruppe von \mathbb{Z}_p . Diese hat $p - 1$ Elemente $\rightsquigarrow n \mid p - 1$ (Lagrange).

Die multiplikative Gruppe endlicher Körper ist zyklisch. Sei α erzeugendes Element der multiplikativen Gruppe von $\mathbb{Z}_p : \mathbb{Z}_p^\times = \{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{p-2}\}$ mit $\alpha^{p-1} = 1$

Sei $n \mid p - 1$. Setzt man $\omega = \alpha^{(p-1)/n}$, so gilt $\omega^n = \alpha^{p-1} = 1$, d. h. ω ist n-te EW. Für $0 < k < n$, gilt $(p-1) \cdot k/n < (p-1)$, $\omega^k = \alpha^{(p-1)k/n} \neq 1$, also ist ω primitive n-te EW.

Berechnung primitiver n-ter EW

4.23 Beispiel In \mathbb{Z}_{41} gilt $8 \mid (41 - 1)$, d. h. es gibt primitive 8-te EW in \mathbb{Z}_{41} , z. B. 14 ist primitive 8-te EW in \mathbb{Z}_{41} .

Wie bestimmt man eine primitive n-te EW, wenn $n \mid p - 1$ testen ! oder finde erzeugende für \mathbb{Z}_p^* .

Anwendung $n = 2^r$ für Fourier-Transformation $2^r \mid p - 1$ oder $p = 2^r k + 1$ für ein k ungerade.

Solche Primzahlen heißen **Fourier Primzahlen** zu 2^r .

Vorteil: Es gibt viele primitive Elemente.

Hilfsatz: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $\text{GGT}(a, b) = 1$. Die Anzahl der Primzahlen $\leq x$ der Form $ak + b$, $k = 1, 2, \dots$ ist in etwa

$$\frac{x}{\log x \cdot \Phi(a)} \quad (\Phi \text{ Euler Funktion}).$$

Da alle ungeraden Zahlen $< 2^r$ teilerfremd zu 2^r sind und dies die Hälfte der ganzen Zahlen ist, gilt $\Phi(2^r) = 2^{r-1}$, d. h. es gibt etwa $\frac{x}{\log x \cdot 2^{r-1}}$

Fourier Primzahlen $\leq x$.

Berechnung primitiver n-ter EW

4.24 Beispiel Sei $x = 2^{31}$ SP-Zahlen 32 Bit Wörter. Für $r = 20$

$\rightsquigarrow \frac{2^{31}}{\log(2^{31}) \cdot \Phi(2^{19})} \approx 130$ Primzahlen der Form $2^e \cdot k + 1$, $e \geq 20$ im Intervall $2^{20} << 2^{31}$.

Jede solche Fourier Primzahl kann zur Berechnung von FFT's der Größe 2^{20} verwendet werden.

4.25 Satz a ist erzeugendes Element für \mathbb{Z}_p^x gdw $a^{(p-1)/q} \neq 1 \pmod p$ für jeden Primfaktor von $p - 1$.

Beweis folgt aus Lagrange ($H \leq G \rightsquigarrow |H| \mid |G|$)

\rightsquigarrow Probabilistischer Algorithmus um erzeugendes Element für \mathbb{Z}_p^x :

Faktorisiere $p - 1$ (möglich für $p \approx 2^{31}, 2^{63}$?) vorprozess. Wähle zufällig $a \in \{2, \dots, p - 1\}$, berechne $a^{p-1/q}$ für alle Teiler q von $p - 1$.

Beispiel (Forts.)

\mathbb{Z}_m N gegeben, bestimme m und ω , $N = 2^k$

▶ N invertierbar in $\mathbb{Z}_m \rightsquigarrow \text{GGT}(N, m) = 1$.

▶

$$\begin{aligned}
 a \in R, N = 2^k \rightsquigarrow \sum_{i=0}^{N-1} a^i &= \prod_{i=0}^{k-1} (1 + a^{2^i}) \text{ Ind. nach } k \\
 &= (1 + a) \sum_{i=0}^{N/2-1} (a^2)^i
 \end{aligned}$$

▶ Sei $m = \omega^{N/2} + 1$ mit $\omega \in R$, $\omega \neq 0$. Dann

$$\sum_{i=0}^{N-1} \omega^{ip} \equiv 0 \pmod{m} \text{ für } 1 \leq p < N$$

Beispiel (Forts.)

Beweis: Zeige $1 + \omega^{2^j p} \equiv 0 \pmod{m}$ für ein j $0 \leq j < k$. Sei $p = 2^s p'$ mit p' ungerade, dann $0 \leq s < k$. Wähle j mit $j + s = k - 1 \rightsquigarrow 1 + \omega^{2^j p} = 1 + \omega^{2^{k-1} p'} = 1 + (m-1)^{p'}$ wegen $(m-1) \equiv -1 \pmod{m}$, p' ungerade $\rightsquigarrow (m-1)^{p'} \equiv -1 \pmod{m}$, \rightsquigarrow Behauptung.

4.27 Satz

Seien n, ω positive Potenzen von 2 und $m = \omega^{n/2} + 1$, dann besitzt n Inverse in \mathbb{Z}_m und ω ist in \mathbb{Z}_m primitive n -te EW.

Beweis: $\omega \neq 1$ $\omega^n = \omega^{n/2} \cdot \omega^{n/2} \equiv (-1)(-1) \pmod{(\omega^{n/2} + 1)}$.

Problem: primitive EW $R[x]/\langle x^n + 1 \rangle$

$$x^n \equiv -1 \pmod{(x^n + 1)} \quad x^{2n} = (x^n)^2 \equiv 1 \pmod{(x^n + 1)}$$

$\omega = (x \pmod{(x^n + 1)})$ ist $2n$ -te EW.

Anwendung FFT auf Langzahlmultiplikation

Multiplikation nach Schönhage-Strassen:: div & conq + FFTA

Idee: Partitionierung der Zahlen in b -Blöcke der Länge l , d. h. $n = b \cdot l$, falls n Länge der Eingabezahlen.



b -Blöcke

Die b -Blöcke werden als Koeffizienten eines Polynoms (vom Grad $b - 1$) mit Koeffizienten $< 2^l$ aufgefasst.

Wertet man diese Polynome an geeigneten Stellen aus, multipliziert diese Werte und interpoliert, so lässt sich das Produkt bestimmen.

FFT + Faltungssätze.

Aufwand: $O(n \log n \log \log n)$ für die Multiplikation von Langzahlen der Länge n . Siehe von zur Gathen/Gerhard pp.225.

Modulare Algorithmen: Allgemeine Methoden

Anwendungsfälle

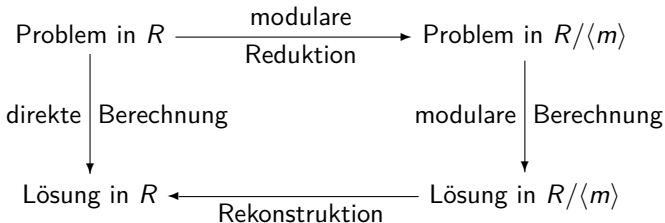
- ▶ FFT-Anwendung zur Multiplikation von Polynomen.
- ▶ GGT-Berechnung in $\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{m_0} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_k}$ um Koeffizientenwachstum zu vermeiden.
- ▶ $\mathbb{Z}[x]$ → $\mathbb{Z}_p[x]$
nicht euklid euklidisch
- ▶ Faktorisierung, Wurzelberechnung,...

3 Varianten:

Big-Prime, Small-Primes, Prime-Power

Modulare Methoden: Big-Prime

Big-Prime: R euklidisch $m = p$

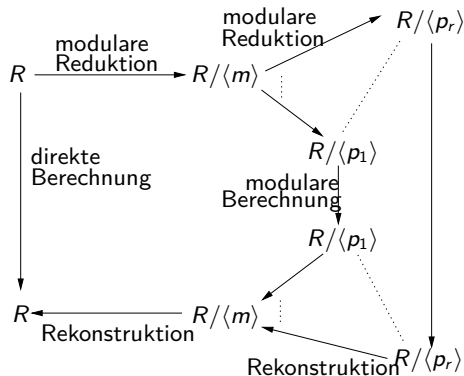


Benötigt werden:

- ▶ Schranke für die Lösung in R .
- ▶ Finde geeignete Moduli.

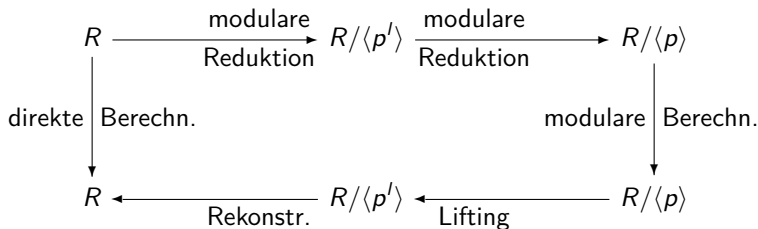
Modulare Methoden: Small-Primes

- **Small Primes::** $m = p_1 \dots p_r$ $p_i \neq p_j (i \neq j)$



Modulare Methoden: Prime Power

- ▶ **Prime-Power::** $m = p^l$ p Primzahl



- ▶ Wahl der p_i steht frei, z. B. Fourier Primzahlen (schnelle Polynomarithmetik)
- ▶ Verteilung (Parallelisierung)

Chinesische Reste Algorithmen

Die Algorithmen von Garner und Newton:

Umkehrung modularer- und Auswertungshomomorphismen.

4.28 Beispiel Wachstum der Zwischenergebnisse.

Systeme linearer Gleichungen. Gauss Methode::

$$22x + 44y + 74z = 1 \quad \text{Gauss} \quad 22x + 44y + 74z = 1$$

$$15x + 14y - 10z = -2 \quad \rightsquigarrow \quad -352y - 1330z = -59$$

$$-25x - 28y + 20z = 34 \quad \text{Elimin.} \quad 484y + 2290z = 773$$

$$\rightsquigarrow^* \quad 1257315840x = 7543895040$$

$$\quad -57150720y = 314328960$$

$$\quad \quad 162360z = 243540$$

$$\rightsquigarrow \quad x = 6 \quad y = -11/2 \quad z = 3/2$$

n -Gleichungen, n unb, Koeffizientenlänge w .

\rightsquigarrow Reduziertes System mit Koeffizienten $\approx 2^{n-1}w$ Länge

Beispiel (Fort.)

Cramers Regel::

$$x = \frac{\text{Det}[\]}{\text{Det}[\]} \quad y = \dots \quad z = \dots$$

wobei Länge $\text{Det}[\] \approx n \cdot w$, d. h. Ergebnis (Länge) ist nicht Ursache der Komplexität.

Beachte Methode ist anwendbar auf lineare Gleichungssysteme mit Koeffizienten in Polynomringen. Dann tritt exponentielles Wachstum der Grade der Polynome (als Koeffizienten) auf.

Normierung durch Rechnung im Quotientenkörper. Kosten!



Ringmorphisamen

$\Phi : R \rightarrow R'$ Homomorphismus, falls

i) $\Phi(a + b) = \Phi(a) + \Phi(b) \quad (a, b \in R)$

ii) $\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b) \quad (a, b \in R)$

iii) $\Phi(1) = 1$

iv) $\Phi(0) = 0 \quad \Phi(-a) = -\Phi(a)$

Ringmorphismen: Beispiele

4.29 Beispiel

a) **Modulare Homomorphismen:** $m \in \mathbb{Z}$

$$\Phi_m \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{Z}_m[x_1, \dots, x_n]$$

mit $\Phi_m(x_i) = x_i$ $\Phi_m(a) = (a \bmod m)$ $a \in \mathbb{Z}$.

b) **Auswertungshomomorphismen:** $\alpha \in D$

$$\Phi_{x_i - \alpha} : D[x_1, \dots, x_n] \rightarrow D[x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n]$$

$$\Phi_{x_i - \alpha}(a(x_1, \dots, x_n)) = a(x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

c) **Komposition Homomorphismen:**

$$\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n] \xrightarrow{\Phi_p} \mathbb{Z}_p[x_1, \dots, x_n] \xrightarrow{x_n - \alpha_n \in \mathbb{Z}_p} \dots \xrightarrow{x_2 - \alpha_2 \in \mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[x_1]$$

Ringmorphismen: Beispiel

$$a(x) = 7x + 5 \quad b(x) = 2x - 3 \quad c(x) = a(x)b(x)$$

$$\varphi_1 := \Phi_{x-0}\Phi_5 : \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}_5 \quad \varphi_1(a) = 0$$

$$\varphi_1(b) = 2 \quad \varphi_1(c) = 0$$

$$\varphi_2 := \Phi_{x-1}\Phi_5 : \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}_5 \quad \varphi_2(a) = 2$$

$$\varphi_2(b) = 4 \quad \varphi_2(c) = 3$$

$$c(0) \equiv 0 \pmod{5}, c(1) \equiv 3 \pmod{5}, c(2) \equiv 4 \pmod{5}$$

Analog mit $m = 7$

$$c(0) \equiv 6 \pmod{7}, c(1) \equiv 2 \pmod{7}, c(2) \equiv 5 \pmod{7}.$$

Rekonstruktion von $c(x)$ in $\mathbb{Z}[x]$?

Chinesischer Restesatz Algorithmen

R euklidisch, $m_0, \dots, m_n \in R$ paarweise teilerfremd.

$$m = m_0 \cdots m_n \quad \langle m \rangle = \langle m_0 \rangle \cdots \langle m_n \rangle$$

$$\Phi_i := \Phi_{m_i} : R \rightarrow R/\langle m_i \rangle :: a \rightarrow a \bmod m_i$$

$$\Phi : \Phi_0 \times \cdots \times \Phi_n : R \rightarrow R/\langle m_0 \rangle \times \cdots \times R/\langle m_n \rangle$$

ist surjektiv mit Kern $\langle m \rangle$.

$$R/\langle m \rangle \cong R/\langle m_0 \rangle \times \cdots \times R/\langle m_n \rangle$$

Problem: Gegeben $(a_0, \dots, a_n) \in R/\langle m_0 \rangle \times \cdots \times R/\langle m_n \rangle$.

Berechne $a \in R/\langle m \rangle$ mit $\Phi_i(a) = a_i$.

Interpolationsproblem

1. Lösung Lagrange: l_i mit $\Phi_i(l_i) = 1$ sonst 0 ($i \neq j$) über EEA.

Garner & Newton Interpolationsalgorithmen

Mixed Radix Darstellung: $a \in R/\langle m \rangle$ lässt sich darstellen als

$$(*) \quad a = \nu_0 + \nu_1(m_0) + \nu_2(m_0m_1) + \cdots + \nu_n \left(\prod_{i=0}^{n-1} m_i \right)$$

wobei $\nu_k \in R/\langle m_k \rangle \quad k = 0, 1, \dots, n$.

Beachte: Ausdruck $(*)$ muss richtig interpretiert werden.

- ▶ Summe und Produkte sind in $R/\langle m \rangle$ zu rechnen.
- ▶ Die $\nu_k \in R/\langle m_k \rangle \hookrightarrow R/\langle m \rangle$. Diese Einbettung ist möglich, da $\langle m \rangle \subseteq \langle m_k \rangle$ für $k = 0, 1, \dots, n$, d. h. die Repräsentanten mod m_k können als Repräsentanten mod m gewählt werden.
- ▶ Existenz und Eindeutigkeit als Verallgemeinerung der Standarddarstellung einer Zahl zur basis β : $a = \sum_{i=0}^n \nu_i \beta^i \quad 0 \leq a < \beta^{n+1}, 0 \leq \nu_i < \beta$

Garner & Newton Interpolationsalgorithmen

- ▶ Fall \mathbb{Z} : $\mathbb{Z}_{m_k}, \mathbb{Z}_m$ in positiver Darstellung oder $\mathbb{Z}_{m_k}, \mathbb{Z}_m$ in symmetrischer Darstellung. Nicht gemischt!
- ▶ Fall $D[x]$ D Polynomring über \mathbb{Z}_p , $\alpha_i \in \mathbb{Z}_p$ (D), $\nu_k \in F_D$, $0 \leq k \leq n$.

$$a(x) = \nu_0 + \nu_1(x - \alpha_0) + \nu_2(x - \alpha_0)(x - \alpha_1) + \cdots + \nu_n \prod_{i=0}^{n-1} (x - \alpha_i)$$

Darstellung ist eindeutig unter diesen Bedingungen Existenz!

Jede Menge von Polynomen $m_k(x) \in F_D[x]$, $k = 0, \dots, n$ mit $\text{grad}(m_k(x)) = k$ ist Basis für Polynome mit $\text{grad} \leq n$ über F_D .

Newton Koeffizienten

Berechnung der ν_i , $i = 0, \dots, n$, $\nu_i \in R/\langle m_k \rangle$

$$a = \nu_0 + \nu_1(m_0) + \nu_2(m_0 m_1) + \dots + \nu_n \left(\prod_{i=0}^{n-1} m_i \right)$$

$$\Phi_i(a) = a_i \quad i = 0, \dots, n \quad a_i \in R/\langle m_i \rangle$$

- ▶ $a \equiv \nu_0 \pmod{m_0}$ (oder $a(\alpha_0) = \nu_0 = a_0$), d. h. $\nu_0 = a_0$.
- ▶ Sind die Koeffizienten ν_0, \dots, ν_{k-1} bestimmt, so folgt

$$a \equiv \nu_0 + \nu_1(m_0) + \dots + \nu_k \left(\prod_{i=0}^{k-1} m_i \right) \pmod{m_k}$$

Newton Koeffizienten (Fort.)

Wähle ν_k , so dass

$$\nu_0 + \nu_1(m_0) + \cdots + \nu_k \left(\prod_{i=0}^{k-1} m_i \right) \equiv a_k \pmod{m_k}$$

Da $\text{GGT} \left(\prod_{i=0}^{k-1} m_i, m_k \right) = 1$, ist $\prod_{i=0}^{k-1} m_i$ invertierbar mod m_k

(Beachte im Polynomfall

$$a(\alpha_k) = \nu_0 + \nu_1(\alpha_k - \alpha_0) + \cdots + \nu_k \prod_{i=0}^{k-1} (\alpha_k - \alpha_i) = a_k \in D$$

Da die $\alpha_i \in \mathbb{Z}_p, \alpha_i \neq \alpha_j, i \neq j$, folgt $\prod_{i=0}^{k-1} (\alpha_k - \alpha_i) \in \mathbb{Z}_p$ invertierbar).

Newton Koeffizienten (Forts.)

Also gilt

$$\nu_k \equiv \left[a_k - \left[\nu_0 + \nu_1(m_0) + \cdots + \nu_{k-1} \left(\prod_{i=0}^{k-2} m_i \right) \right] \right] \cdot \left(\prod_{i=0}^{k-1} m_i \right)^{-1} \pmod{m_k}$$

oder

$$\nu_k = \left[a_k - \left[\nu_0 + \nu_1(\alpha_k - \alpha_0) + \cdots + \nu_{k-1} \left(\prod_{i=0}^{k-2} (\alpha_k - \alpha_i) \right) \right] \right] \cdot \left(\prod_{i=0}^{k-1} (\alpha_k - \alpha_i) \right)^{-1}$$

d. h. $\nu_k \in \mathbb{Z}/\langle m_i \rangle = \mathbb{Z}_{m_i}$ bzw. $\nu_k \in D$.

Garner's Algorithmus/Newton Interpol. Algorithmus

Gemischte Basisdarstellung

```

procedure INTEGERCRA  $((m_0, \dots, m_n), (a_0, \dots, a_n))$ 
 $\{m_i \in \mathbb{Z}, \text{GGT}(m_i, m_j) = 1 \ (i \neq j), a_i \in \mathbb{Z}_{m_i}\}$ 
    {Ausgabe  $a \in \mathbb{Z}_m$  mit  $m = \prod m_i \quad a \equiv a_i \pmod{m_i}, i = 1, \dots, n$ }
    { Schritt 1: Berechne die benötigten Inversen }
    {Inverse( $a, q$ ) =  $a^{-1} \pmod{q}$ }
for  $k$  from 1 to  $n$  do
    begin
        product :=  $\Phi_{m_k}(m_0)$ ;
        for  $i$  from 1 to  $k - 1$  do
            product :=  $\Phi_{m_k}(\text{product} \cdot m_i)$ ;
         $\gamma_k$  := inverse(product,  $m_k$ );
    end

```


Bemerkungen zu Garner's Algorithmus

Symmetrische Darstellung: $|\nu_k| \leq (m_k - 1)/2$

$k = 0, \dots, n$

$$\begin{aligned} |a| &\leq \frac{m_0 - 1}{2} + \frac{m_1 - 1}{2} m_0 + \dots + \frac{m_n - 1}{2} \left(\prod_{i=0}^{n-1} m_i \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \left[\left(\prod_{i=0}^n m_i \right) - 1 \right] \end{aligned}$$

Auch für $0 \leq \nu_k \leq m_k - 1 \quad k = 0, \dots, n$

$$a \leq \left(\prod_{i=0}^{n-1} m_i \right) - 1$$

Berechnet wird

$$a = \nu_0 + m_0(\nu_1 + m_1(\nu_2 + \dots + m_{n-2}(\nu_{n-1} + m_{n-1}(\nu_n)) \dots))$$

Newton Interpolationsalgorithmus

- ▶ Im Fall $D[x]$ sind die Homomorphismen Auswertungshomomorphismen an Stellen α_i d.h. $\Phi_{x-\alpha_i} : D[x] \rightarrow D$
 D Polynomring über \mathbb{Z}_p , $\alpha_i \in \mathbb{Z}_p$, $i = 0, \dots, n$.
Zu bestimmen ist eind. Polynom $a(x) \in F_D[x]$ mit $\text{grad}(a(x)) \leq n$ mit $a(\alpha_i) = a_i \in D$ ($0 \leq i \leq n$).
- ▶ Man beachte, dass in den Anwendungen die a_i und somit die berechneten ν_i polynome mit Koeffizienten in \mathbb{Z}_p sind und bei der Bestimmung von ν_i nur Koeffizientenoperationen durchzuführen sind.
- ▶ Beide Algorithmen sehen identisch aus. Im NIA steht an Stelle der m_i stets $(\alpha_k - \alpha_i)$ und für Φ_{m_k} steht stets Φ_p und die Inverse ist in \mathbb{Z}_p zu berechnen.
- ▶ In beiden Algorithmen haben die Objekte stets drei Darstellungen.

Beispiel (Forts.)

4.31 Beispiel Eingangsproblem : System linearer Gleichungen.

Schwierigkeit: Muss keine Lösung in \mathbb{Z} haben!

$$x_1 = \det \begin{vmatrix} 1 & 44 & 74 \\ -2 & 14 & -10 \\ 34 & -28 & 20 \end{vmatrix} \quad y_1 = \det \begin{vmatrix} 22 & 1 & 74 \\ 15 & -2 & 10 \\ -25 & 34 & 20 \end{vmatrix}$$

$$z_1 = \det \begin{vmatrix} 22 & 44 & 1 \\ 15 & 14 & -2 \\ -25 & -28 & 34 \end{vmatrix} \quad d = \det \begin{vmatrix} 22 & 44 & 74 \\ 15 & 14 & -10 \\ -25 & -28 & 20 \end{vmatrix}$$

$$x = x_1/d \quad y = y_1/d \quad z = z_1/d \quad \in \mathbb{Q}$$

- In \mathbb{Z}_p berechne $x \bmod p, y \bmod p, z \bmod p, d \bmod p$ via Gauss \rightsquigarrow aus $x_1 \equiv xd \bmod p, y_1 \equiv yd \bmod p, z_1 \equiv zd \bmod p \stackrel{\text{CRA}}{\rightsquigarrow} x_1, y_1, z_1, d$ aus $\mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathbb{Q}$ Lösung.

Beispiel (Forts.)

In \mathbb{Z}_7 :

$$\begin{array}{rcl}
 x + 2y - 3z = 1 & \text{Gauss} & x \equiv -1 \pmod{7} \\
 x \quad -3z = -2 & \rightsquigarrow & y \equiv -2 \pmod{7} \\
 3x \quad -z = -1 & & z \equiv -2 \pmod{7} \\
 & & d \equiv -2 \pmod{7}
 \end{array}$$

In $\mathbb{Z}_{11}, \mathbb{Z}_{13}, \mathbb{Z}_{17}, \mathbb{Z}_{19}$ liefert

$$\begin{array}{rcccc}
 x_1 \equiv -5 \pmod{11} & y_1 \equiv 0 \pmod{11} & z_1 \equiv -4 \pmod{11} & d \equiv 1 \pmod{11} \\
 -2 & 4 & 6 & 4 \pmod{13} \\
 5 & -6 & -3 & -2 \pmod{17} \\
 9 & 6 & 7 & -8 \pmod{19}
 \end{array}$$

Beispiel (Forts.)

Modulare Darstellungen für x_1 und d

$$x_1 = (2, -5, -2, 5, 9), d = (-2, 1, 4, -2, -8)$$

$$m_0 = 7, m_1 = 11, m_2 = 13, m_3 = 17, m_4 = 19$$

Garner $\rightsquigarrow x_1 = -44280, \dots, d = -7380$

Vergleiche diese mit den Zahlen die über Gauss Elimination in \mathbb{Z} auftreten!

$$\rightsquigarrow x = \frac{-44280}{-7380} = 6 \quad y = \frac{40590}{-7380} = -\frac{11}{2} \quad z = \frac{-11070}{-7380} = \frac{3}{2}$$

Problem hier: Lösung ist nicht ganzzahlig, sondern in \mathbb{Q} .
Rekonstruktion rationaler Lösungen bei Koeffizienten in \mathbb{Z} .

Polynombeispiel (Forts.)

Schritt 3:

$$a(0, y) = -21 - 9(y - 0) = -9y - 21$$

- **Analog:** $\mathbb{Z}_{97}[x, y]/\langle x - 1 \rangle$ und $\mathbb{Z}_{97}[x, y]/\langle x - 2 \rangle$ liefert

$$a(1, y) = -3y + 20$$

$$a(2, y) = 5y - 36$$

- Multivariater Schritt: Garner mit $D = \mathbb{Z}_{97}[y]$
 $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $a_0 = a(0, y)$, $a_1 = a(1, y)$, $a_2 = a(2, y)$
- Gesucht $a(x, y) \in D[x] = \mathbb{Z}_{97}[y][x]$.

Polynombeispiel: Berechnung von $a(x, y)$

► **Schritt 1:**

$$\gamma_1 = 1, \gamma_2 = [(\alpha_2 - \alpha_0)(\alpha_2 - \alpha_1)]^{-1} \bmod 97 = -48$$

► **Schritt 2:**

$$\nu_0 = -9y - 21, \nu_1 = 6y + 41, \nu_2 = y$$

► **Schritt 3:**

$$a(x, y) = (-9y - 21) + (6y + 41)(x - 0) + y(x - 0)(x - 1)$$

Beispiel: Modulare Determinantenberechnung

4.33 Beispiel Modulare Determinantenberechnung (vzGG S101)

Sei $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{Z}^{n \times n}$. Berechne $\det A$

Gauss Elimination über \mathbb{Q} , $2n^3$ Operationen in \mathbb{Q} . Ist dies "pol Zeit"?

Die Anzahl der Wortoperationen hängt von den Zähler und Nenner der Zwischenergebnissen ab. Wie ist ihr Wachstum? Betrachte Stufe k bei der Elimination. A nichtsingulär und keine Zeilen oder Spaltenpermutationen notwendig.

$$\begin{array}{cccc}
 * & \dots & & \\
 & * & & * \\
 & & * & \\
 & & & a_{kk}^{(k)} \dots a_{kj}^{(k)} \dots \\
 & & & \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 & & & a_{ik}^{(k)} \dots a_{ij}^{(k)} \dots \\
 & & & \vdots \quad \quad \quad \vdots
 \end{array}$$

$k - 1$ Pivoting-Schritte

$$\begin{aligned}
 &a_{kk}^{(k)} \neq 0 \text{ für} \\
 &k < i \leq n, k \leq j \leq n \\
 &a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)}.
 \end{aligned}$$

Sei b_k obere Schranke für Zähler und Nenner der $a_{ij}^{(k)}$ ($1 \leq i, j \leq n$).



Modulare Determinantenberechnung (Forts.)

Sei $d = \det A$. Wähle Primzahl $p > 2|d|$. Wende Gauss Elimination auf $A \bmod p \in \mathbb{Z}_p^{n \times n}$ an. Sei r Ergebnis in symmetrischer Darstellung von \mathbb{Z}_p , d. h. $r \equiv d \bmod p - \frac{p}{2} < r < \frac{p}{2}$.

Da $p \mid d - r$ und $|d - r| \leq |d| + |r| < \frac{p}{2} + \frac{p}{2} = p$ folgt $d = r$.

Schranken für $\det A$: [Hadamard Ungleichung](#)

$$|\det A| \leq n^{n/2} B^n \text{ mit } B = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$$

Wortlänge $\lambda(C) = \lambda(n^{n/2} B^n)$ ist $\frac{1}{64} \log_2 C = \frac{1}{64} n \left(\frac{1}{2} \log_2 n + \log_2 B \right)$
 Polynomial in Eingabelänge $n^2 \lambda(B)$.

- ▶ Primzahl p zwischen $2C$ und $4C$. Finden (prob. Algorithmus). Arithmetik modulo p $O(\log^2 C)$ Wortoperationen.
- ▶ $O(n^3 n^2 (\log n + \log B)^2)$ Wortoperationen.

Modulare Determinantenberechnung (Forts.)

Small Primes:

$$C = n^{n/2} B^n, r = \lceil \log_2(2C + 1) \rceil.$$

- ▶ Wähle r verschiedene Primzahlen $m_0, \dots, m_{r-1} \in \mathbb{N}$.
- ▶ Für $0 \leq i < r$ berechne $d_i \equiv \det A \pmod{m_i}$ (Gauss) in \mathbb{Z}_{m_i} .
- ▶ Chinesischer R.A $d \equiv d_i \pmod{m_i} \quad 0 \leq i < r$.

Dann $\det A \equiv d \pmod{m_i}$ und somit $\det A \equiv d \pmod{m}$ für $m = m_0 \dots m_{r-1}$.

Wegen $m \geq 2^r > 2^{n/2} n B^n \geq 2|d|$ gilt $d = \det A$.

Modulare Determinantenberechnung (Forts.)

Kosten: Berechnung der r Primzahlen (ersten r PZ),

- ▶ $O(r \log^2 r \log \log r)$ Wort-Operationen, $\log m_i \in O(\log r)$.
 $\log m = \sum_{0 \leq i < r} \log m_i \in O(r \log r)$.
- ▶ Operationen mod $m_i \leftrightarrow O(\log^2 m_i)$, d. h. $O(\log^2 r)$ Operationen.
 $O(n^3 r \log^2 r)$ Wortoperationen, $A \bmod m_i \rightarrow O(n^2 r \log^2 r)$.
- ▶ r Werte $O(n^2 r^2 \log^2 r)$.

$$O(n^4 \log^2(nB)(\log^2 n + (\log \log B)^2))$$

Praxis: Vorberechnung von Primzahlen mit Wortlänge.

Newton's Iteration und Hensel's Konstruktion

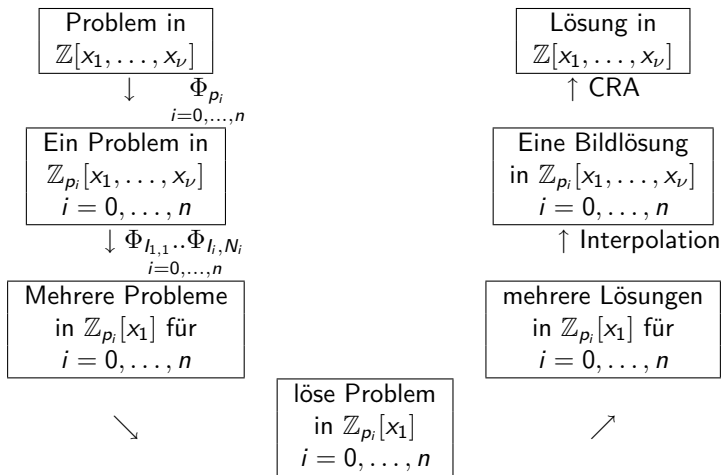
- ▶ Umkehrung modularer & Auswertungs-Homomorphismen.
- ▶ Anwendung von Newton's Iterationsmethoden zur Lösung von Polynomgleichungen.

$$\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_\nu] \rightarrow \mathbb{Z}_p[x_1, \dots, x_\nu] \rightarrow \mathbb{Z}_p[x_1]$$

- ▶ Im Gegensatz zur Interpolation, benötigt man nur einen Bildwert in $\mathbb{Z}_p[x_1]$.
- ▶ **Problem bei Small-Primes Methode:** Die **Anzahl der Bildprobleme** die gelöst werden müssen kann exponentiell in der Größe der Lösung wachsen.



Problem bei Small-Primes Methode



Multivariate Taylor-Reihendarstellung (Forts.)

- Wir erhalten als Approximation von \tilde{u}

$$u^{(2)} = u^{(1)} + \Delta u^{(1)} \text{ mit } \Delta u^{(1)} \in I.$$

Neuer Fehlerterm

$$e^{(2)} = \tilde{u} - u^{(2)} = e^{(1)} - \Delta u^{(1)}$$

Wiederum

$$e^{(2)} = \sum_{i=2}^{\nu} (c_i - u_i(x_1))(x_i - \alpha_i)$$

wobei

$$c_i - u_i(x_1) \in I \quad 2 \leq i \leq \nu$$

d. h. $e^{(2)} \in I^2$

Multivariate Taylor-Reihendarstellung (Forts.)

- Potenzen von $I = \langle x_2 - \alpha_2, x_3 - \alpha_3, \dots \rangle$

$$I^2 = \langle (x_2 - \alpha_2)^2, (x_2 - \alpha_2)(x_3 - \alpha_3), (x_3 - \alpha_3)^2, \dots \rangle$$

$$I^3 = \langle (x_2 - \alpha_2)^3, (x_2 - \alpha_2)^2(x_3 - \alpha_3), (x_2 - \alpha_2)(x_3 - \alpha_3)^2, (x_3 - \alpha_3)^3, \dots \rangle$$

- Drückt man $e^{(2)}$ in Basis von I^2 aus, so

$$e^{(2)} = \sum_{i=2}^{\nu} \sum_{j=i}^{\nu} c_{ij} (x_i - \alpha_i)(x_j - \alpha_j) \text{ mit } c_{ij} \in \mathbb{Z}_p[x_1, \dots, x_{\nu}]$$

Dann

$$\Delta u^{(2)} = \sum_{i=2}^{\nu} \sum_{j=i}^{\nu} u_{ij}(x_1)(x_i - \alpha_i)(x_j - \alpha_j)$$

wobei

$$u_{ij}(x_1) = \Phi_I(c_{ij}), 2 \leq i \leq j \leq \nu$$

.

Ideal-adische Darstellung und Approximation

- ▶ Analogie zur p -adischen Darstellung:

$$\tilde{u} = u^{(1)} + \Delta u^{(1)} + \Delta u^{(2)} + \dots + \Delta u^{(n)}$$

Mit $u^{(1)} = u_0(\vec{x}) \in \mathbb{Z}[\vec{x}]/\langle p \rangle$.

$$\Delta u^{(k)} = u_k(\vec{x})p^k \in \langle p \rangle^k \text{ für } k = 1, 2, \dots, n$$

- ▶ Beachte $\mathbb{Z}[\vec{x}]/\langle p \rangle = \mathbb{Z}_p[\vec{x}]$ und $\langle p \rangle^k = \langle p^k \rangle$.

Der Koeffizient $u_k(\vec{x})$ im Ausdruck für $\Delta u^{(k)}$ erfüllt als ein Vielfaches des Basiselementes des Ideals in dem es liegt:

$$u_k(\vec{x}) \in \mathbb{Z}[\vec{x}]/\langle p \rangle \quad 1 \leq k \leq n$$

- ▶ Im p -adischen Falle kann man eine Folge p -adischer Approximationen der Ordnung $k + 1$ definieren::

$$u^{(k+1)} \in \mathbb{Z}[\vec{x}]/\langle p \rangle^{k+1} \text{ für } k = 1, 2, \dots, n, \text{ wobei}$$

$$u^{(k+1)} = u^{(1)} + \Delta u^{(1)} + \Delta u^{(2)} + \dots + \Delta u^{(k)}.$$

Ideal-adische Darstellung und Approximation (Forts.)

- ▶ Da $u \in \mathbb{Z}[\vec{x}]$ gibt es ein n mit: $\mathbb{Z}[\vec{x}]/\langle p \rangle^{n+1}$ groß genug um u zu enthalten.
- ▶ Die multivariate Taylor-Reihendarstellung kann als analoge Darstellung aufgefasst werden, wobei I an Stelle von $\langle p \rangle$ tritt. Es gilt

$$\mathbb{Z}_p[\vec{x}]/I \subset \mathbb{Z}_p[\vec{x}]/I^2 \subseteq \dots \subseteq \mathbb{Z}_p[\vec{x}]$$

5.4 Definition Sei D noetherscher Integritätsbereich und I ideal in D . Zu $a \in D$ heißt $b \in D$ eine **ideal-adische Approximation n -ter Ordnung** für a bezüglich des Ideales I , falls

$$a \equiv b \pmod{I^n}$$

Der **Fehler** bei der Approximation von a durch b ist das Element $a - b \in D$. Mit $\Phi_{I^n} : D \rightarrow D/I^n$ gilt $\Phi_{I^n}(a - b) = 0$.

Iteration nach Newton für $F(u) = 0$

Lineare p -adische Iteration

- ▶ Inversion von $\Phi_p : \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}_p[x]$. Nur eine Primzahl p , als bekannt $u_0(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$: Bild der gesuchten Lösung $u(x) \in \mathbb{Z}[x]$, d.h. $u_0(x)$ ist p -adische Approximation erster Ordnung.

Gesucht: Methode zur Berechnung der Approximation der Ordnung k , d. h.

$$u_0(x) + u_1(x)p + \cdots + u_{k-1}(x)p^{k-1} \in \mathbb{Z}_{p^k}[x] \quad k = 1, \dots, n+1$$

Lifting von Bild $u_0(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$.

- ▶ Offenbar benötigt man **zusätzliche Information**, um $u(x)$ festzulegen. Üblicherweise ist diese Information in Form von **Gleichungen** gegeben, die $u(x)$ erfüllen muss

z. B. $F(u) = 0$ wobei $F(u) \in \mathbb{Z}[x][u]$. Z.B. $u^2 - a(x) = 0$.

Newton-Verfahren zur Lösung einer nichtlinearen Gleichung $F(u) = 0$

Annahme: Es gibt eine Lösung $\tilde{u} = u(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

Gegeben: Approximation erster Ordnung $u_0(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ von \tilde{u}

- ▶ Schreibt man die Lösung in ihrer p-adischen Pol-Darstellung

$$\tilde{u} = u_0(x) + u_1(x)p + \cdots + u_n(x)p^n$$

- ▶ **Aufgabe:** Bestimme die $u_i(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ $i = 1, 2, \dots, n$ wobei $u^{(k)} = u_0(x) + u_1(x)p + \cdots + u_{k-1}(x)p^{k-1}$ $1 \leq k \leq n + 1$ die p-adische Approximation k-ter Ordnung von \tilde{u} ist.
- ▶ **Gesucht Iterationsformel**, die im Schritt k aus $u^{(k)}$ den p-adischen Polynomkoeffizienten $u_k(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ berechnet und somit zu $u^{(k+1)} = u^{(k)} + u_k(x)p^k$ $1 \leq k \leq n$ führt.

Newton-Verfahren:: Gleichung $F(u) = 0$ (Forts.)

5.5 Lemma Sei $a(x) \in D[x]$. Dann gilt in $D[x][y]$

$$a(x + y) = a(x) + a'(x)y + b(x, y)y^2$$

für ein geeignetes Polynom $b(x, y) \in D[x, y]$.

5.6 Lemma Sei $a(x, y) \in D[x, y]$ bivariates Polynom. Dann gilt im Polynomring $D[x, y][\xi, \eta]$.

$$\begin{aligned} a(x + \xi, y + \eta) &= a(x, y) + a_x(x, y)\xi + a_y(x, y)\eta \\ &\quad + b_1(x, y, \xi, \eta)\xi^2 + b_2(x, y, \xi, \eta)\xi\eta \\ &\quad + b_3(x, y, \xi, \eta)\eta^2 \end{aligned}$$

Für geeignete Polynome $b_i(x, y, \xi, \eta) \in D[x, y, \xi, \eta]$.



Newton-Verfahren:: Gleichung $F(u) = 0$ (Forts.)

- ▶ Das Polynom $F(u) \in \mathbb{Z}[x][u]$ hat dann folgende Darstellung

$$F(u^{(k)} + u_k(x)p^k) = F(u^{(k)}) + F'(u^{(k)})u_k(x)p^k + g(u^{(k)}, u_k(x)p^k)[u_k(x)]^2p^{2k}$$

für ein $g(u, w) \in D[u, w]$.

- ▶ Wegen $u^{(k)} \equiv \tilde{u} \pmod{p^k}$ und $F(\tilde{u}) = 0$ folgt $F(u^{(k)}) \equiv 0 \pmod{p^k}$.
- ▶ Analog gilt
 $F(u^{(k)} + u_k(x)p^k) \equiv 0 \pmod{p^{k+1}}$ falls $u^{(k+1)} = u^{(k)} + u_k(x)p^{(k)}$.

Newton-Verfahren:: Gleichung $F(u) = 0$ (Forts.)

Genügt die gegebene Approximation erster Ordnung $u^{(1)}$ der Bedingung

$$F'(u^{(1)}) \not\equiv 0 \pmod{p}$$

so ist der gesuchte p -adische Polynomkoeffizient

$$(\#) \quad u_k(x) = -\frac{\Phi_p\left(\frac{F(u^{(k)})}{p^k}\right)}{\Phi_p(F'(u^{(1)}))} \in \mathbb{Z}_p[x]$$

Diese Division ist exakt im Polynomring $\mathbb{Z}_p[x]$, falls eine Polynomlösung existiert.

Die Gleichung $(\#)$ ist **die lineare Aktualisierungsformel** zusammen mit $u^{(k+1)} = u^{(k)} + u_k(x)p^k \rightsquigarrow$ **lineare p -adische Newtonverfahren**.

Beachte: $F(u^{(k)})$ wird in $\mathbb{Z}[x]$ durchgeführt, sowie auch Division durch p^k erst dann Φ_p anwenden!

Beispiel: Quadratwurzel

Dann

$$\begin{aligned} u_1(x) &= -\frac{\Phi_5\left(\frac{F(u^{(1)})}{5}\right)}{(-2x^2 + 2)} = -\frac{\Phi_5\left(\frac{35x^4 - 180x^3 + 95x^2 + 330x + 120}{5}\right)}{(-2x^2 + 2)} \\ &= -\frac{(2x^4 - x^3 - x^2 + x - 1)}{(-2x^2 + 2)} = x^2 + 2x - 2 \in \mathbb{Z}_5[x] \end{aligned}$$

und $u^{(2)} = (x^2 - 1) + (x^2 + 2x - 2)5 \in \mathbb{Z}_{25}[x]$

Analog

$$u_2(x) = -\frac{(-2x^3 + 2x)}{(-2x^2 + 2)} = -x \in \mathbb{Z}_5[x]$$

d. h. $u^{(3)} = (x^2 - 1) + (x^2 + 2x - 2)5 + (-x)5^2 \in \mathbb{Z}_{125}[x]$

$F(u^{(3)}) = 0 \rightsquigarrow$ Terminierung, d. h.

Quadratwurzel ist $u(x) = u^{(3)} = 6x^2 - 15x - 11 \in \mathbb{Z}[x]$.



Beispiel: Division mit Rest

5.8 Beispiel Division mit Rest über Newton Iteration

$\mathbb{Z}, F[x]$ sind Euklidische Bereiche \rightsquigarrow Division mit Rest.
Komplexität $O(n^2)$ (Wort- oder Körperoperationen)

- ▶ Kann verbessert werden auf $O(M(n))$ wobei M die Multiplikationsschranke ist.
- ▶ **Polynomfall**: Sei D Ring $a, b \in D[x]$ Grade n, m mit $m \leq n$, b monisch. Finde $q, r \in D[x]$ mit $a = qb + r$ $\text{Grad}(r) < \text{Grad}(b)$.
[Da b monisch ist, ist die Existenz sicher].

- ▶ Es gilt:

$$(*) \quad x^n a \left(\frac{1}{x} \right) = \left(x^{n-m} q \left(\frac{1}{x} \right) \right) \cdot \left(x^m b \left(\frac{1}{x} \right) \right) + x^{n-m+1} \left(x^{m-1} r \left(\frac{1}{x} \right) \right)$$

Beispiele (Forts.)

$$\text{z.B. } a = 5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x \qquad b = x^2 + 2x + 3 \qquad \mathbb{F}_7[x]$$

$$\text{rev}_5(a) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$$

$$\text{rev}_2(b) = 3x^2 + 2x + 1$$

Wie berechnet man $\text{rev}_2(b)^{-1} \bmod x^4$?

$$\text{rev}_2(b)^{-1} \equiv 4x^3 + x^2 + 5x + 1 \bmod x^4 \text{ in } \mathbb{F}_7[x]$$

$$\rightsquigarrow \text{rev}_3(q) \equiv 6x^3 + x + 5 \bmod x^4$$

$$\rightsquigarrow q = 5x^3 + x^2 + 6 \text{ und } r = a - qb = 3x + 3$$



Inversion modulo x^l in $D[x]$

Problem:

Gegeben $f \in \mathbb{D}[x]$, $l \in \mathbb{N}$ mit $f(0) = 1$

Finde $g \in \mathbb{D}[x]$ mit $fg \equiv 1 \pmod{x^l}$

- \rightsquigarrow Newton Iteration Lösungen von $\Phi(g) = 0$ aus Anfangsnäherung g_0 :

$$g_{i+1} = g_i - \frac{\Phi(g_i)}{\Phi'(g_i)}$$

- $\Phi(g) = \frac{1}{g} - f = 0$

$$\rightsquigarrow g_{i+1} = g_i - \frac{1/g_i - f}{-1/g_i^2} = 2g_i - fg_i^2$$

P-adische Inversion mit Newton Iteration

5.10 Beispiel Sei R beliebiger Ring $0 \neq p \in R$. p -adische Darstellung ist auch hier sinnvoll.

Problem: Berechnung eines Inversen von $a \bmod p^l$ $l > 1$, aus Inverse von $a \bmod p$.

Gegeben: b_0 mit $ab_0 \equiv 1 \pmod{p}$

Gesucht: b mit $ab \equiv 1 \pmod{p^l}$::Liften von Inversen.

```

procedure InvLift ( $a, b_0, l$ )           { $ab_0 \equiv 1 \pmod{p}$     $l \in \mathbb{N}$ }
 $r := \lceil \log l \rceil$ 
for  $i = 1$  to  $r$  do
    berechne  $b_i := (2b_{i-1} - ab_{i-1}^2) \bmod p^{2^i}$ 
return  $b_r$ 
  
```

Behauptung: $ab_i \equiv 1 \pmod{p^{2^i}}$ Induktion: $i = 0$

$$1 - ab_{i+1} \equiv 1 - a(2b_i - ab_i^2) \equiv 1 - 2ab_i + a^2b_i^2 \equiv (1 - ab_i)^2 \equiv 0 \pmod{p^{2^{i+1}}}$$

Bsp.: $R = \mathbb{Z}, p > 1$ oder $R = D[x]$ p monisch, $\text{grad } b < l$ $\text{grad } p$ etwa $p = x$.



Algorithmus p-adische Newton Iteration

begin

{Eingabe : $F \in R[u]$, R Ring, $p \in R$, $l \in \mathbb{N}^+$, $a_0 \in R$, }
 {Startlösung mit $F(a_0) \equiv 0 \pmod p$, $F'(a_0)$ invertierbar mod p , }
 { s_0 modulare Inverse für $F'(a_0)$ mod p }
 {Ausgabe : $a \in R$ mit $F(a) \equiv 0 \pmod{p^l}$ und $a \equiv a_0 \pmod p$ }

$r := \lceil \log l \rceil$

for $i := 1$ **to** $r - 1$ **do**

begin

berechne $a_i, s_i \in R$ mit

$$a_i \equiv a_{i-1} - F(a_{i-1})s_{i-1} \pmod{p^{2^i}}$$

$$s_i \equiv 2s_{i-1} - F'(a_i)s_{i-1}^2 \pmod{p^{2^i}}$$

end

Berechne $a \in R$ mit $a \equiv a_{r-1} - F(a_{r-1})s_{r-1} \pmod{p^l}$

return a

end

Ideal-adische Newton Iteration

- ▶ Inversion eines multivariaten Auswertungshomomorphismus

$$\Phi_I : \mathbb{Z}_p[x_1, \dots, x_\nu] \rightarrow \mathbb{Z}_p[x_1]$$

mit Kern $I = \langle x_2 - \alpha_2, \dots, x_\nu - \alpha_\nu \rangle \quad \alpha_i \in \mathbb{Z}_p \quad 2 \leq i \leq \nu.$

- ▶ Startpunkt: Approximation erster Ordnung zur gesuchten Lösung $\tilde{u} \in \mathbb{Z}_p[\vec{x}]$.

$$u^{(1)} = \Phi_I(\tilde{u}) \in \mathbb{Z}_p[x_1] = \mathbb{Z}_p[\vec{x}]/I$$

- ▶ Zusatzinformation: \tilde{u} Lösung der Polynomgleichung $F(u) = 0$, wobei $F(u) \in \mathbb{Z}_p[\vec{x}][u]$.
- ▶ Ziel: Definition einer Iterationsformel $u^{(k+1)} = u^{(k)} + \Delta u^{(k)}$, wobei $u^{(i)}$ ideal-adische Approximation i -ter Ordnung und $\Delta u^{(k)} \in I^k$.



Ideal-adische Newton Iteration (Forts.)

Durch Anwendung von Hilfssatz erhält man als Taylorentwicklung

$$F(\underbrace{u^{(k)} + \Delta u^{(k)}}) = F(u^{(k)}) + F'(u^{(k)})\Delta u^{(k)} + G(u^{(k)}, \Delta u^{(k)})[\Delta u^{(k)}]^2$$

Ideal-adische Approximation der Ordnung $k + 1$, d. h. $u^{(k+1)}$ so
 $F(u^{(k)} + \Delta u^{(k)}) \in I^{k+1}$ und wegen $\Delta u^{(k)} \in I^k$ folgt $[\Delta u^{(k)}]^2 \in I^{2k}$, d. h.
 wendet man $\Phi_{I^{k+1}}$ an, so gilt

$$(*) \quad 0 = \Phi_{I^{k+1}}(F(u^{(k)})) + \Phi_{I^{k+1}}(F'(u^{(k)}))\Delta u^{(k)} \in \mathbb{Z}_p[\vec{x}]/I^{k+1}$$

und $\Delta u^{(k)}$ muss diese Gleichung erfüllen für $k = 1$ so $\Delta u^{(1)} \in I$ und

$$\Delta u^{(1)} = \sum_{i=2}^{\nu} u_i(x_1)(x_i - \alpha_i) \text{ mit } u_i(x_1) \in \mathbb{Z}_p[x_1]$$

Ideal-adische Newton Iteration–Erster Schritt

Da $u^{(1)} \equiv \tilde{u} \pmod I$, gilt auch $F(u^{(1)}) \in I$, d. h.

$$(**) \quad F(u^{(1)}) = \sum_{i=2}^{\nu} c_i (x_i - \alpha_i) \quad \text{für } c_i \in \mathbb{Z}_p[\vec{x}] \quad 2 \leq i \leq \nu$$

Nun wird der Homomorphismus Φ_{p^2} für $k = 1$ angewandt und da alle ideal-adischen Terme vom Totalgrad ≥ 2 unterdrückt werden, folgt

$$\Phi_{p^2}(F(u^{(1)})) = \sum_{i=2}^{\nu} c_i(x_1)(x_i - \alpha_i)$$

wobei die Koeffizienten $c_i(x_1) \in \mathbb{Z}_p[x_1]$ definiert sind, durch die Koeffizienten $c_i \in \mathbb{Z}_p[\vec{x}]$ in $(**)$ d. h.

$$c_i(x_1) = \Phi_I(c_i) \quad 2 \leq i \leq \nu$$



$$0 = \sum_{i=2}^{\nu} c_i(x_1)(x_i - \alpha_i) + \Phi_{\rho}(F'(u^{(1)})) \left[\sum_{i=2}^{\nu} u_i(x_1)(x_i - \alpha_i) \right] \in \mathbb{Z}_p[\vec{x}]/I^2$$

gilt nach Gleichung (*). Die ideal-adische Darstellung von $\Phi_{\rho}(F'(u^{(1)}))$ hat für geeignete Koeffizienten $d_i(x_1) \in \mathbb{Z}_p[x_1]$ $2 \leq i \leq \nu$ die Form:

$$\Phi_{\rho}(F'(u^{(1)})) = \Phi_I(F'(u^{(1)})) + \sum_{i=2}^{\nu} d_i(x_1)(x_i - \alpha_i)$$

Setzt man dies ein, so bleibt

$$0 = \sum_{i=2}^{\nu} c_i(x_1)(x_i - \alpha_i) + \Phi_I(F'(u^{(1)})) \left[\sum_{i=2}^{\nu} u_i(x_1)(x_i - \alpha_i) \right] \in \mathbb{Z}_p[\vec{x}]/I^2$$

$$u_i(x_1) = -\frac{c_i(x_1)}{\Phi_I(F'(u^{(1)}))} \in \mathbb{Z}_p[x_1] \quad 2 \leq i \leq \nu$$

Aktualisierungsformel, die den Korrekturterm $\Delta u^{(1)}$ festlegt.



Ideal-adische Newton Iteration–Folgeschritte

Im allgemeinen Iterationsschritt ist der k -te Korrekturterm $\Delta u^{(k)} \in I^k$ der Term mit Totalgrad k in der ideal-adischen Darstellung der Lösung $\tilde{u} = u(x_1, \dots, x_\nu)$.

Analog zum ersten Schritt erhält man, falls $F'(u^{(1)}) \not\equiv 0 \pmod{I}$, die lineare ideal-adische Newton Iteration:

$$u^{(n+1)} = u^{(k)} + \Delta u^{(k)}, \text{ wobei}$$

$$\Delta u^{(k)} = \sum_{i_1=2}^{\nu} \cdots \sum_{i_k=i_{k-1}}^{\nu} u_{i_1}(x_1) \prod_{j=1}^k (x_{i_j} - \alpha_{i_j})$$

wobei $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k)$ bezeichnet und

Ideal-adische Newton Iteration–Folgeschritte (Forts.)

$$(\#) \quad u_i(x_1) = -\frac{c_i(x_1)}{\Phi_I(F'(u^{(1)}))} \in \mathbb{Z}_p[x_1]$$

Hierbei gilt

$$\Phi_{I^{k+1}}(F(u^{(k)})) = \sum_{i_1=2}^{\nu} \cdots \sum_{i_k=i_{k-1}}^{\nu} c_i(x_1) \prod_{j=1}^k (x_{i_j} - x_{i_j})$$

Die Division in (#) muss exakt sein (in $\mathbb{Z}_p[x_1]$), wenn die Gleichung $F(u) = 0$ eine Lösung besitzt.

Die $c_i(x_1)$ sind die Koeffizienten der Terme mit Totalgrad k in der ideal-adischen Darstellung von $F(u^{(k)})$ und weiterhin hat $F(u^{(k)})$ keine Terme vom Totalgrad kleiner k (bezüglich I).

Es werden im Iterationsschritt k alle ideal-adischen Terme der Lösung \tilde{u} mit Totalgrad k (bezüglich I) bestimmt.

Beispiel

5.14 Beispiel Bestimme Polynom $u(x, y, z) \in \mathbb{Z}_5[x, y, z]$, das die Quadratwurzel des folgenden Polynoms ist:

$$\begin{aligned} a(x, y, z) = & x^4 + x^3y^2 - x^2y^4 + x^2yz + 2x^2z - 2x^2 - 2xy^3z + xy^2z \\ & - xy^2 - y^2 + z^2 + yz^2 - yz + z^2 - 2z + 1 \in \mathbb{Z}_5[x, y, z] \end{aligned}$$

Dann ist u Lösung der Polynomgleichung

$$F(u) = a(x, y, z) - u^2 = 0$$

Wähle Auswertungspunkte $y = 0, z = 0$, d. h. $I = \langle y, z \rangle$. Die ideal-adische Approximation erster Ordnung $u^{(1)} = u(x, 0, 0) \in \mathbb{Z}_5[x]$ muss eine Quadratwurzel von $a(x, 0, 0)$ in $\mathbb{Z}_5[x]$ sein. Es ist $a(x, 0, 0) = x^4 - 2x^2 + 1$, d. h. $u^{(1)} = u(x, 0, 0) = x^2 - 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$. Um die lineare ideal-adische Newton Iteration anzuwenden, beachte dass

$$\Phi_I(F'(u^{(1)})) = \Phi_I(-2u^{(1)}) = -2x^2 + 2$$

Beispiel (Forts.)

Es ist nützlich $a(x, y, z)$ in seiner ideal-adischen Darstellung bezüglich I auszudrücken: d. h.

$$\begin{aligned} a(x, y, z) &= [(x^4 - 2x^2 + 1)] + [(2x^2 - 2)z] + [(x^3 - x)y^2 \\ &\quad + (x^2 - 1)yz + z^2] + [(x)y^2z + yz^2] \\ &\quad + [(-x^2)y^4 + (-2x)y^3z - y^2z^2] \end{aligned}$$

Nun ist

$$\Phi_{I^2}(F(u^{(1)})) = \Phi_{I^2}(a(x, y, z) - (x^2 - 1)^2) = (2x^2 - 2)z \in \mathbb{Z}_5[x, y, z]/I^2$$

Der erste Korrekturterm ist $\Delta u^{(1)} = u_2(x)y + u_3(x)z$, wobei $u_2(x) = 0$, da in $\Phi_{I^2}(F(u^{(1)}))$ auch 0 und

$$u_3(x) = -\frac{c_3(x)}{(-2x^2 + 2)} = -\frac{(2x^2 - 2)}{(-2x^2 + 2)} = 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$$

d. h.

$$u^{(2)} = u^{(1)} + \Delta u^{(1)} = (x^2 - 1) + z \in \mathbb{Z}_5[x, y, z]/I^2$$

Beispiel (Forts.)

Für die nächste Iteration gilt

$$\begin{aligned}\Phi_{\beta}(F(u^{(2)})) &= \Phi_{\beta}(a(x, y, z) - [(x^2 - 1) + z]^2) = \\ &= (x^3 - x)y^2 + (x^2 - 1)yz \in \mathbb{Z}_5[x, y, z]/I^3\end{aligned}$$

Neuer Korrekturterm ist $\Delta u^{(2)} = u_{22}(x)y^2 + u_{23}(x)yz + u_{33}(x)z^2$, wobei $u_{33}(x) = 0$, da in $\Phi_{\beta}(F(u^{(2)}))$ auch null und

$$\begin{aligned}u_{22}(x) &= -\frac{c_{22}(x)}{(-2x^2 + 2)} = -\frac{(x^3 - x)}{(-2x^2 + 2)} = -2x \in \mathbb{Z}_5[x] \\ u_{23}(x) &= -\frac{c_{23}(x)}{(-2x^2 + 2)} = -\frac{(x^2 - 1)}{(-2x^2 + 2)} = -2 \in \mathbb{Z}_5[x]\end{aligned}$$

Beispiel (Forts.)

Also

$$u^{(3)} = u^{(2)} + \Delta u^{(2)} = (x^2 - 1) + z + (-2x)y^2 + (-2)yz \in \mathbb{Z}_5[x, y, z]/I^3$$

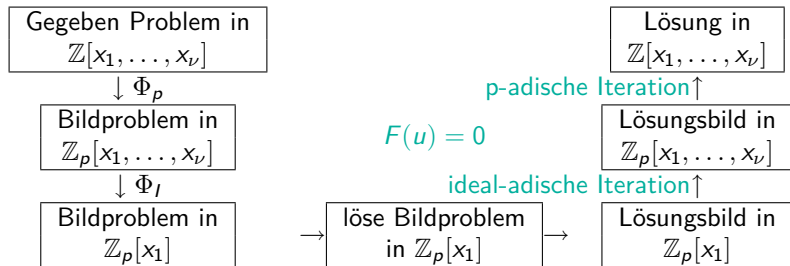
Als nächstes stellt man fest: $F(u^{(3)}) = 0$, d. h. die gesuchte Quadratwurzel von $a(x, y, z)$ ist

$$u(x, y, z) = u^{(3)} = x^2 - 2xy^2 - 2yz + z - 1 \in \mathbb{Z}_5[x, y, z]$$



Homomorphismus Diagramm

zur Lösung multivariater Polynomprobleme mit der p -adischen und der ideal-adischen Newton-Iterationen



Inversion von Homomorphismen der Form $\Phi_{I,p} : \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_\nu] \rightarrow \mathbb{Z}_p[x_1]$ unter der Annahme, dass u sich als Lösung von $F(u) = 0$ darstellen lässt.

$F(u) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_\nu][u]$: eine Variable wird „geliftet“, reicht oft nicht aus!

Einführung zu Hensel's Lemma

- ▶ Liften von Lösungen für $F(u, w) = 0$ mit $F(u, w) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_\nu][u, w]$.
- ▶ z.B. **Faktorisierung** von $a(x_1, \dots, x_\nu)$: $F(u, w) = a(x_1, \dots, x_\nu) - uw = 0$
 $\Phi_{I,p} : \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_\nu] \rightarrow \mathbb{Z}_p[x_1]$, d. h. Problem der Faktorisierung in $\mathbb{Z}_p[x_1]$
 (relativ einfach).
- ▶ Sei etwa $u_0(x_1)$ Faktor von $\Phi_{I,p}(a) = a_0(x_1)$, dann
 $a_0(x_1) = u_0(x_1)w_0(x_1)$, wobei $w_0(x_1) = \frac{a_0(x_1)}{u_0(x_1)} \in \mathbb{Z}_p[x_1]$
- ▶ Liften von u_0 und w_0 m pol. $u, w \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_\nu]$ mit
 $F(u, w) = a(x_1, \dots, x_\nu) - uw = 0$ und

$$u(x_1, \dots, x_\nu) \equiv u_0(x_1) \pmod{\langle I, p \rangle}$$

$$w(x_1, \dots, x_\nu) \equiv w_0(x_1) \pmod{\langle I, p \rangle}$$

Einführung zu Hensel's Lemma (Forts.)

Newton Iteration für nichtlineare Gleichung in 2 Variablen

- ▶ Berechnung von GCD für $a(x_1, \dots, x_\nu), b(x_1, \dots, x_\nu) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_\nu]$
 \rightsquigarrow berechne GCD $(a_0(x_1), b_0(x_1))$ in $\mathbb{Z}_p[x_1]$ (Euklidisch).

- ▶ Ist $u_0(x_1) = \text{GGT}(a_0(x_1), b_0(x_1))$, so sei Cofaktor $w_0(x_1) = \frac{a_0(x_1)}{u_0(x_1)}$.
 Lifte $u_0(x_1)$ und $w_0(x_1)$ zu $u(x_1, \dots, x_\nu)$ $w(x_1, \dots, x_\nu)$ mit $F(u, w) = 0$.
 (Auch b kann verwendet werden).

$\rightsquigarrow u(x_1, \dots, x_\nu)$ ist Teiler von $a(x_1, \dots, x_\nu)$ auch von $b(x_1, \dots, x_\nu)$?
GGT?

Allgemeine Form der Newton Iteration für $F(u, w) = 0$

- ▶ Korrekturterme $\Delta u^{(k)}, \Delta w^{(k)}$ mit Hilfe von

$$F(u^{(k)} + \Delta u^{(k)}, w^{(k)} + \Delta w^{(k)}) = F(u^{(k)}, w^{(k)}) + F_u(u^{(k)}, w^{(k)})\Delta u^{(k)} + F_w(u^{(k)}, w^{(k)})\Delta w^{(k)} + E$$

wobei E Ausdruck mit nicht-linearen $\Delta u^{(k)}, \Delta w^{(k)}$

- ▶ **Linearisierung**, linke Seite auf 0 \rightsquigarrow

$$(*) \quad F_u(u^{(k)}, w^{(k)})\Delta u^{(k)} + F_w(u^{(k)}, w^{(k)})\Delta w^{(k)} = -F(u^{(k)}, w^{(k)})$$

- ▶ \rightsquigarrow Problem der Lösung Diophantischer Polynomgleichungen.



Allgemeine Form der Newton Iteration für $F(u, w) = 0$ (Forts.)

- ▶ Lösung diophantischer Polynomgleichung der Form

$$A^{(k)} \Delta u^{(k)} + B^{(k)} \Delta w^{(k)} = C^{(k)}$$

mit Polynomen $A^{(k)}, B^{(k)}, C^{(k)}$ und umb. Polynomen $\Delta u^{(k)}, \Delta w^{(k)}$.

- ▶ Möglichkeiten: Keine Lösung, viele Lösungen. Lösbar, falls $C^{(k)}$ vielfaches vom $\text{GGT}(A^{(k)}, B^{(k)})$.
- ▶ Wir beschränken uns nun auf die Gleichung $F(u, w) = a(x_1, \dots, x_\nu) - uw = 0$.
- ▶ Lösbarkeit hängt wesentlich von $F(u, w)$ ab.

Hensel's Lemma

Seien $a(x) \in \mathbb{Z}[x]$ und $u_0(x), w_0(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ mit

$$a(x) \equiv u_0(x)w_0(x) \pmod{p}$$

„Lifte“ nach $\mathbb{Z}[x]$, d. h. Inversion von $\Phi_p : \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}_p[x]$.

Berechne $\bar{u} = u(x), \bar{w} = w(x)$ in $\mathbb{Z}[x]$ mit

$$F(\bar{u}, \bar{w}) = a(x) - u(x)w(x) = 0$$

so dass

$$u(x) \equiv u_0(x) \pmod{p} \quad w(x) \equiv w_0(x) \pmod{p}$$

Betrachte \bar{u}, \bar{w} in ihren p -adischen Darstellungen.

$$\bar{u} = u_0(x) + u_1(x)p + \cdots + u_n(x)p^n$$

$$\bar{w} = w_0(x) + w_1(x)p + \cdots + w_n(x)p^n$$

Hensel's Lemma (2)

- ▶ Da $u^{(k)} w^{(k)}$ eine p -adische Approximation von $a(x)$ der Ordnung k sein muss, kann man durch p^k dividieren, d. h.

$$w^{(k)} u_k(x) + u^{(k)} w_k(x) \equiv \frac{a(x) - u^{(k)} w^{(k)}}{p^k} \pmod{p}$$

- ▶ Wendet man nun Φ_p an, unter Verwendung von $\Phi_p(w^{(k)}) = w_0(x)$ und $\Phi_p(u^{(k)}) = u_0(x)$, so erhält man

$$w_0(x) u_k(x) + u_0(x) w_k(x) = \Phi_p \left[\frac{a(x) - u^{(k)} w^{(k)}}{p^k} \right]$$

die in $\mathbb{Z}_p[x]$ zu lösen ist.

Hensel's Lemma (3)

- ▶ p prim, so $\mathbb{Z}_p[x]$ euklidisch.
d.h. Sind $u_0(x), w_0(x)$ teilerfremd \rightsquigarrow eindeutige Lösung $\sigma(x), \tau(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ mit

$$\sigma(x)u_0(x) + \tau(x)w_0(x) = \Phi_p \left[\frac{a(x) - u^{(k)}w^{(k)}}{p^k} \right]$$

wobei $\text{grad}(\sigma(x)) < \text{grad}(w_0(x))$.

- ▶ Man setze

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} + \tau(x)p^k \quad w^{(k+1)} = w^{(k)} + \sigma(x)p^k$$

Behauptung Dies sind die richtigen p -adischen Approximationen der Ordnung $k + 1$ für \bar{u} bzw. \bar{w} .

Hensel's Lemma (6)

Dann Multiplikation $\bmod p^{k+1}$ ergibt

$$\begin{aligned}
 u^{(k+1)}(x)w^{(k+1)}(x) &\equiv u^{(k)}(x)w^{(k)}(x) + (\sigma^{(k)}(x)u^{(1)}(x) + \\
 &\quad \tau^{(k)}(x)w^{(1)}(x))p^k \bmod p^{k+1} \\
 &\equiv u^{(k)}(x)w^{(k)}(x) + c^{(k)}(x)p^k \bmod p^{k+1} \quad (2) \\
 &\equiv a(x) \bmod p^{k+1} \quad (1)
 \end{aligned}$$

\rightsquigarrow Behauptung.

5.16 Folgerung : Eindeutigkeit der Hensel Konstruktion

Im Satz (Hensel's Lemma): Ist $a(x) \in \mathbb{Z}[x]$ **monisch** und dementsprechend wenn die teilerfremden Faktoren

$u^{(1)}(x), w^{(1)}(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ monisch gewählt werden, so sind für alle $k \geq 1$ die monischen Polynomfaktoren $u^{(k)}(x), w^{(k)}(x) \in \mathbb{Z}_{p^k}[x]$ eindeutig bestimmt.

Hensel's Lemma (7)

Behauptung: Diese sind eindeutig: Da $a(x), u^{(1)}(x), w^{(1)}(x)$ monisch, muss
 $\text{grad}(\sigma(x)) < \text{grad}(w^{(1)}(x))$ $\text{grad}(\tau(x)) < \text{grad}(u^{(1)}(x))$
gelten.

(Da $u^{(k+1)}(x)$ und $w^{(k+1)}(x)$ immer gleiche Leitterme wie $u^{(1)}(x)$ bzw. $w^{(1)}(x)$ haben müssen!).

\rightsquigarrow

$$a(x) \equiv u^{(k)}(x)w^{(k)}(x) + (\sigma(x)u^{(1)}(x) + \tau(x)w^{(1)}(x))p^k \pmod{p^{k+1}}$$

\rightsquigarrow

$$\sigma(x)u^{(1)}(x) + \tau(x)w^{(1)}(x) \equiv \frac{a(x) - u^{(k)}(x)w^{(k)}(x)}{p^k} \pmod{p}$$

\rightsquigarrow

$\sigma(x), \tau(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ sind eindeutig.

(Da Lösungen diophantischer Gleichungen unter diesen Voraussetzungen eindeutig sind. Siehe Geddes et al. Theorem 2.6 s.44)

Quadratisches Hensel Lifting

Die Idee von Hensel's Lifting lässt sich etwas allgemeiner formulieren:

Quadratisches Hensel Lifting

- ▶ Sei R kommutativer Ring mit 1 (z. B. $R = \mathbb{Z}$, $R = F[y]$).
 $a, u, w \in R[x]$, $m \in R$ mit $a \equiv uw \pmod{m}$. Diese Faktorisierung soll nun geliftet werden zu Faktorisierung $a \equiv \hat{u}\hat{w} \pmod{m^2}$.
- ▶ Annahme es gibt $s, t \in R[x]$ mit $su + tw \equiv 1 \pmod{m}$ (z. B. wenn u, w teilerfremd \pmod{m} sind: Ist $R/\langle m \rangle$ Körper, so EEA in $R/\langle m \rangle[x]$ möglich).
- ▶ Setze
 $e = a - uw$, $\hat{u} = u + te$, $\hat{w} = w + se$: wie eben.

$$a - \hat{u}\hat{w} = a - uw - use - wte - ste^2$$

$$= a - uw - (su + tw)e - ste^2$$

$$= (1 - su - tw)e - ste^2 \equiv 0 \pmod{m^2}$$
 (Da $e \equiv 0 \pmod{m}$ und $1 - su - tw \equiv 0 \pmod{m}$).

Quadratisches Hensel Lifting (Forts.)

- ▶ Startet man mit Primelement p für m , so kann man diesen Prozess induktiv (durch Mitliften der Kongruenz $su + tw \equiv 1$) fortsetzen, um Faktorisierungen bzgl. beliebiger Potenzen von p zu erhalten.

5.17 Beispiel Wir hatten Newton's Iteration zur Berechnung einer nicht-trivialen Lösung für $x^4 - 1 \equiv 0 \pmod{625}$ verwendet mit Startwert $x = 2 \pmod{5}$.

Dies kann als Lifting einer Faktorisierung gesehen werden: nämlich von $x^4 - 1 \equiv (x - 2)(x^3 + 2x^2 - x - 2) \pmod{5}$ zu Faktorisierung $\pmod{625}$.

Im obigen Kontext: $a = x^4 - 1$ $p = 5$

$u = x^3 + 2x^2 - x - 2$ $w = x - 2$. Die Polynome u, w sind teilerfremd $\pmod{5}$: EEA liefert $s = -2, t = 2x^2 - 2x - 1$, so dass $su + tw \equiv 1 \pmod{5}$.

Quadratisches Hensel Lifting (Forts.)

$$e = a - uw = x^4 - 1 - x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4 = 5x^2 - 5$$

$$\hat{u} = u + te = 10x^4 - 9x^3 - 13x^2 + 9x + 3$$

$$\hat{w} = w + se = -10x^2 + x + 8$$

Und somit

$$a - \hat{u}\hat{w} = 25(4x^6 - 4x^5 - 8x^4 + 7x^3 + 5x^2 - 3x - 1) \equiv 0 \pmod{25}, \text{ d. h.}$$

$$a \equiv \hat{u}\hat{w} \pmod{25}.$$

Problem: Grade von \hat{u} , \hat{w} sind größer als die von u bzw. w insbesondere ist ihre Summe $>$ grad a .

- Dies geschieht z. B. wenn Vielfache von m Nullteiler $\pmod{m^2}$ sind und somit ist Produkt der Hauptkoeffizienten $\equiv 0 \pmod{m}$.

Quadratisches Hensel Lifting (Forts.)

- ▶ Dies kann vermieden werden durch Verwendung der Division mit Rest in $\mathbb{R}[x]$. Sie ist möglich wenn der Divisor monisch ist:
- ▶ **Altlemma:**
 - i) $a, b \in R[x]$, $b \neq 0$ monisch, dann gibt es eindeutige Polynome $q, r \in R[x]$ mit $a = qb + r$ und $\text{grad } r < \text{grad } b$.
 - ii) Sind a, b, q, r wie in i) und gilt $a \equiv 0 \pmod{m}$ für ein $m \in R$, so $q \equiv r \equiv 0 \pmod{m}$.
- (**Beweis ii**): Sei $\text{grad } b = n \geq 0 \rightsquigarrow$ aus $a \equiv 0 \pmod{m}$ b monisch, $qx^n \equiv 0 \pmod{m}$, d. h. $q \equiv 0 \pmod{m}$ und somit auch $r \equiv 0 \pmod{m}$.
- ▶ Überlegung führt zu: **Algorithmus Hensel Schritt**

//Eingabe: $m \in R$ $a, u, w, s, t \in R[x]$ mit
 $a \equiv uw \pmod{m}$, $su + tw \equiv 1 \pmod{m}$, wobei w monisch,
 $\text{grad } a = n = \text{grad } u + \text{grad } w$, $\text{grad } s < \text{grad } w$ und $\text{grad } t < \text{grad } u$.

Ausgabe: Polynome $u^*, w^*, s^*, t^* \in R[x]$ mit

$$a \equiv u^* w^* \pmod{m^2} \text{ und } s^* u^* + t^* w^* \equiv 1 \pmod{m^2}$$

wobei w^* monisch, $u^* \equiv u \pmod{m}$, $w^* \equiv w \pmod{m}$,
 $s^* \equiv s \pmod{m}$, $t^* \equiv t \pmod{m}$, $\text{grad } u^* = \text{grad } u$,
 $\text{grad } w^* = \text{grad } w$, $\text{grad } s^* < \text{grad } w^*$, $\text{grad } t^* < \text{grad } u^*$.//

1. Berechne $e, q, r, u^*, w^* \in R[x]$ mit $\text{grad } r < \text{grad } w$ und
 $e \equiv a - uw \pmod{m^2}$, $se \equiv qw + r \pmod{m^2}$
 $u^* \equiv u + te + qu \pmod{m^2}$, $w^* \equiv w + r \pmod{m^2}$
2. Berechne $b, c, d, s^*, t^* \in R[x]$ mit $\text{grad } d < \text{grad } w^*$ und
 $b \equiv su^* + tw^* - 1 \pmod{m^2}$, $sb \equiv cw^* + d \pmod{m^2}$
 $s^* \equiv s - d \pmod{m^2}$, $t^* \equiv t - tb - cu^* \pmod{m^2}$
3. Return u^*, w^*, s^*, t^* .

Algorithmus Hensel-Schritt: Korrektheit

5.18 Satz Der Algorithmus ist korrekt. Aufwand für:

- ▶ $R = \mathbb{Z} : 0(M(n)M(\log m))$ Wortoperationen, falls Eingaben in max-Norm $< m^2$.
- ▶ $R = F[y] : 0(M(n)M(\text{grad}_y m))$ Operationen in F Falls grad in y der Eingaben $< 2\text{grad}_y m$.

Beweis: Nachrechnen. \mathbb{Z} : Grad der Polynome $\leq n$. Koeffizienten $\leq m^4$
Länge $0(\log m)$. Division mit Rest $0(M(n))$.

Beispiel

5.19 Beispiel $a = x^4 - 1 = 0$ fortgesetzt.

$$u = x^3 + 2x^2 - x - 2, w = x - 2, s = -2, t = 2x^2 - 2x - 1$$

$$su + tw \equiv 1 \pmod{5}, e = a - uw = 5x^2 - 5$$

- ▶ $se = -10x^2 + 10 : x - 2 = -10x + 5$ mit Rest $r = -5$
d. h. $q = -10x + 5, r = -5 \pmod{25}$

$$\begin{aligned} u^* &\equiv u + te + qu \equiv x^3 + 2x^2 - x - 2 + \\ &\quad (2x^2 - 2x - 1)(5x^2 - 5) + (-10x + 5)(x^3 + 2x^2 - x - 2) \\ &\equiv x^3 + 7x^2 - x - 7 \pmod{25} \end{aligned}$$

$$w^* \equiv w + r \equiv x - 2 - 5 \equiv x - 7 \pmod{25}.$$

- ▶ Dann $a \equiv u^* w^* \pmod{25}$. Die Grade von u^*, w^* sind die von u bzw. w und die Polynome sind einfacher als zuvor.
- ▶ 7 ist somit Lösung von $x^4 - 1 \equiv 0 \pmod{25}$ und $7 \equiv 2 \pmod{5}$ (Startlösung).



Beispiel (Forts.)

- Zur Berechnung von s^* , t^* die zur nächsten Iteration benötigt werden.

Berechne

$$\begin{aligned} b &\equiv su^* + tw^* - 1 \equiv -2x^3 + 11x^2 + 2x - 11 + \\ &\quad (2x^2 - 2x - 1)(x - 7) - 1 \\ &\equiv -5x^2 - 10x - 5 \pmod{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} sb = 10x^2 - 5x + 10 : x - 7 &= 10x - 10 & \text{Rest } -10 & \pmod{25} \\ &= & = & \\ & c & d & \end{aligned}$$

- $s^* \equiv s - d \equiv 8 \pmod{25}$
- $t^* \equiv t - tb - cu^* \equiv -8x^2 - 12x - 1 \pmod{25}$

Es gilt

$s^*u^* + t^*w^* \equiv 1 \pmod{25}$ und die Grade von s^* , t^* stimmen mit denen von s bzw. t überein.



Beispiel (Forts.)

5.20 Satz Hensel's Lemma Quadratisches Liften

Sei $l \in \mathbb{N}^+$ und es gelten die Eingangsbedingungen für Hensel-Schritt Algorithmus, dann lassen sich Polynome, die die Ausgabebedingungen erfüllen mit m^2 ersetzt durch m^l .

Beweis: Hensel-Schritt induktiv: m ersetzt durch m, m^2, m^4, \dots

5.21 Beispiel $x^4 - 1 \equiv 0$ Fortsetzung. Sei $m = 5$
 $a, u_1 = u^* \quad w_1 = w^* \quad s_1 = s^* \quad t_1 = t^*$ in $\mathbb{Z}[x]$ aus Beispiel.

- ▶ Es gilt $a \equiv u_1 w_1 \pmod{25}$, $s_1 u_1 + t_1 w_1 \equiv 1 \pmod{25}$.

Beispiel (Forts.)

Anwendung von Hensel-Schritt Algorithmus liefert.

- ▶ $e_2 \equiv a - u_1 w_1 \equiv 50x^2 - 50 \pmod{625}$.
 - ▶ $q_2 \equiv -225x + 300 \pmod{625}$ und $r_2 \equiv -175 \pmod{625}$
 - ▶ $u_2 \equiv x^3 + 182x^2 - x - 182 \pmod{625}$ und $w_2 \equiv x - 182 \pmod{625}$
- ▶ $b_2 \equiv s_1 u_2 + t_1 w_2 - 1 \equiv -225x^2 + 300x - 25 \pmod{625}$
 - ▶ $c_2 \equiv 75x - 200 \pmod{625}$ und $d_2 \equiv 275 \pmod{625}$
- ▶ $s_2 \equiv -267 \pmod{625}$
 - ▶ $t_2 \equiv 267x^2 - 312x - 176 \pmod{625}$
- ▶ Dann $s_2 u_2 + t_2 w_2 \equiv 1 \pmod{625}$.
- ▶ $a \equiv u_2 w_2 \pmod{625}$, d. h. 182 ist 4-Wurzel von 1 mod 625 kongruent zur Startlösung 2 mod 5.

Beispiel: Hensel Lifting

5.22 Beispiel Sei $m = 3$ $a = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 4x + 3 \in \mathbb{Z}[x]$.

Dann gilt

- ▶ $a \equiv x(x+1)(x^2+1) \pmod{3}$. $u_0 = x^2 + xw_0 = x^2 + 1$ teilerfremd mod 3.
- ▶ $s_0 = x + 1$ $t_0 = -x + 1$ $s_0u_0 + t_0w_0 \equiv 1 \pmod{3}$

Zwei Hensel Schritte liefern:

- ▶ $e_1 \equiv a - u_0w_0 \equiv -3x^3 - 3x^2 + 3x + 3 \pmod{9}$
 $q_1 \equiv -3x^2 + 3x + 3 \pmod{9}$ $r_1 \equiv 3x \pmod{9}$
- ▶ $u_1 \equiv x^2 + 4x + 3 \pmod{9}$
- ▶ $w_1 \equiv x^2 + 3x + 1$, $b_1 \equiv 3x^2 + 3$, $c_1 \equiv 3x + 3$, $d_1 \equiv 0 \pmod{9}$
- ▶ $s_1 \equiv x + 1 \pmod{9}$
- ▶ $t_1 \equiv -x - 2 \pmod{9}$ $e_2 \equiv a - u_1w_1 \equiv -9x^3 - 27x^2 - 9x \pmod{81}$
 $q_2 \equiv -9x^2 - 9x \pmod{81}$ $r_2 \equiv 0 \pmod{81}$

Beispiel (Forts.)

- ▶ $u_2 \equiv x^2 - 5x + 3 \pmod{81}$
- ▶ $w_2 \equiv x^2 + 3x + 1 \pmod{81}$ $b_2 \equiv -9x^2 - 9x \pmod{81}$
 $c_2 \equiv -9x + 9 \pmod{81}$ $d_2 \equiv -27x - 9 \pmod{81}$
- ▶ $s_2 \equiv 28x + 10 \pmod{81}$
- ▶ $t_2 \equiv -28x - 29 \pmod{81}$

$$\begin{aligned}
 e_3 &= a - u_2 w_2 = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 4x + 3 \\
 &\quad - \underbrace{(x^2 - 5x + 3)(x^2 + 3x + 1)} \\
 &= -(x^4 + 3x^3 + x^2 - 5x^3 - 15x^2 - 5x + 3x^2 + 9x + 3) \\
 &\quad + x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 4x + 3 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

d.h. Wir erhalten sogar die Faktorisierung in $\mathbb{Z}[x]$, da u_2, w_2 irreduzibel in $\mathbb{Z}[x]$.

Eindeutigkeit des Hensel-Liftings

5.23 Satz

Sei R Ring, $m \in R$ nicht Nullteiler, $l \in \mathbb{N}^+$.

$u, w, u^*, w^*, s, t \in R[x]$ nicht Null mit $su + tw \equiv 1 \pmod{m}$.

Die Hauptkoeffizienten von u und w seien keine Nullteiler \pmod{m} , u und u^* (bzw. w und w^*) haben gleiche Hauptkoeffizienten, gleichen Grad und $u \equiv u^* \pmod{m}$ bzw. $w \equiv w^* \pmod{m}$.

Gilt $uw \equiv u^*w^* \pmod{m^l}$, so $u \equiv u^* \pmod{m^l}$ und $w \equiv w^* \pmod{m^l}$.

Beweis: Angenommen $u \not\equiv u^* \pmod{m^l}$ oder $w \not\equiv w^* \pmod{m^l}$. Wähle $1 \leq i < l$ maximal, so dass $m^i \mid u^* - u$ und $m^i \mid w^* - w$. D. h.

$$u^* - u = gm^i, \quad w^* - w = hm^i$$

$g, h \in R[x]$ und $m \nmid g$ oder $m \nmid h$. **O.b.d.A.** $m \nmid g$

$$\begin{aligned} 0 &\equiv u^*w^* - uw = u^*(w^* - w) + w(u^* - u) \\ &= (u^*h + wg)m^i \pmod{m^l} \end{aligned}$$



Eindeutigkeit des Hensel-Liftings (Forts.)

► Da m kein Nullteiler ist, gilt $m \mid m^{l-i} \mid (u^* h + wg)$.

► Bezeichne mit $\overline{}$ Reduktion mod m : Dann

$$\overline{s} \overline{u} + \overline{t} \overline{w} = 1, \overline{u^*} = \overline{u}, \overline{u^*} \overline{h} + \overline{w} \overline{g} = 0 \text{ also}$$

$$0 = \overline{t} (\overline{u^*} \overline{h} + \overline{w} \overline{g}) = \overline{t} \overline{u} \overline{h} + (1 - \overline{s} \overline{u}) \overline{g}$$

$$= (\overline{t} \overline{h} - \overline{s} \overline{g}) \overline{u} + \overline{g}, \text{ d. h. } \overline{u} \mid \overline{g}$$

► Wegen $\text{HK}(\underline{u}) = \text{HK}(\underline{u^*})$ und $\text{grad } u = \text{grad } u^*$ gilt $\text{grad } \overline{g} < \text{grad } \overline{u}$.

Da $\text{HK}(\overline{u}) = \text{HK}(\underline{u})$ kein Nullteiler ist auch \overline{u} kein Nullteiler und \overline{g} muss 0 Polynom sein. Widerspruch zu $m \nmid g$.

Folgerung

5.24 Folgerung Sei R euklidisch, $p \in R$ Primelement. $l \in \mathbb{N}^+$, $f, g, u \in R[x]$ nicht Null mit $p \nmid \text{HK}(f)$, $f \bmod p$ quadratfrei, $g \mid f$ in $R[x]$, u monisch, nicht konstant mit $u \mid f \bmod p^l$, $u \mid g \bmod p$. Dann gilt $u \mid g \bmod p^l$

Beweis: Seien $h, v, w \in R[x]$ mit $f \equiv gh \equiv uw \bmod p^l$ und $g \equiv uv \bmod p$. Da $f \bmod p$ quadratfrei, ist auch $g \bmod p$ quadratfrei und $\text{GGT}(u \bmod p, v \bmod p) = 1$ in $\mathbb{F}_p[x]$.

- ▶ Hensel's Lemma liefert $u^*, v^* \in R[x]$, so dass $u^* \equiv u \bmod p$, $v^* \equiv v \bmod p$ und $g \equiv u^*v^* \bmod p^l$.
- ▶ Wegen $uvh \equiv gh \equiv uw \bmod p$ gilt $vh \equiv w \bmod p$. Also $v^*h \equiv vh \equiv w \bmod p$ und $u^*(v^*h) \equiv gh = f \equiv uw \bmod p^l$.
- ▶ Da u, v teilerfremd $\bmod p$ sind, liefert die Eindeutigkeit $u \equiv u^* \bmod p^l$ und somit $g \equiv uv^* \bmod p^l$, d. h. $u \mid g \bmod p^l$.

Folgerung

Es gibt auch eine ∞ -Version von Hensel's-Lemma.

P-adische Vervollständigung von R : für $p \in R$ prim (irreduzibel).

$R_{(p)}$ Elemente $\sum_{i \geq 0} a_i p^i$ $0 \leq a_i < p$, ($R = \mathbb{Z}$), sonst
 $F[[y]]$ falls $p = y$ $R = F[y]$.

5.25 Satz ∞ -Version Hensel's Lemma

Kongruenzen mod m^2 werden durch $=$ in $R_{(p)}$ ersetzt.

▶ Lineare vs quadratische Iteration (Lifting)

$$p, p^2, p^3, \dots \quad p, p^2, p^4, p^8 \dots$$

- ▶ Quadratische Iteration muss nicht effizienter als die lineare Iteration sein. Der Vorteil weniger Iterationen machen zu müssen wird durch Kosten für die Einzeliteration relativiert.
- ▶ Vergleich durch **Miola und Yun**: Quadratische Iteration.
Teurer: Hauptsächlich wegen Berechnung von b, sb, s^* und t^* .

Beispiele

Frage: Lässt sich jede teilerfremde Faktorisierung von $a(x) = u_0(x)w_0(x)$ in $\mathbb{Z}_p[x]$ zu einer Faktorisierung in $\mathbb{Z}[x]$ liften? **Drei Beispiele:**

5.26 Beispiel 1

$$a(x) = x^3 + 10x^2 - 432x + 5040 \in \mathbb{Z}[x] \quad p = 5$$

$$\begin{aligned} \Phi_5(a(x)) &= x^3 - 2x \in \mathbb{Z}_5[x] \\ &= x(x^2 - 2) \end{aligned}$$

$$u_1(x) = x \quad w_1(x) = x^2 - 2 \text{ teilerfremd Hensel}$$

$$s(x) = -2x \quad t(x) = 2 \quad (-2x)x + 2(x^2 - 2) \equiv 1 \pmod{5}$$

► **Lineare Iteration:**

<i>Iter.</i>	$\sigma(x)$	$\tau(x)$	$u(x)$	$w(x)$	$e(x)$
0	—	—	x	$x^2 - 2$	$10x^2 - 430x + 5040$
1	$x - 1$	1	$x + 5$	$x^2 + 5x - 7$	$-450x + 5075$
2	$-x + 2$	1	$x + 30$	$x^2 - 20x + 43$	$125x + 3750$
3	1	0	$x + 30$	$x^2 - 20x + 168$	0

Iteration k am Ende $5^{k+1} \mid e(x)$.

Beispiele (Forts.)

5.27 Beispiel 2 Divergenz der Hensel-Iteration

$a(x) = x^4 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ ist irreduzibel über $\mathbb{Z}[x]$.

Sei $p = 5 \rightsquigarrow \Phi_5(a(x)) = x^4 + 1$ Faktorisierung in $\mathbb{Z}_5[x]$.

- ▶ $x^4 + 1 = (x^2 + 2)(x^2 - 2) \in \mathbb{Z}_5[x]$. $u_1(x) = x^2 + 2$ $w_1(x) = x^2 - 2$ sind teilerfremd in $\mathbb{Z}_5[x]$, d.h. Hensel Konstruktion kann angewendet werden. Konstruktion einer Folge von Faktoren mit

$$a(x) \equiv u^{(k)}(x)w^{(k)}(x) \pmod{p^k} \text{ (bzw. } p^{2^k}) \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

- ▶ $s(x) = -1$ $t(x) = 1$ $-1(x^2 + 2) + 1(x^2 - 2) \equiv 1 \pmod{5}$
 $a(x) - (x^2 + 2)(x^2 - 2) = x^4 + 1 - x^4 + 4 = 5 = e(x)$

Beispiele (Forts.)

	Ende Iter. Nr.	$\sigma(x)$	$\tau(x)$	$u(x)$	$w(x)$	$e(x)$
5	0	—	—	$x^2 + 2$	$x^2 - 2$	5
5^2	1	-1	1	$x^2 + 7$	$x^2 - 7$	50
5^3	2	-2	2	$x^2 + 57$	$x^2 - 57$	3250
5^4	3	-1	1	$x^2 + 182$	$x^2 - 182$	33125
5^5	4	2	-2	$x^2 - 1068$	$x^2 + 1068$	1140625

- ∞ -Folge Faktoren in $\mathbb{Z}_{5^k}[x]$ Ende von Iteration k gilt stets

$$u(x)w(x) \equiv x^4 + 1 \pmod{5^{k+1}}$$

- Dies gilt sogar für jede Primzahl p .

Schranke für die Anzahl der Iterationen

- ▶ Apriori Schranke für die **Anzahl der Iterationen**:

$$B \geq \max\{|b| : b \text{ Koeffizienten in Polynom } a \text{ oder in jeden möglichen Faktor von } a \text{ mit Grad} \leq \max\{\text{grad}(u^{(1)}), \text{grad}(w^{(1)})\}\}$$

$p^l > 2B$ Schranke für die Anzahl der Iterationen.

Beispiele (Forts.)

5.28 Beispiel 3 Das Leitkoeffizienten Problem

Nicht-monischer Fall:
$$c(x) = \frac{a(x) - u(x)w(x)}{p}$$

► $\sigma(x)u^{(1)}(x) + \tau(x)w^{(1)} \equiv c(x) \pmod{p}$

Eindeutigkeit wird mit $\text{grad } \sigma(x) < \text{grad } (w^{(1)}(x))$ erreicht.

► Updates:

$$u(x) := u(x) + \tau(x)p \quad w(x) := w(x) + \sigma(x)p$$

↪ Hauptkoeffizienten von w wird niemals verändert.

Im monischen Fall gilt auch $\text{grad } (\tau(x)) < \text{grad } (u^{(1)}(x))$.

↪ Hauptkoeffizienten von u wird ebenfalls niemals verändert.

i.A. $\text{grad } (c(x)) \leq \text{grad } (a(x)) = \text{grad } (u^{(1)}(x)) + \text{grad } (w^{(1)}(x))$,

d. h. $\text{grad } (\tau(x)) \leq \text{grad } (u^{(1)}(x))$.

Beispiele (Forts.)

- ▶ Alle Veränderungen vom Hauptkoeffizienten müssen in u realisiert werden.

$$\begin{aligned} a(x) &= 12x^3 + 10x^2 - 36x + 35 \in \mathbb{Z}[x] \\ &= u(x)w(x) = (2x + 5)(6x^2 - 10x + 7) \in \mathbb{Z}[x] \end{aligned}$$

- ▶ $p = 5 \quad \Phi_5(a(x)) = 2x^3 - x \in \mathbb{Z}_5[x] = 2(x)(x^2 + 2)$
2 ist Einheit in $\mathbb{Z}_5[x]$.

Wahl der Anfangsfaktoren: 2 zum Faktor x oder
2 zum Faktor $x^2 + 2$

$$\text{d.h. } \Phi_5(a(x)) = (2x)(x^2 + 2) = (x)(2x^2 - 1) \in \mathbb{Z}_5[x]$$

- ▶ Die richtigen Faktoren sind
 $u^{(1)}(x) = 2x$ und $w^{(1)}(x) = x^2 + 2$

- ▶ Hensel's Konstruktion: $s(x) = x \quad t(x) = -2$

$$u(x) = 2x \quad w(x) = x^2 + 2 \quad e(x) = 10x^3 + 10x^2 - 40x + 35 \pmod{5}$$

Beispiele (Forts.)

$\sigma(x)$	$\tau(x)$	$u(x)$	$w(x)$	$e(x)$
—	—	$2x$	$x^2 + 2$	$10x^3 + 10x^2 - 40x + 35$
$-2x - 1$	$2x + 1$	$12x + 5$	$x^2 - 10x - 3$	$125x^2 + 50x + 50$
$2x + 1$	1	$12x + 30$	$x^2 + 40x + 22$	$-500x^2 - 1500x - 625$
$-2x - 2$	0	$12x + 30$	$x^2 - 210x - 103$	$2500x^2 + 7500x + 3125$
$2x + 1$	0	$12x + 30$	$x^2 + 1040x + 522$	$-12500x^2 - 37500x - 15625$

- ▶ Aufspaltung von 12 in $2 \cdot 6$?

d. h.

- ▶ $u^{(3)}(x) = 12x + 30$ $w^{(3)}(x) = x^2 + 40x + 22$

Beispiele (Forts.)

- ▶ Sind bis auf Einheiten die richtigen Faktoren

$$u^{(3)}(x)w^{(3)}(x) = 12x^3 + 510x^2 + 1464x + 660 \in \mathbb{Z}[x]$$

- ▶ $6^{-1}u^{(3)}(x) \bmod \mathbb{Z}_{125}[x]$ $6w^{(3)}(x) \bmod \mathbb{Z}_{125}[x]$

$$6^{-1} = 21 \rightsquigarrow u(x) = 21u^{(3)}(x) = 2x + 5 \in \mathbb{Z}_{125}[x]$$

$$w(x) = 6w^{(3)}(x) = 6x^2 - 10x + 7 \in \mathbb{Z}_{125}[x]$$

- ▶ Verwendet wird: 6 ist der richtige LK von w .
- ▶ Beachte: $a \in \mathbb{Z}_{p^k}$ ist Einheit gdw $p \nmid a$ in \mathbb{Z} .

Uften von Faktorisierungen

5.29 Satz Sei $a(x) \in \mathbb{Z}[x]$, p Primelement in \mathbb{Z} , $p \nmid \text{HKoeff}(a(x))$.

- ▶ Seien $u^{(1)}(x), w^{(1)}(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ teilerfremd über \mathbb{Z}_p mit $a(x) \equiv u^{(1)}(x)w^{(1)}(x) \pmod p$.
- ▶ Seien $u^{(k)}(x), w^{(k)}(x)$, die von der Hensel Konstruktion bestimmten Faktoren mit $a(x) \equiv u^{(k)}(x)w^{(k)}(x) \pmod{p^k}$,
 $u^{(k)}(x) \equiv u^{(1)}(x) \pmod p$, $w^{(k)}(x) \equiv w^{(1)}(x) \pmod p$.
- ▶ Gibt es Polynome $u(x), w(x) \in \mathbb{Z}[x]$ mit $a(x) = u(x)w(x)$ in $\mathbb{Z}[x]$ und $n(u(x)) \equiv n(u^{(1)}(x)) \pmod p$ bzw. $n(w(x)) \equiv n(w^{(1)}(x)) \pmod p$, wobei n die Normalisierung „mache Polynom monisch als Element von $\mathbb{Z}_p[x]$ “.
- ▶ Dann sind für alle $k \geq 1$ die Polynome $\Phi_{p^k}(u(x))$ und $u^{(k)}(x)$, sowie $\Phi_{p^k}(w(x))$ und $w^{(k)}(x)$ assoziiert im Ring $\mathbb{Z}_{p^k}[x]$.



Liften von Faktorisierungen (Beweis)

- ▶ Angenommen es gibt $u(x), w(x)$ mit $a(x) = u(x)w(x)$ in $\mathbb{Z}[x]$.
 $n(u(x)) \equiv n(u^{(1)}(x)) \pmod{p}$, $n(w(x)) \equiv n(w^{(1)}(x)) \pmod{p}$.
- ▶ Betrachte $\Phi_{p^k}(u(x))$ und $\Phi_{p^k}(w(x)) \in \mathbb{Z}_{p^k}[x]$. Wie eben kann man diese in $\mathbb{Z}_{p^k}[x]$ normalisieren zu $\bar{u}(x), \bar{w}(x)$.
- ▶ Wegen der Eindeutigkeit gilt dann:
 $\bar{u}^{(k)}(x) = \bar{u}(x)$ $\bar{w}^{(k)}(x) = \bar{w}(x)$ in $\mathbb{Z}_{p^k}[x]$,
d. h.
- ▶ $u^{(k)}(x)$ und $\Phi_{p^k}(u(x))$ sind assoziiert im Ring $\mathbb{Z}_{p^k}[x]$,
- ▶ Analog für $w^{(k)}(x)$ und $\Phi_{p^k}(w(x))$.



Beispiel (Forts.)

5.30 Beispiel $a(x) = 12x^3 + 10x^2 - 36x + 35 \in \mathbb{Z}[x]$
 $= u(x)w(x) = (2x + 5)(6x^2 - 10x + 7) \in \mathbb{Z}[x]$

▶ $\Phi_5(a(x)) = (2x) \cdot (x^2 + 2) = u^{(1)}(x) \cdot w^{(1)}(x)$

▶ $\Phi_5(u(x)) = \Phi_5(2x + 5) = 2x$

▶ $\Phi_5(w(x)) = \Phi_5(6x^2 - 10x + 7) = x^2 + 2$

▶ $u^{(2)}(x) = 12x + 5 \quad w^{(2)}(x) = x^2 - 10x - 3$

▶ $\Phi_{25}(u(x)) = 2x + 5 \quad \Phi_{25}(w(x)) = 6x^2 - 10x + 7$
 Unterscheiden sich um Einheiten, z. B. $-4(6x^2 - 10x + 7)$
 $\equiv x^2 - 10x - 3 \quad -4(12x + 5) = 2x + 5$

▶ $w^{(3)}(x) = x^2 + 40x + 22 \quad u^{(3)}(x) = 12x + 30$

▶ $\Phi_{125}(w(x)) = 6x^2 - 10x + 7 \quad \Phi_{125}(u(x)) = 2x + 5$
 $6^{-1}u^{(3)}(x) = 21u^{(3)}(x) = 2x + 5, \quad 6w^{(3)}(x) = 6x^2 - 10x + 7$

Modifizierte Hensel Konstruktion: nicht monischer Fall

- ▶ Sei $a(x) \in \mathbb{Z}[x]$ primitiv, $a(x) \equiv u^{(1)}(x)w^{(1)}(x) \pmod{p}$ und es gebe $u(x), w(x)$ mit $a(x) = u(x)w(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

Es gelte $n(u^{(1)}(x)) \equiv n(u(x)) \pmod{p}$, $n(w^{(1)}(x)) \equiv n(w(x)) \pmod{p}$.

- ▶ $\alpha = \text{HKoeff}(a(x))$, $\mu = \text{HKoeff}(u(x))$, $\nu = \text{HKoeff}(w(x))$,
- ▶ $\alpha = \mu\nu$. Sei $\bar{a}(x) = \alpha a(x)$. Suche Faktorisierung von $\bar{a}(x) = \mu\nu u(x)w(x) = [\nu u(x)][\mu w(x)] = \bar{u}(x)\bar{w}(x)$.
- ▶ Die Hauptkoeffizienten der Faktoren sind bekannt, beide = α . Modifiziere die Hensel Konstruktion so, dass

$$\bar{u}^{(k)}(x) = \Phi_{p^k}(\bar{u}(x)) \quad \bar{w}^{(k)}(x) = \Phi_{p^k}(\bar{w}(x))$$

$$\bar{u}^{(k)}(x) = \Phi_{p^k}(\alpha \text{HKoeff}(u^{(k)})^{-1} u^{(k)}(x)), \quad \bar{w}^{(k)}(x) = \Phi_{p^k}(\alpha \text{HKoeff}(w^{(k)})^{-1} w^{(k)}(x))$$

$$\rightsquigarrow u(x) = pp(\bar{u}(x)) \text{ und } w(x) = pp(\bar{w}(x))$$

Modifizierte Hensel Konstruktion: nicht monischer Fall

5.31 Beispiel

$$\begin{aligned} a(x) &= 12x^3 + 10x^2 - 36x + 35 \in \mathbb{Z}[x] \text{ primitiv.} \\ &\equiv u^{(1)}(x)w^{(1)}(x) \pmod{5} \end{aligned}$$

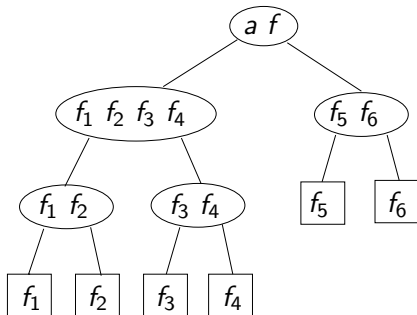
- ▶ Mit $u^{(1)}(x) = 2x$, $w^{(1)}(x) = x^2 + 2$.
- ▶ $\bar{a}(x) = 12a(x) = 144x^3 + 120x^2 - 432x + 420$
 $\bar{a}(x) \equiv \bar{u}^{(1)}(x)\bar{w}^{(1)}(x) \pmod{5}$ mit
 $\bar{u}^{(1)}(x) = \Phi_5(12 \cdot 2^{-1}(2x)) = 2x$
 $\bar{w}^{(1)}(x) = \Phi_5(12 \cdot 1^{-1}(x^2 + 2)) = 2x^2 - 1$
- ▶ Hensel Schritt auf $\bar{a}(x)$.
 $u^{(2)}(x) = \bar{u}^{(1)}(x) + (-x + 1)5 = -3x + 5$
 $w^{(2)}(x) = \bar{w}^{(1)}(x) + (x - 1)5 = 2x^2 + 5 - 6$
- ▶ $\bar{u}^{(2)}(x) = \Phi_{25}(12 (-3)^{-1}(-3x + 5)) = 12x + 5$
 $\bar{w}^{(2)}(x) = \Phi_{25}(12 \cdot 2^{-1}(2x^2 + 5x - 6)) = 12x^2 + 5x - 11$

Multifaktor Hensel Lifting

- ▶ Lifte Faktorisierung in mehr als zwei Faktoren.
- ▶ Sei R Ring, $m \in R$, $f, f_1, \dots, f_r \in R[x]$, so dass $\text{HKoeff}(f)$ Einheit mod m ist, f_1, \dots, f_r monisch und $f \equiv \text{HKoeff}(f) f_1 \dots f_r \pmod{m}$.
Dann gibt es $a \in R$ mit $a \cdot \text{HKoeff}(f) \equiv 1 \pmod{m}$
- ▶ Ordne die monischen Faktoren ν von f modulo m als Binärbaum τ der Tiefe $d = \lceil \log_2 r \rceil$,
mit Blättern f_1, \dots, f_r , Wurzel af ,
so dass jeder innere Knoten Produkt seiner beiden Söhne modulo m ist.
- ▶ Offenbar gibt es mehrere Möglichkeiten ein Polynom in Zweierfaktoren zu zerlegen. **Problem der kombinatorischen Explosion.**

Multifaktor Hensel Lifting (Forts.)

- Mehrere Anordnungen sind möglich. z. B. $r = 6$.



Algorithmus Liften eines Faktorisierungsbaumes mod m

Eingabe: $m \in R$, $f \in R[x]$ mit Grad n , $a_0 \in R$ mit $a_0 \text{HKoeff}(f) \equiv 1 \pmod{m}$, $l \in \mathbb{N}$, Faktorbaum τ für $f \pmod{m}$ mit Wurzel $a_0 f$ und r Blätter

Ausgabe: Eine Inverse $a^* \in R$ von $\text{HKoeff}(f) \pmod{m^l}$ und ein Faktorbaum τ^* von f modulo m^l mit Wurzel $a^* f$, so dass jeder Knoten $\nu^* \in R[x]$ von τ^* kongruent modulo m zum entsprechenden Knoten $\nu \in R[x]$ von τ

Beachte: Baumstruktur bleibt unverändert.

Algorithmus Multifaktor Hensel Lifting (MFHL)

- 1 $d := \lceil \log_2 l \rceil, \tau_0 := \tau$
- 2 **for** $j = 1 \dots d$ **do**
- 3 {Lifte Inverse von $HKoeff(f)$ }
 $a_j := 2a_{j-1} - HKoeff(f)a_{j-1}^2 \bmod m^{2^j};$
 $\tau_j := \tau_{j-1};$
 Ersetze Wurzel von τ_j durch $a_j f$
- 4 {Lifte Baum}
 for jeden inneren Knoten $\nu \in R[x]$ von
 τ_j **von der Wurzel abwärts do**
- 5 Call Hensel_Schritt_Alg mit $m^{2^{j-1}}$
 um die Kongruenzen $\nu \equiv g_\nu h_\nu$
 und $s_\nu g_\nu + t_\nu h_\nu \equiv 1 \bmod m^{2^{j-1}}$
 zu Kongruenzen modulo m^{2^j} zu Liften
- 6 **return** a_d und τ_d

Algorithmus Multifaktor Hensel Lifting (MFHL)

5.32 Satz Der Algorithmus MFHL ist korrekt bzgl. seiner spec.

Er benötigt

$0(M(n) \log rM(l \log m))$ Wortoperationen, falls $R = \mathbb{Z}$, $m > 1$ alle
Eingaben mit $\max_Norm < m^l$ und

$0(M(n) \log rM(l \text{ grad}_y m))$ Operationen in F , falls $R = F[y]$, Körper F
und y -Grad aller Eingaben kleiner als $l \text{ grad}_y m$.

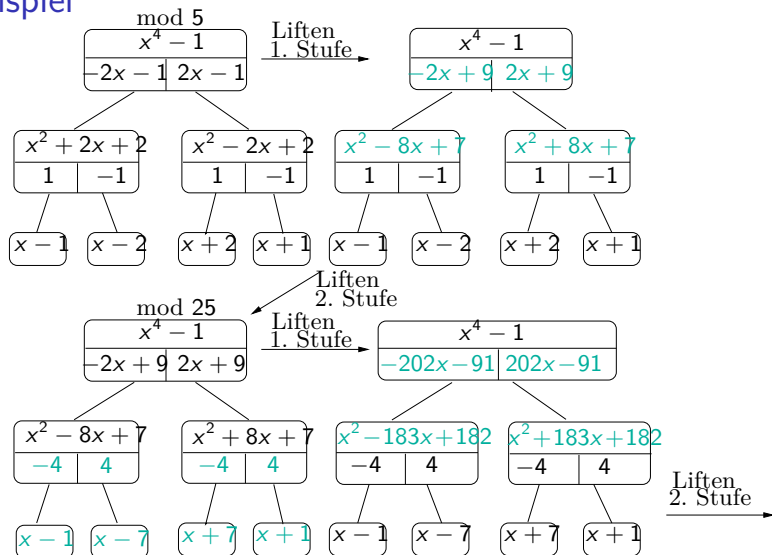
Beweis:

- ▶ Schritt 3 ist korrekt nach inversen Berechnung, nach Newton-Quadrat-Iteration; d. h. die Wurzel von τ_j ist der monische Vielfache von $f \bmod m^{2^j}$.
- ▶ Durch Induktion nach j zeige τ_j ist Faktorbaum von $f \bmod m^{2^j}$ und jeder Knoten von τ_j ist kongruent mod m zum entsprechenden Knoten von τ .
 - ▶ $j = 0$ klar.
 - ▶ $j \geq 1$. Wurzel- $\tau_j \equiv$ Wurzel- $\tau_{j-1} \bmod m$.

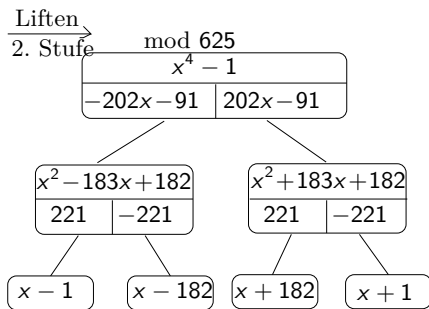
Algorithmus MFHL Korrektheit(Forts.)

- ▶ Behauptung über τ_j folgt nun durch Induktion über Baum und Korrektheit von Hensel Schritt. Wegen $l \leq 2^d$ ist τ_d auch Faktorbaum für $f \bmod m^l$.
- ▶ $R = \mathbb{Z}$: Reduktion der Koeffizienten von f modulo m, m^2, m^4, \dots kann mit $O(nM(l \log m))$ Wortoperationen durchgeführt werden.
- ▶ Schritt 5 kostet $O(M(\text{grad } v)M(2^j \log m))$ Wortoperationen
- ▶ In einer Stufe von τ_j ist die Summe der Grade aller Knoten höchstens n , d.h. die Kosten für diese Stufe ist höchstens $O(M(n)M(2^j \log m))$ Wortoperationen.
- ▶ Es gibt $d \in O(\log r)$ Stufen und die Kosten von 4 und 5 für festes j ist $O(M(n) \log r M(2^j \log m))$ Wortoperationen. Dies dominiert Schritt 3. Behauptung folgt aus $\sum_{1 \leq j \leq d} 2^j \leq 4l$.
- ▶ Durch balancieren des Faktorbaums bzgl. Grad lässt sich der Faktor $\log r$ durch die Entropie $H(n_1/n, \dots, n_r/n)$ ($n_i = \text{grad } f_i$) ersetzen.

Beispiel

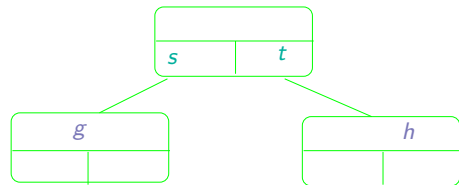


Beispiel(Forts.)



Ausgang

$$x^4 - 1 \equiv (x - 1)(x - 2)(x + 2)(x + 1) \pmod{5}$$



$$sg + th \equiv 1 \pmod{5}$$

Faktorisierung in $\mathbb{Z}[x]$ mit quadratischem Hensel Lifting. Der Algorithmus Faktorisierung in $\mathbb{Z}[x]$ nach Zassenhaus

//Eingabe: $f \in \mathbb{Z}[x]$ quadratfrei, primitiv, $\text{grad } n \geq 1$ mit $\text{HKoeff}(f) > 0$, $\max_norm f = A$.

Ausgabe: Irreduzible Faktoren $\{f_1, \dots, f_k\} \subseteq \mathbb{Z}[x]$ von f //

1 **if** $n = 1$ **then return** $\{f\}$

$b := \text{HKoeff}(f)$; $B := (n + 1)^{1/2} 2^n A b$;

$c := (n + 1)^{2n} A^{2n-1}$; $\gamma := \lceil 2 \log_2 c \rceil$;

2 **repeat** wähle Primzahl $p \leq 2\gamma \ln \gamma$, $\bar{f} := f \bmod p$
until $p \nmid b$ and \bar{f} quadratfrei in $\mathbb{F}_p[x]$

$l := \lceil \log_p(2B + 1) \rceil$

3 {Modulare Faktorisierung}

Berechne $h_1, \dots, h_r \in \mathbb{Z}[x]$ mit \max_norm höchstens $p/2$ die nicht konstant, monisch und irreduzibel modulo p mit

$f \equiv b h_1 \cdots h_r \bmod p$

Algorithmus (Forts.)

4 {Hensel Lifting}

$$a := b^{-1} \bmod p$$

Verwende EEA in $\mathbb{F}_p[x]$ um Faktorbaum für f modulo p mit Blätter $h_1 \cdots h_r$ zu bestimmen

Call MFHL um Faktorisierung $f \equiv bg_1 \cdots g_r \bmod p^l$

mit monischen Polynome $g_1, \dots, g_r \in \mathbb{Z}[x]$ mit \max_norm höchstens $p^l/2$ so dass $g_i \equiv h_i \bmod p$ ($1 \leq i \leq r$) zu berechnen

5 {Initialisiere die Indexmenge T der modularen Faktoren, die noch behandelt werden müssen, die Menge G der gefundenen Faktoren, sowie Restpolynom das noch faktorisiert werden muss f^* }

$$T := \{1, \dots, r\}; s := 1; G := \emptyset; f^* := f;$$

Algorithmus (Forts.)

6 {Faktoren-Kombination}

- ```

while $2s \leq \#T$ do
7 for all subsets $S \subseteq T$ of cardinality $\#S = s$ do
8 Compute $g^*, h^* \in \mathbb{Z}[x]$ mit $\max_norm \leq p^l/2$ und
 $g^* \equiv b \prod_{i \in S} g_i \pmod{p^l}$ $h^* \equiv b \prod_{i \in T \setminus S} g_i \pmod{p^l}$
9 if $\|g^*\|_1 \|h^*\|_1 \leq B$ then
 $T := T \setminus S$; $G := G \cup \{pp(g^*)\}$;
 $f^* := pp(h^*)$; $b := \text{HKoeff}(f^*)$;
 goto 6;
10 $s := s + 1$;
11 return $G \cup \{f^*\}$

```

## Algorithmus (Forts.)

- ▶ Hierbei ist

$$\|f\|_1 = \sum_{0 \leq i \leq \text{grad } f} |f_i|, \quad \|f_1\|_\infty \leq \|f\|_1 \leq (n+1)\|f\|_\infty$$

- ▶  $\|g^*\|_1 \|h^*\|_1 \leq B$  gdw.  $g^* h^* = bf^*$

„↪“ Mignotes Schranke (vzG. S. 156).

„↪“ wegen  $g^* h^* \equiv bf^* \pmod{p^l}$ .

$\|g^* h^*\|_\infty \leq \|g^* h^*\|_1 \leq \|g^*\|_1 \|h^*\|_1 \leq B < p^{l/2}$ , d. h. | alle Koeff. |  $< p^{l/2} \rightsquigarrow$  gleich.

**5.33 Satz** (Beweis später). Der Algorithmus ist korrekt, Kosten später.

## Algorithmus Zassenhaus: Beispiel

**5.34 Beispiel**  $f = 6x^4 + 5x^3 + 15x^2 + 5x + 4 \in \mathbb{Z}[x]$ .

Wähle  $p = 5$ ,  $\bar{f} = x^4 - 1$  mit  $f \equiv \bar{f} \pmod{5}$ .

$\bar{f}$  ist quadratfrei in  $\mathbb{Z}_5[x]$ .  $B := \sqrt{5} \cdot 2^4 \cdot 15 \cdot 6 \approx 3220$ ,

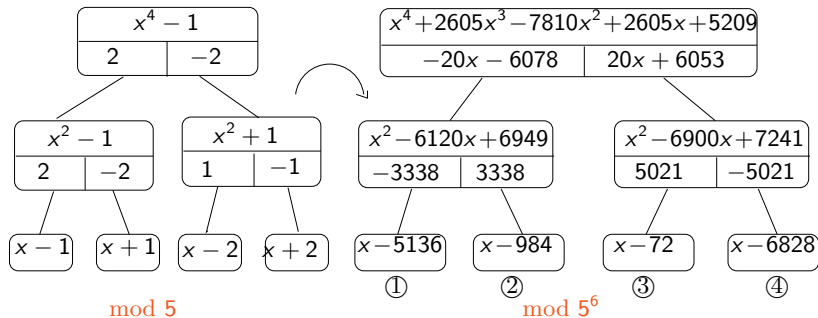
- ▶  $l = \lceil \log_5(2B + 1) \rceil = 6$ .
- ▶ Schritt 3: modulare Faktorisierung

$$f \equiv bh_1h_2h_3h_4 = 1(x-1)(x+1)(x-2)(x+2) \pmod{5}$$

- ▶ Schritt 4: Liften eines Faktorbaumes für  $f \pmod{5}$  zu Faktorbaum für  $f$  modulo  $5^6$  (  $\text{mod}5^6$  aus Schranke  $l$ ).

## Algorithmus Zassenhaus: Beispiel (Forts.)

Schritt 4:



## Algorithmus Zassenhaus: Beispiel (Forts.)

- ▶ Teilmengen von  $S \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$  mit  $S = 1$ : Keine Faktorisierung.

$$S = \{1, 3\} : g^* \equiv bg_1g_3 = 6(x - 5136)(x - 72)$$

$$\equiv 6x^2 + 2x + 2 \pmod{5^6}$$

$$h^* \equiv bg_2g_4 = 6(x - 984)(x - 6828) \equiv 6x^2 + 3x + 12 \pmod{5^6}.$$

$$\|g^*\|_1 \|h\|_1 \leq B, \text{ d. h. } g^*h^* = bf^*.$$

- ▶  $pp(g^*) = 3x^2 + x + 1$   $pp(h^*) = 2x^2 + x + 4$  sind die irreduziblen Faktoren von  $f$ .

# Multivariate Verallgemeinerung von Hensel's Lemma

**Problemstellung:** Finde  $u, w \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_\nu]$  mit

$$F(u, w) = a(x_1, \dots, x_\nu) - uw = 0$$

und

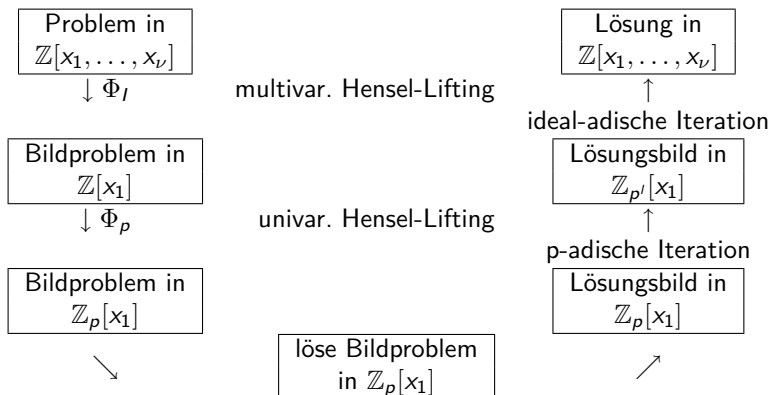
$$u(x_1, \dots, x_\nu) \equiv u_0(x_1) \pmod{\langle l, p \rangle}$$

$$w(x_1, \dots, x_\nu) \equiv w_0(x_1) \pmod{\langle l, p \rangle}$$

Bei Geg.  $u_0, w_0$  mit  $a \equiv u_0 w_0 \pmod{\langle l, p \rangle}$

$l = \langle x_2 - \alpha_2, \dots, x_\nu - \alpha_\nu \rangle, p$  Primzahl.

## Homomorphismus Diagramm



Beachte den Unterschied zum Lifting von  $F(u) = 0$  via Newton Iteration:  $\Phi_I$  und  $\Phi_p$  vertauscht. Bei p-adischer Iteration steht  $\mathbb{Z}_{p'}[x_1]$  und nicht  $\mathbb{Z}[x_1]$ : Hierbei muss  $l$  groß genug gewählt werden. Trennung vom multivariaten und univariaten Fall.

## Multivariate Verallgemeinerung von Hensel's Lemma

Die **Grundoperation** bei der Hensel Iteration zur Lösung von  $F(u, w) = a(x_1, \dots, x_\nu) - uw = 0$  ist die Bestimmung der Lösungen einer polynomialen diophantischen Gleichung der Form

$$(*) \quad A^{(k)} \Delta u^{(k)} + B^{(k)} \Delta w^{(k)} = C^{(k)}$$

Für Korrekturterme  $\Delta u^{(k)}, \Delta w^{(k)}$  mit  $A^{(k)}, B^{(k)}$  und  $C^{(k)}$  gegebene Polynome.

- ▶ Bei Vertauschung von  $\Phi_l, \Phi_p$  müssten für das l-adische Lifting die Gleichungen in  $\mathbb{Z}_p[x_1]$  gelöst werden und für das p-adische Lifting in  $\mathbb{Z}_p[x_1, \dots, x_\nu]$ .
- ▶ Die Lösung von (\*) im euklidischen Bereich  $\mathbb{Z}_p[x]$  ist einfach, aber in  $\mathbb{Z}_p[x_1, \dots, x_\nu]$  schwierig (kein euklidischer Bereich).







Lösung diophantischer Polynomgleichungen in  $\mathbb{Z}_p[x_1]$ 

Lineare Iteration::

$$s^{(k+1)} = s^{(k)} + \Delta s^{(k)}, t^{(k+1)} = t^{(k)} + \Delta t^{(k)}$$

$$(\#) \quad u(x_1)s_k(x_1) + w(x_1)t_k(x_1) \equiv \frac{1 - s^{(k)}u(x_1) - t^{(k)}w(x_1)}{p^k} \pmod{p}$$

wobei  $\Delta s^{(k)} = s_k(x_1)p^k$   $\Delta t^{(k)} = t_k(x_1)p^k$ .

$s^{(1)}, t^{(1)}$  werden aus (\*) in  $\mathbb{Z}_p[x_1]$  bestimmt mit EEA.

Für  $k = 1, 2, \dots, l-1$  wird (#) in  $\mathbb{Z}_p[x]$  gelöst unter Verwendung von  $s^{(1)}, t^{(1)}$ .

Wir erhalten somit folgenden Satz.

Lösung diophantischer Polynomgleichungen in  $\mathbb{Z}_{p^l}[x_1]$ 

**5.35 Satz** Sei  $p$  Primzahl,  $l \in \mathbb{N}^+$  und  $u(x_1), w(x_1) \in \mathbb{Z}_{p^l}[x_1]$  mit

- i)  $p \nmid \text{HKoeff}(u(x_1)), p \nmid \text{HKoeff}(w(x_1))$ .
- ii)  $\Phi_p(u(x_1))$  und  $\Phi_p(w(x_1))$  teilerfremd in  $\mathbb{Z}_p[x_1]$ .

Dann gibt es für jeden Polynom  $c(x_1) \in \mathbb{Z}_{p^l}[x_1]$  eindeutig bestimmte Polynome  $\sigma(x_1), \tau(x_1) \in \mathbb{Z}_{p^l}[x_1]$  mit

$$\sigma(x_1)u(x_1) + \tau(x_1)w(x_1) \equiv c(x_1) \pmod{p^l}$$

und

$$\text{grad}(\sigma(x_1)) < \text{grad}(w(x_1))$$

Ist  $\text{grad}(c(x_1)) < \text{grad}(u(x_1)) + \text{grad}(w(x_1))$  erfüllt, so gilt auch

$$\text{grad}(\tau(x_1)) < \text{grad}(u(x_1))$$

**Beweis:** Existenz klar. Eindeutigkeit: Siehe Beweis der Eindeutigkeit bei Hensel's quadratischem Lifting.

## Multivariate Hensel Konstruktion

Finde multivariate Polynome

$u(x_1, \dots, x_\nu), w(x_1, \dots, x_\nu) \in \mathbb{Z}_{p^l}[x_1, \dots, x_\nu]$  mit

$$a(x_1, \dots, x_\nu) - uw \equiv 0 \pmod{p^l},$$

so dass

$$\begin{aligned} u(x_1, \dots, x_n) &\equiv u^{(1)}(x_1) \pmod{\langle l, p^l \rangle} \\ w(x_1, \dots, x_n) &\equiv w^{(1)}(x_1) \pmod{\langle l, p^l \rangle} \end{aligned}$$

wobei  $u^{(1)}(x_1), w^{(1)}(x_1) \in \mathbb{Z}_{p^l}[x_1]$  gegeben mit

$$a(x_1, \dots, x_\nu) - u^{(1)}(x_1)w^{(1)}(x_1) \equiv 0 \pmod{\langle l, p^l \rangle}$$

$a(x_1, \dots, x_\nu) \in \mathbb{Z}_{p^l}[x_1, \dots, x_\nu], l \in \mathbb{N},$   
 $l = \langle x_2 - \alpha_2, \dots, x_\nu - \alpha_\nu \rangle.$

## Multivariate Hensel Konstruktion

Bezeichnet man die gesuchten Lösungen mit  $\bar{u}$ ,  $\bar{w}$  und betrachtet man ihre  $l$ -adischen Entwicklungen, so

$$\bar{u} = u^{(1)} + \Delta u^{(1)} + \Delta u^{(2)} + \dots + \Delta u^{(d)}$$

bzw.

$$\bar{w} = w^{(1)} + \Delta w^{(1)} + \Delta w^{(2)} + \dots + \Delta w^{(d)}$$

wobei  $d$  maximaler totaler Grad von Termen in  $\bar{u}$  oder  $\bar{w}$ ,  
 $u^{(1)} = \Phi_l(\bar{u})$ ,  $w^{(1)} = \Phi_l(\bar{w})$  und  $\Delta u^{(k)}, \Delta w^{(k)} \in l^{(k)}$  ( $k = 1, 2, \dots, d$ ).

### Multivariate Taylor Darstellung

$$\Delta u^{(k)} = \sum_{i_1=2}^{\nu} \sum_{i_2=i_1}^{\nu} \dots \sum_{i_k=i_{k-1}}^{\nu} u_i(x_1) \prod_{j=1}^k (x_{i_j} - \alpha_{i_j})$$

$i = (i_1, \dots, i_k)$   $u_i(x_1) \in \mathbb{Z}_{p'}[x_1]$ .

Analog mit  $\Delta w^{(k)}$ .

## Multivariate Taylor Darstellung

Zu lösen ist

$$(*) \quad w^{(k)} \Delta u^{(k)} + u^{(k)} \Delta w^{(k)} \equiv a(x_1 \dots x_\nu) - u^{(k)} w^{(k)} \pmod{\langle I^{k+1}, p^l \rangle}$$

wobei  $u^{(k)} w^{(k)}$  die ideal-adische Approximation der Ordnung  $k$  sind, d. h.

$$a(x_1, \dots, x_\nu) - u^{(k)} w^{(k)} \in I^k$$

Rechte Seite von  $(*)$  hat die Gestalt

$$\sum_{i_2=2}^{\nu} \sum_{i_2=i_1}^{\nu} \cdots \sum_{i_k=i_{k-1}}^{\nu} c_i(x_1) \prod_{j=1}^k (x_{i_j} - \alpha_{i_j})$$

für geeignete  $c_i(x_1) \in \mathbb{Z}_{p^l}[x_1]$ . Ersetzen und Koeffizientenvergleich liefert

$$(**) \quad w^{(k)} u_i(x_1) + u^{(k)} w_i(x_1) \equiv c_i(x_1) \pmod{\langle I, p^l \rangle}$$

Hieraus lassen sich die  $I$ -adischen Koeffizienten  $u_i(x_1), w_i(x_1) \in \mathbb{Z}_{p^l}[x_1]$  bestimmen.

## Multivariate Hensel Konstruktion

Da dies eine Kongruenz mod  $I$  ist, kann man  $\Phi_I$  auf die linke Seite anwenden, d. h. zu lösen ist.

$$w^{(1)}(x_1)u_i(x_1) + u^{(1)}(x_1)w_i(x_1) \equiv c_i(x_1) \pmod{p^l}$$

wobei  $u^{(1)}(x_1), w^{(1)}(x_1) \in \mathbb{Z}_{p^l}[x_1]$  die Ausgangspolynome der Lösung sind. Unter den vorgegebenen Bedingungen gilt sogar Eindeutigkeit der Lösungen.

### 5.36 Satz Multivariate Hensel Konstruktion

Sei  $p$ -Primzahl,  $I \in \mathbb{N}^+$ ,  $a(x_1, \dots, x_\nu) \in \mathbb{Z}_{p^l}[x_1, \dots, x_\nu]$ ,

$I = \langle x_2 - \alpha_2, \dots, x_\nu - \alpha_\nu \rangle$ ,  $\alpha_2, \dots, \alpha_\nu \in \mathbb{Z}_p$ ,

$p \nmid \text{HKoeff}(\Phi_I(a(x_1, \dots, x_\nu)))$  und seien  $u^{(1)}(x_1), w^{(1)}(x_1) \in \mathbb{Z}_{p^l}[x_1]$  mit

- i)  $a(x_1, \dots, x_\nu) \equiv u^{(1)}(x_1)w^{(1)}(x_1) \pmod{\langle I, p^l \rangle}$
- ii)  $\Phi_p(u^{(1)}(x_1)), \Phi_p(w^{(1)}(x_1))$  teilerfremd in  $\mathbb{Z}_p[x_1]$ .



## Satz: Multivariate Hensel Konstruktion

- ▶ Dann gibt es für  $k \geq 1$  multivariate Polynome  $u^{(k)}, w^{(k)} \in \mathbb{Z}_{p^l}[x_1, \dots, x_\nu]/I^k$ , so dass

$$a(x_1, \dots, x_\nu) \equiv u^{(k)} w^{(k)} \pmod{\langle I^k, p^l \rangle}$$

und  $u^{(k)} \equiv u^{(1)}(x_1) \pmod{\langle I, p^l \rangle}$      $w^{(k)} \equiv w^{(1)}(x_1) \pmod{\langle I, p^l \rangle}$

- ▶ **Eindeutigkeit:** Falls  $a(x_1, \dots, x_\nu)$  monisch bzgl.  $x_1$ , d. h. der Koeffizient in  $a(x_1, \dots, x_\nu)$  von  $x_1^{d_1}$  ist 1, wobei  $d_1$  der Grad von  $a$  in  $x_1$  ist. Werden  $u^{(1)}(x_1)$  und  $w^{(1)}(x_1)$  monisch gewählt, so sind die Lösungen der diophantischen Gleichungen (\*\*\*) eindeutig.
- ▶ **Probleme bei der Anwendung:** Leading Coeff. Problem und Bad Zero Problem.  $\rightsquigarrow$  exponentielles Wachstum für Zwischenergebnisse.



## Beispiel (Forts.)

Betrachte die  $l$ -adische Darstellung von  $a(x, y, z)$ :

$$a(x, y, z) \equiv (x^2 + 2x + 2) - (x^2 + 1)(y - 1) + (x^2 + x - 1)(z - 1)$$

$$\begin{aligned} &+ (x^2 - x)(y - 1)^2 - (x^2 - 1)(y - 1)(z - 1) + (2x - 1)(z - 1)^2 \\ &- (x^2 - x)(y - 1)^3 + (x^2 - 2x)(y - 1)^2(z - 1) - \\ &- (x + 1)(y - 1)(z - 1)^2 + (x - 1)(z - 1)^3 + (x^2 - x)(y - 1)^4 \\ &+ (-x^2 + 2x)(y - 1)^3(z - 1) - x(y - 1)^2(z - 1)^2 \\ &+ (x - 1)(y - 1)(z - 1)^3 - (z - 1)^2 - (x - 2)(y - 1)^5 \\ &+ (x^2 - 2x)(y - 1)^4(z - 1) + x(y - 1)^3(z - 1)^2 \\ &- (y - 1)(z - 1)^4 + (x - 1)(y - 1)^6 - (2x + 1)(y - 1)^5(z - 1) \\ &- x(y - 1)^4(z - 1)^2 - x(y - 1)^7 + (2x + 1)(y - 1)^6(z - 1) \\ &- \dots \\ &- \dots \\ &- \dots \\ &- (y - 1)^6(z - 1)^4 - x(y - 1)^9(z - 1)^2 \pmod{5} \end{aligned}$$



## Hensel Konstruktion für das Beispiel

Ausmultiplizieren mod 5 liefert

$$u^{(7)} \equiv xy^4z + yz^3 + 2 \pmod{5} \quad w^{(7)} \equiv x - y^5z \pmod{5}$$

Die Iteration hält hier, da

$$e^{(7)} = a(x, y, z) - u^{(7)}w^{(7)} = 0.$$

**Problem:** Auswertungspunkt  $\neq 0$ . Leider kann man nicht immer Auswertungspunkte  $= 0$  wählen, da  $p \nmid \text{HKoeff}(\Phi_I(a(x_1, \dots, x_\nu)))$ .

**Möglichkeit:** Variablentransformation

$$x_j \leftarrow x_j + \alpha_j \quad 2 \leq j \leq \nu, \text{ falls } I = \langle x_2 - \alpha_2, \dots, x_\nu - \alpha_\nu \rangle$$

Problem der Zwischenergebnisse bleibt erhalten.

## Möglichkeit (Forts.)

- ▶ Möglichkeiten zur einfacheren Berechnung siehe G.C.L 262  $\rightarrow$  dünn besetzte MV Polynome.

$$c_i(x_1) = \frac{1}{n_1! \dots n_m!} \Phi_I \left( \left( \frac{\partial}{\partial x_{j-1}} \right)^{n_1} \dots \left( \frac{\partial}{\partial x_{j_m}} \right)^{n_m} e^{(k)} \right)$$

- ▶ Wang EEZ-GCD Algorithmus:  
Variablenweise

$$\mathbb{Z}_{p^l}[\mathbf{x}_1] \rightarrow \mathbb{Z}_{p^l}[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] \rightarrow \mathbb{Z}_{p^l}[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3] \dots$$



# GCD Berechnung - Faktorisierung

## GCD (GGT)-Berechnungen

- ▶ klassisch EEA (euklid. Ringe) Z.B.  $F[x]$   $O(M(n)\log n)$  Körperoperationen.
- ▶ (Pseudo-) Polynomiale Restfolgen, reduzierte PRS (primitiver EA  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_\nu]$ ) (kleiner Grad  $\leq 2$ )  
Problem Koeffizientenwachstum
- ▶ Sylvester Matrix und Subresultanten
- ▶ Modularer Algorithmus (Brown) **Big-Prime, Small-Primes**
- ▶ p-adisch EZGCD (Moses u. Yun)
- ▶ EEZ-GCD (Wang).
- ▶ GCD-Heuristic



## GCD Berechnung: Beispiel

Seien

$$a(x) = x^8 + x^6 - 3x^4 - 3x^3 + 8x^2 + 2x - 5, b(x) = 3x^6 + 5x^4 - 4x^2 - 9x + 21$$

EEA in  $\mathbb{Q}[x]$  liefert PRF mit  $r_5(x) = -\frac{1288744821}{543589225}$ , d.h.  $a(x), b(x)$  sind teilerfremd in  $\mathbb{Z}[x]$ .

**Problem:** Koeffizientenwachstum + Berechnung im Quotientenkörper (GGT-Berechnungen).

**Modular:**  $\phi_{23} : \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}_{23}[x]$ . EAA in  $\mathbb{Z}_{23}[x]$  liefert 1 als GGT.

$\phi_2 : \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}_2[x]$ . EAA in  $\mathbb{Z}_2[x]$  liefert  $x + 1$  als GGT  $\rightsquigarrow$

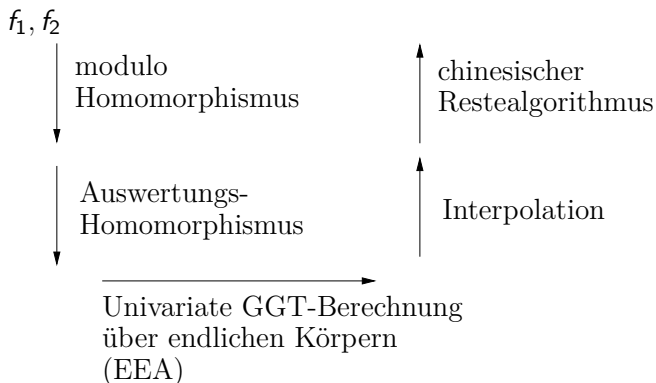
**Unglückliche Homomorphismen.**

p-adisch: EZGCD, EEZ-GCD (Wang)

**Messungen:** Siehe vz Gathen, Gerhard (S 183 Fälle  $\mathbb{Z}[x], F[x, y]$ )

## GCD Berechnungen - Schemata

**Modularer Algorithmus:**  $f_1, f_2$  Multivariate Polynome







## Faktorisierung (Forts.)

Insbesondere für Faktorisierung in  $\mathbb{Q}[x]$  bzw.  $\mathbb{Z}[x]$ :

Ist  $a \in \mathbb{Z}[x]$  primitiv  $\rightsquigarrow a = f_1 \dots f_k$  in irreduziblem  $f_i \in \mathbb{Q}[x]$  liefert Faktorisierung  $a = f_1^* \dots f_k^*$  mit  $f_i^* \in \mathbb{Z}[x]$  irreduzibel.

(Durch Multiplikation mit Nennern und Entfernung von Inhalt).

$a \in \mathbb{Z}[x]$  beliebig. Faktorisierung von  $a$  ist Faktorisierung vom Inhalt von  $a$  (als Element von  $\mathbb{Z}$ ) + Faktorisierung von  $pp(a)$ , d. h.

Faktorisierung in  $\mathbb{Z}[x] \rightsquigarrow$  Faktorisierung in  $\mathbb{Q}[x]$  plus Faktorisierung in  $\mathbb{Z}$ .









## Bestimmung der quadratfreien Faktorisierung

$$\text{Aus } a(x) = \prod_{i=1}^k a_i(x)^i \rightsquigarrow$$

$$a'(x) = \sum_{i=1}^k a_1(x) \cdots i a_i(x)^{i-1} a'_i(x) \cdots a_k(x)^k \text{ also}$$

$$c(x) = \text{GCD}(a(x), a'(x)) = \prod_{i=2}^k a_i(x)^{i-1}. \quad (\text{Beweis!})$$

Setzt man  $w(x) := a(x)/c(x) = a_1(x)a_2(x) \cdots a_k(x)$ .

$\rightsquigarrow w(x)$  ist Produkt der quadratfreien Faktoren ohne Multiplizitäten.

**Abspaltung von  $a_1(x)$ :** Sei

$y(x) = \text{GCD}(c(x), w(x))$ , so gilt  $a_1(x) = w(x)/y(x)$ .

Dann weiter mit  $c(x)$ .  $\rightsquigarrow$  Berechnung der  $a_i(x)$ .



## Algorithmus quadratfreie Faktorisierung

**6.4 Beispiel** Sei  $a(x) = x^8 - 2x^6 + 2x^2 - 1 \in \mathbb{Z}[x]$

$$b(x) = a'(x) = 8x^7 - 12x^5 + 4x,$$

$$c(x) = x^4 - 2x^2 + 1, w(x) = x^4 - 1.$$

Da  $c(x) \neq 1$  nach einem Schleifendurchgang

$$y(x) = x^2 - 1, z(x) = \mathit{outp} = x^2 + 1,$$

$$i = 2, w(x) = c(x) = x^2 - 1$$

2 Schleifendurchgang

$$y(x) = x^2 - 1, z(x) = 1, \mathit{outp} = (x^2 + 1) \sqcup 1$$

$$i = 3, w(x) = x^2 - 1, c(x) = 1$$

$$\mathit{outp} := \mathit{outp} \sqcup w(x) = (x^2 + 1) \sqcup 1 \sqcup (x^2 - 1).$$

Dies ist die quadratfreie Faktorisierung.





## Yun's quadratfreier Faktorisierungsalgorithmus

**procedure** Square\_Free\_Yun( $a(x)$ )

{Eingabe:  $a(x) \in R[x]$ , primitiv char( $R$ ) = 0,  $R$  ZPE,  $\text{grad}(a) = n$ }  
 {Ausgabe: quadratfreie Faktorisierung von  $a(x)$ }

**begin**

- (1)  $i := 1$ ; **output** := 1;  
 $b(x) := a'(x)$ ;  $c(x) := \text{GGT}(a(x), b(x))$ ;
- (2)  $w(x) := a(x)/c(x)$ ;  $y(x) := b(x)/c(x)$ ;  $z(x) := y(x) - w'(x)$   
**while**  $z(x) \neq 0$  **do**  
**begin**  
 $g(x) := \text{GGT}(w(x), z(x))$ ;  
 $\text{outp} := \text{outp} \sqcup g(x)$ ;  $i := i + 1$ ;  
 $w(x) := w(x)/g(x)$ ;  $y(x) := z(x)/g(x)$ ;  $z(x) := y(x) - w'(x)$   
**end**
- (3)  $\text{outp} := \text{outp} \sqcup w(x)$ ;  
**return** ( $\text{outp}$ ,  $i$ );  
**end.**







## char $R \neq 0$ $R$ = endlicher Körper char $p$

$F = R = GF(q) = \mathbb{F}_q$  mit  $q = p^m$ ,  $p$  Primzahl,  $\text{char}(R) = p$

$$a = \sum_{0 \leq i \leq n} a_i x^i \notin F \wedge f' = 0 \text{ gdw}$$

für jedes  $i$  mit  $a_i \neq 0$  gilt  $p|i$ , d. h.  $ia_i x^{i-1} = 0$  in  $F[x]$

$$a = \sum_{0 \leq i \leq n/p} a_{ip} x^{ip} = \left( \sum_{0 \leq i \leq n/p} a_{ip} x^i \right)^p, \text{ falls } F = \mathbb{F}_p.$$

Da  $(g+h)^p = g^p + h^p$  für alle  $g, h \in \mathbb{F}_p[x]$  und  $a_{ip}^p = a_{ip}$  für alle  $a_{ip} \in \mathbb{F}_p$ .

Z.B.:  $a(x) = x^{13} + 1$  in  $\mathbb{F}_{13}$ , so  $a'(x) = 13x^{12} = 0$

$$(x+1)^{13} = x^{13} + \binom{13}{1} x^{12} + \dots + \binom{13}{12} x + 1 = x^{13} + 1 = a(x)$$

## char $R \neq 0$ $R$ =endlicher Körper char $p$

**6.7 Lemma**  $\mathbb{F}_q$  mit  $q = p^m$ ,  $p$  Primzahl, dann gilt für alle

$$r, s \in \mathbb{F}_q$$

- |                                         |                                                                           |
|-----------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| (1) $r^q = r$                           | kleiner Fermat Satz<br>ist $p$ -te Wurzel von $r$<br>$j = 0, 1, \dots, m$ |
| (2) $r^{1/p} = r^{q/p} = r^{p^{m-1}}$   |                                                                           |
| (3) $(r + s)^{p^j} = r^{p^j} + s^{p^j}$ |                                                                           |

**Beweis:**  $r \in \mathbb{F}_q \rightsquigarrow \{1, r, r^2, \dots\}$  ist zyklisch und endliche Untergruppe der mult. Gruppe von  $\mathbb{F}_q$ . Diese hat die Ordnung  $q - 1 \rightsquigarrow$  Ordnung von  $r$  teilt  $q - 1$  (Lagrange),

$$r^{q-1} = 1 \rightsquigarrow (1)$$

$$(r^{p^{m-1}})^p = r^{p^m} = r^q = r \rightsquigarrow (2)$$

$$\begin{aligned} (r + s)^{p^j} &= r^{p^j} + \binom{p^j}{1} r^{p^j-1} s + \dots + \binom{p^j}{p^j-1} r s^{p^j-1} + s^{p^j} \\ &= r^{p^j} + s^{p^j} \rightsquigarrow (3) \end{aligned}$$

## char $R \neq 0$ $R =$ endlicher Körper char $p$ (Forts.)

**6.8 Lemma**  $a \in \mathbb{F}_q[x]$   $a' = 0$  gdw  $a$  ist eine  $p$ -te Potenz in  $\mathbb{F}_q[x]$ .

**Beweis:**  $\curvearrowright$  klar

$\curvearrowleft$   $a' = 0 \rightsquigarrow a(x) = a_0 + a_p x^p + \dots + a_{kp} x^{kp}$  für ein  $k \in \mathbb{N}$ .

Sei  $b(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_k x^k$  mit  $b_i = a_{ip}^{1/p} = a_{ip}^{p^{m-1}}$  nach Lemma 6.7

$$b(x)^p = b_0^p + b_1^p x^p + \dots + b_k^p x^{kp} = a_0 + a_p x^p + \dots + a_{kp} x^{kp} = a(x)$$











# Symbolisches Beispiel

**6.11 Beispiel** Symb-Beispiel: Seien  $A, B, C, D$  quadratfreie teilerfremde Polynome in  $\mathbb{Z}_3[x]$  und  $a = A \cdot B^3 \cdot C^5 \cdot D^9$ .

**Initialisierung:**  $b = a' = A'B^3C^5D^9 + 2AB^3C^4C'D^9$ , d. h.

$\text{GGT}(a, b) = B^3C^4D^9 = c$ .

Die QF-Terme (ohne die 3 | Exponent) sind in  $w = a/c = A \cdot C$

while loop  $y = \text{GGT}(c, w) = C$   $z = w/C = A$ , outp = A

$i = 2$   $w = C$   $c = B^3C^3D^9$

while loop  $y = C$   $z = 1$ , outp = A  $\sqcup$  1

$i = 3$   $w = C$   $c = B^3C^2D^9$

4- while loop Ausgang

$i = 5$   $w = C$   $c = B^3D^9$  outp = A  $\sqcup$  1  $\sqcup$  1  $\sqcup$  1

5-Durchgang  $y = 1$   $z = C$  outp = A  $\sqcup$  1  $\sqcup$  1  $\sqcup$  1  $\sqcup$  C<sup>5</sup>

$i = 6$   $w = 1$   $c = B^3D^9$

Da  $c \neq 1 \rightsquigarrow \text{QFF } (c)^{1/3} = BD^3 \rightsquigarrow (B \sqcup 1 \sqcup D^3)^3 \rightsquigarrow A \sqcup C^5 \sqcup B^3 \sqcup D^3$

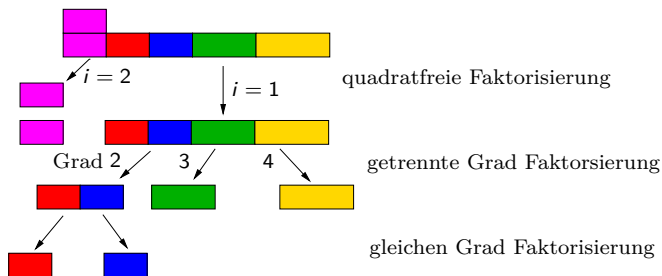
Man kann auch Yun's Variante verwenden mit gleicher Komplexitätsschranke.



# Distinct Degree Factorization

Spaltung der irreduziblen Faktoren nach Grad::

Getrennte Grad Faktorisierung



$a(x) \in \mathbb{F}_q[x]$ ,  $q = p^m$ , quadratfrei.

Gesucht Faktorisierung von  $a(x)$  der Form  $a(x) = \prod a_i(x)$  wobei  $a_i$

Produkt der irreduziblen Faktoren von  $a(x)$  mit Grad  $i$ , d. h.

$\text{grad}(a_i) = k \cdot i :: k$  Faktoren mit Grad  $i$ .

## Satz von Fermat: Folgerungen

**Erinnerung:** Kleiner Fermatscher Satz:  $0 \neq a \in \mathbb{F}_q$ , so  $a^{q-1} = 1$  und  $a^q = a$  alle  $a \in \mathbb{F}_q$ , d. h.  $x^q - x = \prod_{a \in \mathbb{F}_q} (x - a)$  in  $\mathbb{F}_q[x]$ .

### Allgemeiner

**6.12 Lemma** Für  $d \geq 1$  ist  $x^{q^d} - x \in \mathbb{F}_q[x]$  Produkt aller monischen irreduziblen Polynome in  $\mathbb{F}_q[x]$ , deren Grad  $d$  teilt.

Kleiner Fermat angewendet auf  $\mathbb{F}_{q^d}$  zeigt  $h = x^{q^d} - x$  ist Produkt aller  $x - a$  mit  $a \in \mathbb{F}_{q^d}$ .

Falls  $g^2 \mid h$  (in  $\mathbb{F}_q$ ) mit  $g \in \mathbb{F}_q[x] \setminus \mathbb{F}_q$ , so teilt ein  $x - a$  auch  $g$  und somit  $(x - a)^2 \mid h$ .

Dies geht nicht, d. h.  $x^{q^d} - x$  ist quadratfrei (einfacher GGT( $h, h'$ ) = 1).

## Satz von Fermat: Folgerungen

Es genügt zu zeigen: Für  $f \in \mathbb{F}_q[x]$ , monisch, irreduzibel mit  $\text{Grad}(f) = n$ :

$$f \mid x^{q^d} - x \quad \text{gdw} \quad n \mid d$$

Sei  $f$  irreduzibel, monisch,  $n \mid d$ ,  $d = n \cdot s$ .

Betrachte  $F = \mathbb{F}_q[x]/\langle f \rangle$  ist Körper mit  $q^n$  Elementen.

Kleiner Fermat liefert für  $a \in F$

$$a^{q^n} = a \text{ und somit } a^{q^d} = \underbrace{((a^{q^n})^{q^n} \dots)}_{s\text{-mal}} = a$$

Betrachte  $a = [x]$  Repräsentant von  $x$  in  $F$ .

$[h] = [x^{q^d} - x] = [x]^{q^d} - [x] = a^{q^d} - a = 0$  in  $F$ , d. h.  $h \equiv 0 \pmod{f}$ , und somit  $f \mid h$ .

## Satz von Fermat: Folgerungen

Umgekehrt sei  $f$  monisch, irreduzibel  $\text{grad}(f) = n$ ,  $f \mid x^{q^d} - x$ .

Betrachte die Körpererweiterung  $\mathbb{F}_q \subseteq \mathbb{F}_{q^d}$ .

Da  $f \mid x^{q^d} - x$  folgt aus kleinen Fermat angewendet mit  $\mathbb{F}_{q^d}$ , dass es  $A \subseteq \mathbb{F}_{q^d}$  gibt mit  $f = \prod_{a \in A} (x - a)$ .

Wähle  $a \in A$  und sei  $\mathbb{F}_q[x]/\langle f \rangle \cong \mathbb{F}_q(a) \subseteq \mathbb{F}_{q^d}$ , wobei  $\mathbb{F}_q(a)$  kleinster Teilkörper von  $\mathbb{F}_{q^d}$ , der  $a$  enthält.

Dieser Körper hat  $q^n$  Elemente und  $\mathbb{F}_{q^d}$  ist eine Erweiterung von  $\mathbb{F}_q(a)$ , d. h.  $q^d = (q^n)^s$  für ein  $s$  also  $n \mid d$ .

# Getrennte Grad Faktorisierung (Forts.)

**Anwendung:** Sei  $a(x) = \prod a_i(x)$ . Um das Produkt aller linearen irreduziblen Faktoren von  $a(x)$  zu bestimmen, genügt es

$$a_1(x) = \text{GGT}(a(x), x^q - x)$$

zu berechnen.

Setzt man  $a(x) = a(x)/a_1(x)$ , so hat  $a$  keine linearen irreduziblen Faktoren, d. h.

$$a_2(x) = \text{GGT}(a(x), x^{q^2} - x)$$

Usw. Hat  $a(x)$  Grad  $n$ , so muss man nur Faktoren bis zum Grad  $n/2$  bestimmen.

**6.13 Beispiel 1**  $a = x(x+1)(x^2+1)(x^2+x+2) \in \mathbb{F}_3[x]$  getrennte GF

$$(x^2+x, \quad x^4+x^3+x+2)$$

↑

Grad1

↑

Grad2

$$\text{GGT}(a, x^3 - x) = x^2 + x, \quad \text{GGT}(a/x^2 + x, x^9 - x) = x^4 + x^3 + x + 2$$

## Beispiel (Forts.)

2)  $a(x) = x^{63} + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$ , dann

$$a_1(x) = \text{GGT}(a(x), x^2 - x) = x + 1 \quad \text{1-Faktor Grad 1}$$

$$a(x) = a(x)/a_1(x) = \frac{x^{63}+1}{x+1} = x^{62} + x^{61} + \dots + x^2 + x + 1$$

$$a_2(x) = \text{GGT}(a(x), x^4 - x) = x^2 + x + 1 \quad \text{1-Faktor Grad 2}$$

$$a(x) = a(x)/a_2(x) = x^{60} + x^{57} + x^{54} + \dots + x^6 + x^3 + 1$$

$$a_3(x) = \text{GGT}(a(x), x^8 - x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \quad \text{2-Faktoren Grad 3}$$

$$a(x) = x^{54} + x^{53} + x^{51} + x^{50} + x^{48} + x^{46} + x^{45} + x^{42} + x^{33} + x^{30} + x^{29} + x^{27} + x^{25} + x^{24} + x^{22} + x^{21} + x^{12} + x^{11} + x^9 + x^8 + x^6 + x^4 + x^3 + x + 1$$

$$\text{GGT}(a(x), x^{16} - x) = 1, \text{GGT}(a(x), x^{32} - 1) = 1,$$

$$\text{GGT}(a(x), x^{64} - x) = a(x) = a_6(x)$$

$$x^{63} + 1 = \underbrace{(x + 1)}_{\text{Grad 1}} \underbrace{(x^2 + x + 1)}_{\text{2}} \underbrace{(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}_{\text{3 - 2Fakt}} \underbrace{a_6(x)}_{\text{6 - 9Fakt}}$$

# Algorithmus Getrennte Grad Faktorisierung

**procedure** PARTIALFACTOR-DD( $a(x), q$ )

{Eingabe: Quadratfreies mon. Polynom  $a(x) \in \mathbb{F}_q[x]$ ,  $n = \text{grad}(a) > 0$ }

(1) {Ausgabe: Getrennte Grad Zerlegung  $(a_1, \dots, a_s)$ ,  $s \leq n/2$  von  $a(x)$ }

$w := x$ ;  $a_0 := 1$ ;  $i := 0$ ;

(2) **repeat**

$i := i + 1$ ; call wied. quadrat. Algorithm. in  $R = \mathbb{F}_q(x)/\langle a(x) \rangle$

(3) um  $w = w^q \bmod a(x)$  zu berechnen

(4)  $a_i := \text{GGT}(w - x, a(x))$ ;

**if**  $a_i(x) \neq 1$  **then**

$a(x) := a(x)/a_i(x)$ ;  $w(x) := w(x) \bmod a(x)$ ;

**until**  $a(x) = 1$ ;

**return**  $(a_1, \dots, a_i)$

Die GGT-Berechnungen  $\text{GGT}(a(x), x^{q^i} - x)$  werden durch Berechnung von  $x^{q^i} - x$  modulo  $a(x)$ , d. h. Berechnung wird in  $\mathbb{F}_q[x]/\langle a(x) \rangle$  durchgeführt (z. B. wiederholtes Quadrieren um  $(x^{q^{i-1}})^q \bmod (a(x))$  zu berechnen).

## Algorithmus Getrennte Grad Faktorisierung (Forts.)

**6.14 Satz** Algorithmus Getrennte Grad Faktorisierung ist korrekt, d. h. es wird die getrennte Grad-Zerlegung von  $a$  berechnet.

**Aufwand:**  $O(sM(n) \log(nq))$  Operationen in  $\mathbb{F}_q$ , wobei  $s$  der größte Grad eines irreduziblen Faktors von  $a$  ist.

z.Z. Für  $i$ -ten Durchgang gilt:

$$w_i \equiv x^{q^i} \pmod{f_i}, \quad f_i = G_{i+1} \cdots G_t, \quad a_i = G_i \text{ für } i \geq 1,$$

wobei  $(G_1, \dots, G_t)$  die getrennte Grad-Zerlegung von  $a$  ist.

Induktion nach  $i$ :  $i = 0$  klar,  $i > 0$  wegen

$$w_i \equiv w_{i-1}^q \equiv (x^{q^{i-1}})^q = x^{q^i} \pmod{f_{i-1}} \text{ d. h. } w_i - x \equiv x^{q^i} - x \pmod{f_i} \text{ und}$$

$$a_i = \text{GGT}(w_i - x, f_{i-1}) = \text{GGT}(x^{q^i} - x, f_{i-1})$$

Also ist  $a_i$  Produkt aller monisch irreduziblen Polynome in  $\mathbb{F}_q[x]$  deren Grad  $i$  teilt und  $f_{i-1} = G_i \cdots G_t$  teilen, d. h.  $a_i = G_i$  und somit  $f_i = G_i \cdots G_t / G_i = G_{i+1} \cdots G_t$ .  $i = t$  beim Ausgang.



## Algorithmus Getrennte Grad Faktorisierung (Forts.)

Kosten für die Berechnung von  $w_i$  in Schritt (2)

$0(\log q)$  Multiplikationen mod  $a$ , d. h.  $0(M(n) \log q)$  Operationen in  $\mathbb{F}_q$ .

Die Kosten in (3) und (4) sind ebenfalls  $0(M(n) \log n)$  Operationen in  $\mathbb{F}_q[x]$ .

Berechnung kann gestoppt werden sobald  $\text{grad } f_i = \text{grad } a(x) < 2(i + 1)$ , da alle irreduziblen Faktoren von  $f_i$  grad mindestens  $i + 1$  haben, d. h.  $a(x)$  ist irreduzibel. Mit dieser Überprüfung: **early abort**

Somit  $i = \max\{m_1/2, m_2\} \leq n/2$ , wobei  $m_1$  und  $m_2$  die Grade des größten und zweitgrößten irreduziblen Faktors von  $a(x)$  sind.

Beachte in Schritt 2  $w_i$  wird nur mod  $f_{i-1}$  benötigt.

## Beispiel

**6.15 Beispiel** Sei  $q = 3$  Algorithmenverlauf für

$$a(x) = x^8 + x^7 - x^6 + x^5 - x^3 - x^2 - x \in \mathbb{F}_3[x]$$

$$a'(x) = -x^7 + x^6 - x^4 + x - 1 \quad \text{GGT}(a, a') = 1, \text{ d. h. QF}$$

$$w_1 = x^3 \bmod a = x^3$$

$$a_1 = \text{GGT}(x^3 - x, a) = x \neq 1$$

$$f_1 = a/a_1 = x^7 + x^6 - x^5 + x^4 - x^2 - x - 1 \text{ (neues } a)$$

$w_1$  unverändert  $x^3$

$$w_2 = w_1^3 \bmod a = x^9 \bmod a = -x^7 + x^6 + x^5 + x^4 - x$$

$$a_2 = \text{GGT}(w_2 - x, f_1) = \text{GGT}(-x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x, f_1)$$

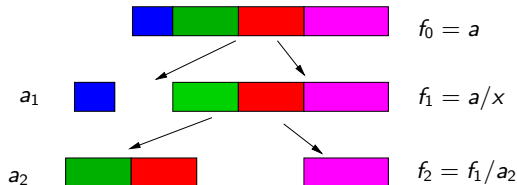
$$= x^4 + x^3 + x - 1$$

$$f_2 = f_1/a_2 = a/a_2 = \frac{x^7 + x^6 - x^5 + x^4 - x^2 - x - 1}{x^4 + x^3 + x - 1}$$

$$= x^3 - x + 1$$

## Beispiel (Forts.)

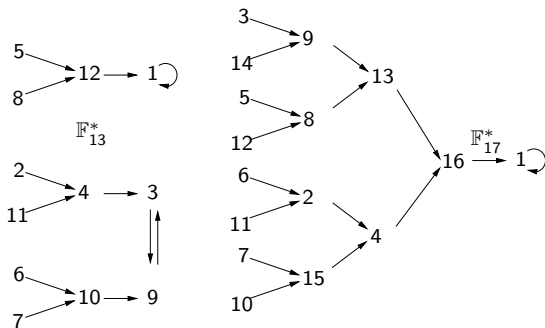
Der Algorithmus würde noch eine Iteration durchführen aber  $\text{grad}(f_2) < 2(2 + 1) = 6 \rightsquigarrow$  nicht notwendig, da  $f_2$  irreduzibel.  
 $a$  hat einen Lin-Faktor  $x$ , zwei verschiedene irreduziblen quadratische Faktoren, da  $\text{Grad } a_2 = 4$  und einen irreduziblen kubischen Faktor  $x^3 - x + 1$ .





## Gleiche-Grad-Faktorisierung (1)

Betrachte Quadrat-Abbildung  $\sigma : \mathbb{F}_q^* \rightarrow \mathbb{F}_q^*$  mit  $\sigma(a) = a^2$ , z. B.



Jedes Element hat entweder zwei oder 0 eingehende Pfeile.

Zwei bedeutet ist Quadrat

gleiche Anzahl

0 bedeutet ist kein Quadrat



## Gleiche-Grad-Faktorisierung (3)

Wendet man das Lemma 6.17 mit  $k = 2$  und  $k = (q - 1)/2$  an, so gilt

**6.18 Lemma** Sei  $q$  ungerade Primzahlpotenz und  $S = \{a \in \mathbb{F}_q^* : \exists b \in \mathbb{F}_q^* a = b^2\}$  Menge der Quadrate. Dann

- i)  $S \subseteq \mathbb{F}_q^*$  ist multiplikative Ugr. der Ordnung  $(q - 1)/2$
- ii)  $S = \{a \in \mathbb{F}_q^* \mid a^{(q-1)/2} = 1\}$
- iii)  $a^{(q-1)/2} \in \{1, -1\}$  für alle  $a \in \mathbb{F}_q^*$

**Faktorisierungsaufgabe:** Sei  $a \in \mathbb{F}_q[x]$ ,  $\text{grad } a = n$ , monisch und  $d \in \mathbb{N}^+$  mit  $d \mid n$  und jeder irreduzible Faktor von  $a$  habe den Grad  $d$ .

Dann gibt es  $r = n/d$  solcher Faktoren und  $a = f_1 \cdots f_r$ ,  $f_i$  verschiedene monische irreduziblen in  $\mathbb{F}_q[x]$  o.B.d.A.  $r \geq 2$ . Bestimme die  $f_i$ .

## Gleiche-Grad-Faktorisierung (4)

Da  $\text{GGT}(f_i, f_j) = 1$  für  $i \neq j$ , gibt es nach chinesischem Restesatz Ring Homomorphismus

$$\chi : R = \mathbb{F}_q[x]/\langle a \rangle \rightarrow \mathbb{F}_q[x]/\langle f_1 \rangle \times \cdots \times \mathbb{F}_q[x]/\langle f_r \rangle = R_1 \times \cdots \times R_r$$

Die  $R_i$  sind Körper mit  $q^d$  Elemente und algebraische Erweiterungen vom Grad  $d$  von  $\mathbb{F}_q$ , d. h. alle isomorph.

$$\mathbb{F}_{q^d} \cong R_i = \mathbb{F}_q[x]/\langle f_i \rangle \supseteq \mathbb{F}_q$$

Für  $f \in \mathbb{F}_q[x]$ . Sei  $f \bmod a \in R$  und

$$\chi(f \bmod a) = (f \bmod f_1, \dots, f \bmod f_r) = (\chi_1(f), \dots, \chi_r(f)), \text{ wobei } \chi_i(f) = f \bmod f_i \in R_i \text{ gilt.}$$

Es gilt für  $f \in \mathbb{F}_q[x]$ ,  $i \leq r$ ,  $f_i \mid f$  gdw  $\chi_i(f) = 0$ .

Hat man ein  $f \in \mathbb{F}_q[x]$  mit einigen  $\chi_i(f) = 0$  und anderen nicht null, so ist  $\text{GGT}(f, a)$  ein nichttrivialer Teiler von  $a$ .

↪ Probabilistisches Verfahren um Spaltungspolynom  $f$  von  $a$  zu bestimmen.



## Gleiche-Grad-Faktorisierung (5)

Sei  $q$  ungerade. Setze  $e = (q^d - 1)/2$ .

Für alle  $\beta \in R_i^* = \mathbb{F}_{q^d}^*$  gilt  $\beta^e \in \{1, -1\}$  und beide Möglichkeiten treten gleich oft vor (Lemma 6.18 mit  $q^d$  an Stelle von  $q$ ).

Wählt man  $f \in \mathbb{F}_q[x]$  mit  $\text{Grad } f < n$  und  $\text{GGT}(a, f) = 1$  zufällig, so sind  $\chi_1(f), \dots, \chi_r(f)$  unabhängige uniform verteilte Elemente aus  $\mathbb{F}_{q^d}^*$  und  $\varepsilon_i = \chi_i(f^e) \in R_i$  ist 1 oder  $-1$ . Jedes mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$ .

Somit

$$\chi(f^e - 1) = (\varepsilon_1 - 1, \dots, \varepsilon_r - 1)$$

und  $f^e - 1$  ist Spaltungspolynom, es sei denn  $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_r$ .

Dieses kann mit Wahrscheinlichkeit  $2(1/2)^r = 2^{-r+1} \leq 1/2$  vorkommen.



## Beispiel (Forts.)

Spaltung von  $a_2(x)$  nach Zufallsmuster  $e = (11^2 - 1)/2 = 60$

Zufallspolynom:  $x + 2$

$$\text{GGT}(a_2(x), (x+2)^{60} - 1) = x^6 + 3x^5 + 4x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 4x - 2$$

$$a_2(x) = (x^6 + 3x^5 + 4x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 4x - 2)(x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x + 5)$$

Versuche mit  $x + 7$

$$\text{GGT}(x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x + 5, (x+7)^{60} - 1) = x^2 + 3x - 2 \text{ und}$$

$$\text{GGT}(x^6 + 3x^5 + 4x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 4x - 2, (x+7)^{60} - 1) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 5x - 2$$

3-Faktoren Grad 2, verwende  $x^4 + 2x^3 + x^2 - 5x - 2 \rightsquigarrow$

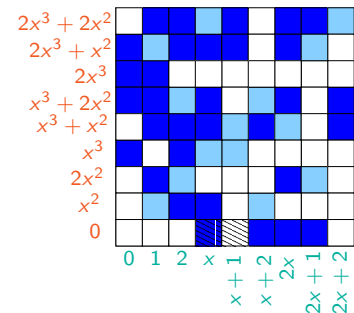
$$(x^2 + 3x - 2)(x^2 + 5x + 3)(x^2 + 4x + 5)(x^2 - 2x + 4)(x^2 + x + 1) = a_2(x).$$







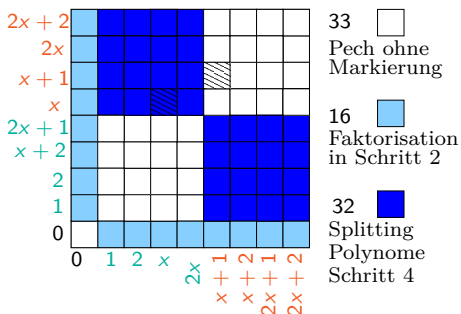
## Algorithmus (Forts.)



$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$R = \mathbb{F}_3[x]/(a)$$

$$a_i \in \mathbb{F}_3$$



- 33 Pech ohne Markierung
- 16 Faktorisierung in Schritt 2
- 32 Splitting Polynome Schritt 4

$$R \cong \mathbb{F}_3[x]/(x^2 + 1) \times \mathbb{F}_3[x]/(x^2 + x - 1)$$

$$\mathbb{F}_9 \times \mathbb{F}_9$$

Will man alle  $r$ -Faktoren bestimmen, so rekursive Anwendung auf die einzelnen Spaltungs-Faktoren.

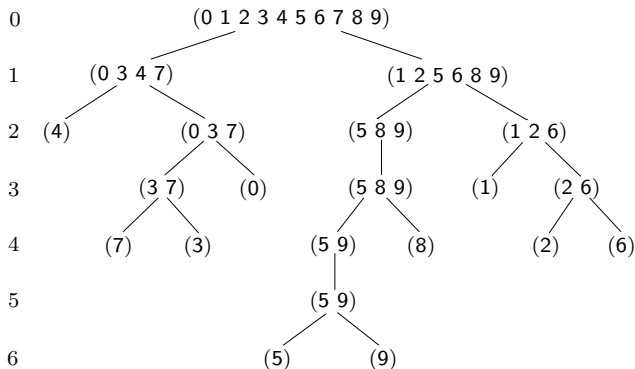






# Algorithmus Gleiche\_Grad\_Faktorisierung (Forts.)

**6.22 Beispiel**  $a = f_0 \dots f_9 \in \mathbb{F}_q[x]$ ,  $f_i$  mon. irr. paarweise verschieden.





## Algorithmus Gleiche\_Grad\_Faktorisierung (Forts.)

- ▶ Es gibt  $(r^2 - r)/2 < r^2$  solcher Paare.
- ▶ Die Wahrscheinlichkeit  $p_k$ , dass nicht alle irreduziblen Faktoren in Tiefe  $k$  getrennt sind, ist höchstens  $r^2 2^{-k}$ .

Diese ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Baum die Tiefe  $> k$  hat und  $p_{k-1} - p_k$  ist die Wahrscheinlichkeit der Baumtiefe genau  $k$ .

- ▶ Sei  $s = \lceil 2 \log_2 r \rceil$ , dann ist die erwartete Baumtiefe

$$\sum_{k \geq 1} k(p_{k-1} - p_k) = \sum_{k \geq 0} p_k = \sum_{0 \leq k < s} p_k + \sum_{s \leq k} p_k \leq \sum_{0 \leq k < s} 1 + \sum_{s \leq k} r^2 2^{-k} = s + r^2 2^{-s} \sum_{k \geq 0} 2^{-k} \leq s + 2 \in O(\log r).$$

- ▶ Beispiel: Tiefe  $6 < \lceil 2 \log_2 10 \rceil + 2 = 9$ .
- ▶ Für Varianten siehe vzG,G Übung 14.7.

## Fall Charakteristik 2

Für Char= 2 Varianten der Algorithmen: Verwende  **$m$ -tes Spur-Polynom** über  $\mathbb{F}_2$

$$T_m = x^{2^{m-1}} + x^{2^{m-2}} + \dots + x^4 + x^2 + x \in \mathbb{F}_2[x]$$

Angenommen  $q = 2^k$  für ein  $k \in \mathbb{N}^+$ ,  $f \in \mathbb{F}_q[x]$  quadratfrei,  $\text{grad } f = n$ , mit  $r \geq 2$  irreduziblen Faktoren  $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{F}_q[x]$

$R = \mathbb{F}_q[x]/\langle f \rangle$        $R_i = \mathbb{F}_q[x]/\langle f_i \rangle$        $\chi_i : R \rightarrow R_i$  wie gehabt.

- i)  $x^{2^m} + x = T_m(T_m + 1) \rightsquigarrow T_m(\alpha) \in \mathbb{F}_2$  für  $\alpha \in \mathbb{F}_{2^m}$  ( $T_m$  ist  $\mathbb{F}_2$  linear)  
 $T_m(\alpha) = 0$  und  $T_m(\alpha) = 1$  gleichwahrscheinlich  $1/2$
  
- ii) Angenommen alle irreduziblen Faktoren von  $f$  haben den grad  $d$ , dann ist  $\chi_i(T_{kd}(\alpha)) \in \mathbb{F}_2$  für  $\alpha \in R$ , somit für  $\alpha \in R$  zufällig  $\rightsquigarrow$   
 $T_{kd}(\alpha) \in \mathbb{F}_2$  mit Wahrscheinlichkeit  $2^{1-r} \leq 1/2$ .
  
- iii) Berechne  $b = T_{kd}(f) \text{ mod } a$  im Algorithmus Equal\_Degree\_Splitting.

# Eigenschaften

Die **wesentlichen Eigenschaften**, die verwendet wurden, sind folgende Faktorisierungen:

- Für  $q$  **ungerade**:

$$* \quad x^q - x = x(x^{(q-1)/2} - 1)(x^{(q-1)/2} + 1)$$

d. h. für  $W = \{v(x) \in \mathbb{F}_q[x] : v(x)^q = v(x) \bmod a(x)\}$  und  $v(x) \in W$  ist  $v(x)(v(x)^{(q-1)/2} - 1)(v(x)^{(q-1)/2} + 1) = v(x)^q - v(x) \equiv 0 \bmod a(x)$  und die nichttrivialen gemeinsamen Faktoren von  $v(x)^q - v(x)$  verteilen sich auf die drei Polynome.

- Für  $q$  **gerade**, d. h.  $q = 2^k$ , gilt  $*$  nicht, aber

$$** \quad x^{2^k} + x = T_k(x)(T_k(x) + 1)$$

↪ Wahrscheinlichkeit  $\text{GGT}\left(\underset{\rightsquigarrow}{T_{kd}(f)}, a\right)$  nicht trivial  $\geq 1/2$   
 $(f^{(q-1)/2} - 1, a)$



## Anwendung: Nullstellen-Bestimmung

**Problem:** Bestimme Nullstellen von  $a(x) \in \mathbb{F}_q[x]$ .

Es genügt die **linearen irreduziblen Faktoren** von  $a(x)$  zu berechnen, d. h.  $\text{GGT}(x^q - x, a(x)) = g$  und dann ED-Faktorisierung anzuwenden.

**procedure** Root\_Finding ( $a(x), q$ )

{**Eingabe:** nichtkonstantes Polynom  $a(x) \in \mathbb{F}_q[x]$ ,  $q = p^m$ .}

{**Ausgabe:** Die Nullstellen von  $a(x)$  in  $\mathbb{F}_q$ .}

- 1 call Repeated Squaring Algorithmus in  $R = \mathbb{F}_q[x]/(a(x))$  zur Berechnung von  $x^q \bmod a(x) =: h$
- 2  $g := \text{GGT}(h - x, a)$   
**if**  $g = 1$  **then** return  $\emptyset$   
**else**
- 3 call Equal\_Degree Fact( $g, 1, q$ )  
// es werden die irreduziblen linearen Faktoren  $x - u_1, \dots, x - u_r$  mit  $r = \text{grad } g$  berechnet//
- 4 **return**  $u_1, \dots, u_r$



## Anwendung: Nullstellen-Bestimmung (Forts.)

**6.23 Folgerung** Für  $a(x) \in \mathbb{F}_q[x]$  mit  $\text{grad } a = n$  berechnet `Root_Finding` alle Nullstellen von  $a(x)$  in  $\mathbb{F}_q$  die erwartete Anzahl von Operationen in  $\mathbb{F}_q$  ist:

$$O(M(n) \log n \log(nq))$$

### Nullstellen-Bestimmung in $\mathbb{Z}$

**Problem:**  $a(x) \in \mathbb{Z}[x]$ . Bestimme alle Nullstellen in  $\mathbb{Z}$ .

- Anwendung modularer Methoden, z.B. der Big-Prime Methode.

Anwendung: Nullstellen-Bestimmung in  $\mathbb{Z}$ 

```

procedure Root_Finding_ \mathbb{Z} ($a(x), p$)
 {Eingabe: nicht-konstantes Polynom $a(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $\text{grad } a = n$,}
 { Max_Norm (a) = $\| a \|_{\infty} = A$ }
 {Ausgabe: Nullstellen von a in \mathbb{Z} }

```

**begin**

1  $B := 2n(A^2 + A)$

$p$  Primzahl zwischen  $B + 1$  und  $2B$

2 Call Root\_Finding( $a(x), p$ )

//bestimmt  $\{u_1 \bmod p, \dots, u_r \bmod p\}$  Nullstellenmenge in  $\mathbb{F}_p$  von  
 $a(x) \bmod p$ ,  $u_i \in \mathbb{Z}$ ,  $|u_i| < p/2$  alle  $i$ //

3 **for**  $1 \leq i \leq r$

berechne  $v_i \in \mathbb{Z}[x]$  mit  $\text{grad}(v_i) = n - 1$ ,  $\| v_i \|_{\infty} < p/2$  und  
 $a(x) \equiv (x - u_i)v_i \bmod p$

4 **return**  $\{u_i : 1 \leq i \leq r, |u_i| \leq A \wedge \| v_i \|_{\infty} \leq nA\}$

**end**

## Anwendung: Nullstellen-Bestimmung in $\mathbb{Z}$ (Forts.)

### 6.24 Satz Korrektheit und Komplexität:

Der Algorithmus berechnet alle ganzzahligen Nullstellen von  $a(x)$ .

Die Kosten für Schritt 2 sind

$$O(M(n) \log n \log(nA) M(\log(nA)) \log \log(nA))$$

und von Schritt 3 pro  $u_i$  sind  $O(nM(\log(nA)))$  Wortoperationen.

Falls  $p$  größer als Computerwort, so  $\log^2 p$  bzw.  $M(\log p)$

Wortoperationen.

### Beweis

Die Schranke folgt aus Folgerung unter Berücksichtigung von

$\log p \in O(\log(nA))$ . Die Kosten für jedes  $u_i$  in Schritt 3 sind  $O(n)$

Additionen und Multiplikationen in  $\mathbb{F}_p$ , d. h.  $O(nM(\log(nA)))$

Wortoperationen.

Die Kosten für die Bestimmung von  $p$  werden hier nicht berücksichtigt.

## Anwendung: Nullstellen-Bestimmung in $\mathbb{Z}$ (Forts.)

**Korrektheit:** o.b.d.A.  $a(0) \neq 0$  (Division von Potenzen von  $x$ ).

- ▶ Gilt  $a(u) = 0$  für ein  $u \in \mathbb{Z}$ , so  $(x - u) \mid a(x)$  und somit teilt  $u$  den konstanten Koeffizienten von  $a(x)$ , d. h.  $|u| \leq A < p/2$ .  
d.h. Alle verschiedenen Nullstellen von  $a(x)$  in  $\mathbb{Z}$  können eindeutig aus ihren mod  $p$  Bilder wiedergewonnen werden.
- ▶ **Zeige:**  $a(u_i) = 0$  gdw  $|u_i| \leq A$  und  $\|v_i\|_\infty \leq nA$ .
- ▶ Angenommen  $a(u_i) = 0$  dann  $|u_i| \leq A$  (siehe oben) und  $\|a/(x - u_i)\|_\infty \leq nA < p/2$ . Da  $a/(x - u_i) \equiv v_i \pmod{p}$  und beide Seiten mit  $|\text{Koeff.}| < p/2 \rightsquigarrow$  gleich  $\rightsquigarrow \|v_i\|_\infty \leq nA$ .
- ▶ Umgekehrt: Sei  $|u_i| \leq A$  und  $\|v_i\|_\infty \leq nA$ , dann  $\|(x - u_i)v_i\|_\infty \leq (1 + A)nA < p/2$ , d. h. die Kongruenz  $a(x) \equiv (x - u_i)v_i \pmod{p}$  ist eine Identität.

Beachte die Wahl von  $p \geq B + 1 > 2n(A^2 + A)$  garantiert  
 $p/2 > A, nA, (1 + A)nA$ .

# Faktorisierungsalgorithmen, die auf linearer Algebra basieren

Die Algorithmen von Berlekamp 1967/1970.

Erste Faktorisierungsalgorithmen für Polynome über endliche Körper, die pol. Laufzeiten hatten.

Anstelle der Getrennte-Grad Faktorisierung werden Methoden der linearen Algebra verwendet um das Polynom zu spalten.

- ▶ Sei  $a(x) \in \mathbb{F}_q[x]$  quadratfrei, monisch grad  $n > 0$ .
- ▶  $R = \mathbb{F}_q[x]/\langle a \rangle$  ist Vektorraum der Dimension  $n$  über  $\mathbb{F}_q$  (sogar eine  $\mathbb{F}_q$ -Algebra).
- ▶ Die Abbildung  $\beta = \sigma - id : R \rightarrow R$  mit  $\beta(f) = f^q - f$  ist  $\mathbb{F}_q$ -linear.
- ▶ Wie bestimmt man den Kern von  $\beta$ :

## Grundlagen für Berlekamps Algorithmen

- ▶ Ist  $a = f_1 \cdots f_r$  die Faktorisierung von  $a$  in verschiedenen monischen irreduziblen Polynome aus  $\mathbb{F}_q[x]$ , so gilt nach chinesischem Restsatz

$$R \cong \mathbb{F}_q[x]/\langle f_1 \rangle \times \cdots \times \mathbb{F}_q[x]/\langle f_r \rangle$$

- ▶ Die  $\mathbb{F}_q[x]/\langle f_i \rangle$  sind Körper mit  $q^{\text{grad } f_i}$  Elementen und enthalten  $\mathbb{F}_q$  (Konstanten mod  $f_i$ ).

- ▶ Für  $f \in \mathbb{F}_q[x]$  gilt

$$\begin{aligned} f \bmod a \in \ker \beta &\iff f^q \equiv f \bmod a \\ &\iff f^q \equiv f \bmod f_i \quad \text{für } 1 \leq i \leq r \\ &\iff f \bmod f_i \in \mathbb{F}_q \quad \text{für } 1 \leq i \leq r \end{aligned}$$

Nach kleinem Fermat (alle Nullstellen von  $x^q - x$  liegen in  $\mathbb{F}_q$ , da  $x^q - x = \prod_{a \in \mathbb{F}_q} (x - a)$  in  $\mathbb{F}_q[x]$ ).







# Berlekamp Faktorisierungsalgorithmus

- ▶ Angenommen  $q$  sei ungerade und sei  $b = c_1 b_1 + \dots + c_r b_r$  eine zufällige Linearkombination der Basiselemente mit  $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{F}_q$  unabhängig gewählt, d. h.  $b \bmod a$  ist ein zufälliges Element aus  $\mathcal{B}$ .
- ▶ Wende  $(q-1)/2$  Trick, wie bei ED-Faktorisierung, an: Die  $b \bmod f_i$  sind gleichmäßig zufällig verteilte Elemente von  $\mathbb{F}_q$  für  $1 \leq i \leq r$ . Falls keines der  $f_i$   $b$  teilt, so ist  $b^{(q-1)/2} \equiv \pm 1 \pmod{f_i}$  und beide Möglichkeiten treten mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  auf, unabhängig für alle  $i$  (Lemma 6.18).
- ▶ **Beachte:** Falls  $b$  nicht konstant ist, so gilt  $a(x) = \prod_{s \in \mathbb{F}_q} \text{GGT}(b-s, a(x))$

$$\text{Da } x^q - x = \prod_{s \in \mathbb{F}_q} (x - s), \text{ d.h. } b^q - b = \prod_{s \in \mathbb{F}_q} (b - s)$$

$$\text{und } f_i \mid a \text{ für alle } i \rightsquigarrow f_i \mid b^q - b = \prod_{s \in \mathbb{F}_q} (b - s)$$

## Berlekamp Faktorisierungsalgorithmus (Forts.)

- Für  $s \neq t$  gilt aber  $\text{GGT}(b-s, b-t) = 1$ , d. h. für gegebenes  $i$  gilt  $f_i \mid b - s_k$  für genau ein  $s_k$ , d. h.

$$a = \text{GGT}(b^q - b, a) = \text{GGT}\left(\prod_{s \in \mathbb{F}_q} (b-s), a\right) = \prod_{s \in \mathbb{F}_q} \text{GGT}(b-s, a)$$

- Berechnung von  $Q$ :

$$\begin{aligned}
 x^q \bmod a(x), \quad x^{2q} \bmod a(x), \dots, x^{(n-1)q} \bmod a(x) \\
 a(x) &= a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n \\
 x^m &\equiv r_{m,0} + r_{m,1}x + \dots + r_{m,n-1}x^{n-1} \bmod a(x) \\
 x^{m+1} &\equiv -r_{m,n-1}a_0 + (r_{m,0} - r_{m,n-1}a_1)x + \dots \\
 &\quad + (r_{m,n-2} - r_{m,n-1}a_{n-1})x^{n-1} \\
 &\equiv r_{m+1,0} + r_{m+1,1}x + \dots + r_{m+1,n-1}x^{n-1}
 \end{aligned}$$

- $r_{m+1,0} = -r_{m,n-1}a_0$   
 $r_{m+1,i} = r_{m,i-1} - r_{m,n-1}a_i \quad i = 1, \dots, n-1 \rightsquigarrow O(qn^2)$  Körperoperationen.

## Berlekamp-Algorithmus: Ein echter Faktor

- {Eingabe: Monisches QF-Polynom  $a \in \mathbb{F}_q[x]$ ,  $\text{grad}(a) = n$ ,  $q$  ungerade PZP}
- {Ausgabe: Entweder echter faktor  $g$  von  $a$  oder Failure, d.h. Las-Vegas Typ PA}
- 1 Call repeated squaring Algorithm in  $\mathbb{F}_q[x]/\langle a \rangle$  zur Berechnung von  $x^q \bmod a$ ;
  - 2 **for**  $0 \leq i < n$  berechne  $x^{qi} \bmod a = \sum_{0 \leq j < n} q_{ij} x^j$   $Q := (q_{ij})_{0 \leq i, j < n}$ ;  
//siehe auch Bemerkung zur Berechnung von  $Q$ //
  - 3 Wende Gausselimination auf  $Q - I \in \mathbb{F}_q^{n \times n}$  an um die Dimension und eine Basis  $b_1 \bmod a, \dots, b_r \bmod a$  der Berlekamp Algebra  $\mathcal{B}$  zu bestimmen, hierbei sind  $b_1, \dots, b_r \in \mathbb{F}_q[x]$  mit  $\text{Grad} < n$   
**if**  $r = 1$  **then return**  $a$ ;
  - 4 Wähle unabhängige zufällige  $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{F}_q$   $b := c_1 b_1 + \dots + c_r b_r$ ;
  - 5  $g_1 := \text{GGT}(b, a)$ ; **if**  $g_1 \neq 1$  **then return**  $g_1$ ;
  - 6 Call repeated squaring algorithm in  $R = \mathbb{F}_q[x]/a$  zur Berechnung von  $f := b^{(q-1)/2} \bmod a$ ;
  - 7  $g_2 := \text{GGT}(f - 1, a)$ ; **if**  $g_2 \neq 1$  and  $g_2 \neq a$  **then return**  $g_2$   
**else return** „Failure“

## Berlekamp-Algorithmus: Ein echter Faktor

**6.25 Satz** Der Algorithmus ist korrekt und Failure kommt mit Wahrscheinlichkeit  $\leq 1/2$  vor. Er benötigt  $O(n^3 + M(n) \log q)$  Operationen in  $\mathbb{F}_q$ .

**Beweis:** Korrektheit: Falls  $g_1 \neq 1$ , so echter Teiler. Falls  $g_2 \neq 1$  und  $g_2 \neq a$ , so ebenfalls echter Teiler. Falls  $g_1 = 1$  in Schritt 5, so ist  $g_2$  trivial (d. h. 1 oder  $a$ ). In Schritt 7 gdw  $f^{(q-1)/2} \equiv 1 \pmod{f_i}$  für alle  $i$ . Diese Fälle kommen mit der Wahrscheinlichkeit  $2^{-1}$  vor. Die Erfolgswahrscheinlichkeit ist mindestens  $1 - 2 \cdot 2^{-r} \geq 1/2$ . Da  $r \geq 2$  ist. Die Kosten für Schritt 1 sind  $O(M(n) \log q)$  Körper Operationen. Schritt 2 verwendet  $n - 2$  Multiplikationen mod  $a$ , d. h.  $O(nM(n))$  Operationen in  $\mathbb{F}_q$ .

Kosten für Schritt 3  $O(n^3)$  dominiert die Kosten von 2, die  $O(nr)$  Körper für Schritt 4 und die  $O(M(n) \log n)$  Operationen der GGT Berechnungen in den Schritten 5 und 7.

6 benötigt  $O(M(n) \log q)$  Körperoperationen.

## Faktorisierungsalgorithmus

Für eine vollständige Faktorisierung von  $a(x)$  wird die Basis von  $\mathcal{B}$  nur einmal berechnet, der Spaltungsprozess der Schritte 4-7 wird rekursiv auf  $g$  und  $a/g$  angewandt. Alle irreduziblen Faktoren mit erwarteter Operationenzahl von  $O(n^3 + M(n) \log r \log q)$ .

Viele Varianten + Verbesserungen des Berlekamp Algorithmus in der Literatur. Problem für  $q$  groß: Die Kosten für die Erzeugung von  $Q$  und die Berechnung der GGT's wird durch  $O(qkn^2)$  dominiert. Somit nur brauchbar für kleine  $q$ 's. Etwa Polynom mit 4 Faktoren mit grad  $n = 100$  über  $\mathbb{F}_{3^{14}}$  benötigt 191 Milliarden Körperoperationen. Generiere Matrix durch binäres Potenzieren. Variante von Zassenhaus (siehe Geddes et Al S 360).

Kaltoven und Lobo: Minimalpolynom-Berechnung.

$O(M(n^2) \log n + M(n) \log q)$ .

Dies ist wichtig, falls  $\log q$  klein im Vergleich zu  $n$  ist.

Variante, **Big Prime Berlekamp Algorithm** siehe Geddes et.al.

# Beispiel

## 6.26 Beispiel

$$a(x) = x^6 - 3x^5 + x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 1 \in \mathbb{Z}_{11}[x] = \mathbb{F}_{11}[x]$$

$$Q \text{ Matrix } 6 \times 6, x^{q \cdot j} \equiv q_{j,0} + q_{j,1}x + \cdots + q_{j,5}x^5 \pmod{a.}$$

$$\text{Zeile 0 von } Q \ (1, 0, 0, 0, 0, 0), 1 \equiv 1 \pmod{a(x)}$$

$$x \equiv x \pmod{a(x)}$$

$$x^2 \equiv x^2 \pmod{a(x)}$$

$$x^3 \equiv x^3 \pmod{a(x)}$$

$$x^4 \equiv x^4 \pmod{a(x)}$$

$$x^5 \equiv x^5 \pmod{a(x)}$$

$$x^6 \equiv 3x^5 - x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x - 1 \pmod{a(x)}$$

$$x^7 \equiv 3x^6 - x^5 + 3x^4 + x^3 + 3x^2 - x$$

$$\equiv -3x^5 - x^3 - 5x^2 - 3x - 3 \pmod{a(x)}$$

$$\vdots$$

$$x^{11} \equiv 5x^5 - 5x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 5x + 3 \pmod{a(x)}$$

## Beispiel (Forts.)

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -3 & -3 & -5 & 5 \\ 3 & -5 & -5 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 3 & -4 & -2 \\ -4 & -3 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & -1 & -4 & -3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Basis für  $Q - I$ ,  
bringe in  $\Delta$ -Form  
0,1 in diagonalen,  
falls 1 einzige 1  
in Zeile dreiecks-  
idempotenter Form.

$$Q - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -3 & -3 & -5 & 5 \\ 3 & -5 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 2 & -4 & -2 \\ -4 & -3 & -1 & 0 & -1 & -3 \\ -3 & -1 & -4 & -3 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

## Beispiel (Forts.)

$$\rightsquigarrow L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Delta$  idemp-Form,  
Rang 3

$$I - L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Basis für Nullraum ablesen,  
da  $(I - L)L = 0$



## Beispiel (Forts.)

Basis für  $\mathcal{B}$ :

$$v^{(1)} = (1, 0, 0, 0, 0, 0), v^{(2)} = (0, 1, 1, 1, 1, 0), v^{(3)} = (0, 0, -4, -2, 0, 1)$$

d. h. als Polynome.

$$v^{(1)}(x) = 1 \quad v^{(2)}(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x \quad v^{(3)}(x) = x^5 - 2x^3 - 4x^2$$

$\rightsquigarrow a(x)$  faktorisiert sich in **drei irreduzible Faktoren**.

$$\blacktriangleright \text{GGT}(a(x), v^{(2)}(x)) = x + 1 \rightsquigarrow f_1(x) = x + 1$$

$$\frac{a(x)}{x+1} = x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 4x + 1$$

$$\blacktriangleright \text{GGT}(a(x), v^{(2)}(x) + \underset{3,4,5,6}{1}) = 1 \quad \text{GGT}(a(x), v^{(2)}(x) + 2) = 1$$

$$\blacktriangleright \text{GGT}(a(x), v^{(2)}(x) + 7) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = f_2(x)$$

$$a(x)/g_1(x) = x^2 + 5x + 3 = f_3(x)$$

## Beispiel (Forts.)

### Zufalls-Element aus $\mathcal{B}$

- ▶  $v(x) = 3v^{(1)}(x) - 2v^{(2)}(x) + 5v^{(3)}(x) = 5x^2 - 2x^4 - x^3 - 2x + 3$   
 $\text{GGT}(a(x), v(x)^5 - 1) = x^5 - 4x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 4x + 1$
- ▶  $a(x) = (x + 1) \underbrace{(x^5 - 4x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 4x + 1)}_{2 \text{ irr. Faktoren}} \rightsquigarrow f_1(x) = x + 1$
- ▶  $v(x) = 2v^{(1)}(x) + 3v^{(2)}(x) + 4v^{(3)}(x) = 4x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 3x + 2$   
 $\text{GGT}(x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 2x^2 - 4x + 1, v(x)^5 - 1) = 1$  **Pech!**
- ▶  $v(x) = v^{(1)}(x) + 3v^{(2)}(x) - 4v^{(3)}(x) = -4x^5 + 3x^4 - 3x^2 + 3x + 1$   
 $\text{GGT}(x^5 - 4x^4 \dots, v(x)^5 - 1) = x^2 + 5x + 3$   
 $\rightsquigarrow (x^2 + 5x + 3)(x^3 + 2x^2 + 3x + 4)$  restlichen Faktoren.

# Anwendung:

## Irreduzible Polynome:: Test und Konstruktion

Faktorisierungsalgorithmen können für Irreduzibilitätstests verwendet werden:

z.B. Die Getrennte-Grad Faktorisierung kann angehalten werden, falls ein echter Faktor gefunden wurde oder bis zum Grad  $> n/2$  kein Faktor gefunden wurde.

### Alternativen

**6.27 Lemma** Ein Polynom  $a \in \mathbb{F}_q[x]$ ,  $n = \text{grad}(a) \geq 1$  ist genau dann irreduzibel, wenn

- i)  $a \mid x^{q^n} - x$  und
- ii)  $\text{GGT}(x^{q^{n/t}} - x, a) = 1$  für alle Primteiler  $t$  von  $n$ .

## Irreduzibilitätstest: Beweis

- ▶ Wegen Lemma 6.12 ( $x^{q^d} - x$  ist Produkt aller monischen irreduziblen Polynome in  $\mathbb{F}_q[x]$  deren Grad  $d$  teilt) folgen i) und ii), falls  $a$  irreduzibel ist.
- ▶ Umgekehrt falls i) gilt, so teilt der Grad eines irreduziblen Faktors von  $a$  die Zahl  $n$ . Sei  $g$  ein solcher irreduzibler Faktor mit  $d = \text{grad}(g) < n$ , d. h.  $d \mid n/t$  für einen Primfaktor  $t$  von  $n$ , d. h.  $g \mid x^{q^{n/t}} - x \not\mid$  zu ii), also  $d = n$  und  $a$  ist irreduzibel.
- ▶ Hieraus lässt sich leicht ein Irreduzibilitätstest-Algorithmus herleiten: [Rabin 1980](#).
- ▶ Berechne  $f = x^{q^n} \bmod a$       $f \neq x$ , so ist  $a$  reduzibel.
- ▶ Für alle Primteiler  $t$  von  $n$ . Berechne  $g = x^{q^{n/t}} \bmod a$ .  
**if**  $\text{GGT}(g - x, a) \neq 1 \rightsquigarrow$  reduzibel.
- ▶ **return** irreduzible.

## Anwendung: irreduzible Polynome (Forts.)

**6.28 Satz** Der Algorithmus ist **korrekt**, d. h. er ist Entscheidungsalgorithmus für Irreduzibilität.

### Kosten

$O(M(n) \log q + (n^{(w+1)/2} + n^{1/2} M(n)) \delta(n) \log n)$  Operationen in  $\mathbb{F}_q$ .

Berechne zunächst  $x^q \bmod a \rightsquigarrow O(M(n) \log q)$

$s_m := x^{q^m} \bmod a$  für  $m \in \mathbb{N}$ . In  $O((n^{(w+1)/2} + n^{1/2} M(n)))$ ,  $w \approx 2.376$   
(**Matrizenmultipl.**)

Anzahl der  $m$  ber.  $s_m$  :  $1 + \delta(n)$  (Anzahl der Primteiler von  $n$ ).

Als **Irreduzibilitätstest** eignet sich auch die Bestimmung vom Rang von  $Q - I$  (siehe Berlekamp).

$O(n^w + M(n) \log q)$  Körperoperationen.

Für  $w = 3$  ist der hier vorgestellte Algorithmus schneller.

## Arithmetik in $\mathbb{F}_{p^n}$

Wie findet man irreduzible Polynome vom Grad  $n$  in  $\mathbb{F}_p[x]$ ?

Wozu: Arithmetik in  $\text{GF}(p^n)$ , Konstruktion von Körpererweiterungen.

### Probabilistische Verfahren

**6.29 Lemma** Sei  $q$  Primzahlpotenz  $n \geq 1$ . Die Anzahl  $I(n, q)$  der monisch irreduziblen Polynome vom Grad  $n$  in  $\mathbb{F}_q[x]$  erfüllt:

$$\frac{q^n - 2q^{n/2}}{n} \leq I(n, q) \leq \frac{q^n}{n}$$

Insbesondere, falls  $q^n \geq 16$  so erfüllt  $p_n$  - die Wahrscheinlichkeit eines zufällig gewählten monischen Polynoms vom Grad  $n$  irreduzibel zu sein - die Ungleichung

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n} \left(1 - \frac{2}{q^{n/2}}\right) \leq p_n \leq \frac{1}{n}$$

## Probabilistische Verfahren: Beweis vom Lemma

**Beweis:** Sei  $f_n$  Produkt aller monisch irreduziblen Polynome von grad  $n$  in  $\mathbb{F}_q[x]$ , d. h.  $\text{grad}(f_n) = nI(n, q)$ . Satz 6.12 kann umgeformt werden in

$$x^{q^n} - x = \prod_{d|n} f_d = f_n \prod_{d|n, d < n} f_d, \text{ d.h. } q^n = \text{grad}(f_n) + \sum_{d|n, d < n} \text{grad}(f_d),$$

also

$$q^n \geq \text{grad}(f_n) = n \cdot I(n, q) \rightsquigarrow \text{ obere Schranke.}$$

Es gilt, da  $q \geq 2$

$$\sum_{d|n, d < n} \text{grad}(f_d) \leq \sum_{1 \leq d \leq n/2} \text{grad} f_d \leq \sum_{1 \leq d \leq n/2} q^d \leq \frac{q^{n/2+1} - 1}{q - 1} \leq 2q^{n/2}$$

somit

$$n \cdot I(n, q) = \text{grad}(f_n) = q^n - \sum_{d|n, d < n} \text{grad}(f_d) \geq q^n - 2q^{n/2}$$

$\rightsquigarrow$  untere Schranke.

## Probabilistische Verfahren (Forts.)

- ▶ Es gibt insgesamt  $q^n$  **monische Polynome** vom Grad  $n$  in  $\mathbb{F}_q[x]$ , d. h.

$$\frac{1}{n} \geq \frac{I(n, q)}{q^n} \geq \frac{1}{n} (1 - 2q^{-n/2}) \geq \frac{1}{2n}$$

für  $q^n \geq 16$ .

- ▶ Genaue Formel ist  $n \cdot I(n, q) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) q^d$  (mithilfe der Möbius Inversion). Hierbei ist  $\mu$  die **Möbius Funktion**, d. h.

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1 \\ (-1)^k & \text{falls } n \text{ Produkt von } k \text{ verschiedenen} \\ & \text{Primzahlen ist} \\ 0 & \text{falls } n \text{ nicht quadratfrei} \end{cases}$$

- ▶ Werte  $I(5, q)$  für  $q = 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9$

6   48   204   624   3360   6552   11808



# Probabilistische Algorithmen zur Erzeugung irreduzibler Polynome mit grad $n$

**procedure** Ben Or's\_Irreduzible\_Polynome

{Eingabe: Primzahlpotenz  $q, n \geq 1$ }

{Ausgabe: zufälliges monisches irred. Polynom mit Grad  $n$  aus  $\mathbb{F}_q[x]$ }

**begin**

1 wähle zufällig monisches Polynom  $f \in \mathbb{F}_q[x]$  von Grad  $n$

2 **for**  $i = 1, \dots, \lceil n/2 \rceil$  **do**

$g_i := \text{GGT}(x^{q^i} - x, f);$

**if**  $g_i \neq 1$  **then goto** 1

3 **return**  $f$

**end.**



## Probabilistische Algorithmen (Forts.)

Es gilt jedoch

**6.30 Lemma** (ohne Beweis) Der Erwartungswert für den Grad des kleinsten irreduziblen Faktors eines zufällig gewählten Polynoms von Grad  $n$  aus  $\mathbb{F}_q[n]$  ist  $O(\log n)$ .

**6.31 Satz** Ben Or's Algorithmus ist korrekt und die erwartete Anzahl von Operationen in  $\mathbb{F}_q$  ist

$$O(nM(n) \log n \log(nq)) \text{ oder } O(n^2 \log q).$$

**Beweis**

Für ein  $i : O(M(n) \log(nq))$ , für 2:  $O(M(n) \log n \log n(q))$ .

Anzahl der versuchten  $f$ :  $O(n)$  wegen Lemma 6.29.

## Faktorisierung in $R[x_1, \dots, x_n]$ $R$ ZPE Ring

Zusammenfassung: Faktorisierung in  $\mathbb{F}_q[x]$ . ok.

- ▶ Faktorisierung in  $\mathbb{Z}[x] \cong$  Faktorisierung in  $\mathbb{Q}[x]$  + Faktorisierung in  $\mathbb{Z}$ .  
d.h. Faktorisierung primitiver Polynome aus  $\mathbb{Z}[x]$   
 $\rightarrow a \in \mathbb{Z}[x]$  primitiv, o.b.d.A.  $a$  quadratfrei.
- ▶ Wähle „Big Prime“  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $p \nmid \text{LKoeff}(a)$ ,  $a \bmod p \in \mathbb{F}_p[x]$  quadratfrei.  
Faktorisiere  $a \bmod p$  in  $\mathbb{F}_p[x]$ .  
Wenn  $a \bmod p$  irreduzibel in  $\mathbb{F}_p[x]$ , so auch  $a$  irreduzibel in  $\mathbb{Z}[x]$ .
- ▶ Wahl der Primzahl mithilfe Mignotte's Schranke  
(erlaubt die Rekonstruktion der Faktoren).
- ▶ Wie findet man die modularen Faktoren von  $a \bmod p$ , die einen echten Faktor von  $a$  in  $\mathbb{Z}[x]$  entsprechen? Vorgestellte Methode:  
Versuche alle möglichen Faktoren-Kombinationen.

**Problem:** Exponentielle Laufzeit möglich.

## Beispiel: Swinnerton-Dyer Polynome

$$a_i(x) = \prod (x \pm \sqrt{2} \pm \sqrt{3} \pm \sqrt{5} \pm \dots \pm \sqrt{p_i}) \in \mathbb{Z}[x]$$

$p_i$   $i$ -te Primzahl, Produkt läuft über alle  $2^i$  möglichen Kombinationen der Vorzeichen  $\pm$ .  $a$  ist irreduzibel mit Grad  $2^i$ .

Beachte:  $\mathbb{F}_{p^2}$  enthält alle Quadratwurzeln  $\sqrt{2} \bmod p \cdots \sqrt{p_i} \bmod p$ .

### ► Big-Prime Version

- $B := (n+1)^{1/2} 2^n A b$
- $b = LC(a)$
- $n = \text{grad}(a)$
- $A = \text{max-norm}(a)$

$p$  ungerade Primzahl  $2B < p < 4B : a \bmod p$  QF.

$a \equiv b g_1 \cdots g_r \bmod p$ , d. h. in  $\mathbb{Z}_p[x]$ .

## Zusammenfassung: Faktorisierung

► Mit Hensel Lifting: Zassenhaus Algorithmus

►  $B := (n + 1)^{1/2} 2^n A b$  wie oben.

►  $C := (n + 1)^{2n} A^{2n-1}$

►  $\gamma = \lceil 2 \log_2 C \rceil$

$$\text{d. h. } \gamma \sim 2 \log_2 C \sim \begin{aligned} & 2 \cdot [2n \log(n + 1) + (2n - 1) \log A] \\ & 4n [\log(n + 1) + \log[\text{max-norm}(a)]] \end{aligned}$$

Wähle  $p \leq 2\gamma \ln \gamma$ :  $a \bmod p$  QF

$$l = \lceil \log_p(2B + 1) \rceil \text{ Hensel-Lifting nach } \mathbb{Z}_{p^l}[x].$$

**Problem:** exp. Kombination der möglichen Faktoren. Kann durch **andere Techniken** in Polynom-Zeit (# Operationen) realisiert werden (siehe Kap. 16 vz. Gathen, Gerhard, **Short Vectors in Lattices**, Lenstra Lovasz 16.5).

## Heuristiken: Beispiel

Heuristiken: Wähle mehrere Primzahlen  $p$

**6.32 Beispiel**  $a(x) = x^{16} + 11x^4 + 121$

- Faktorisierung in  $\mathbb{Z}_{13}[x]$  liefert

$$\begin{array}{ccccccccc}
 a(x) = & u_1(x) & u_2(x) & u_3(x) & \cdots & u_6(x) & \text{mod } 13 \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
 & \text{grad } 2 & 2 & 3 & \cdots & 3 & 
 \end{array}$$

$a(x) = u(x)v(x)$  41 Faktorpaarungen

Grade  $D_{13} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  (bis  $\lfloor n/2 \rfloor$ )

- Faktorisierung von  $a(x)$  in  $\mathbb{Z}_{23}[x]$  liefert 8 irreduzible Faktoren, alle mit Grad 2  $\rightsquigarrow$  162 Paarungen.

Grade  $D_{23} = \{2, 4, 6, 8\}$

$\rightsquigarrow D_{13,23} = \{2, 4, 6, 8\}$  sind die möglichen Grade mindestens eines Faktors  $u(x)v(x) = a(x)$  in  $\mathbb{Z}[x]$ .

$\rightsquigarrow$  Anzahl der Kombinationen mod 13 reduziert sich auf 25.

## Beispiel (Forts.)

- ▶ Faktorisierung von  $a(x)$  in  $\mathbb{Z}_5[x]$  liefert 2 irreduzible Faktoren vom Grad 4 und 12, d. h.

$D_5 = \{4\}$ , nur ein Paar muss geliftet werden.

- ▶ Faktorisierung von  $a(x)$  in  $\mathbb{Z}_{31}[x]$  liefert 2 irreduzible Faktoren vom Grad 8, d. h.

$D_{31} = \{8\}$

$\rightsquigarrow D_{5,31} = \{ \}$ , d. h.  $a$  ist irreduzibel.

- ▶ Eisenstein Irreduzibilitäts-Test:

$a \in \mathbb{Z}[x]$ ,  $p$  Primzahl mit  $p \nmid LC(a)$   $p \mid$  alle anderen Koeffizienten von  $a$ ,  $p^2 \nmid a(0) \rightsquigarrow a$  ist irreduzibel in  $\mathbb{Q}[x]$ .

z.B.  $x^n - p$  ist irreduzibel in  $\mathbb{Q}[x]$  für alle  $n, p$ . Übung.

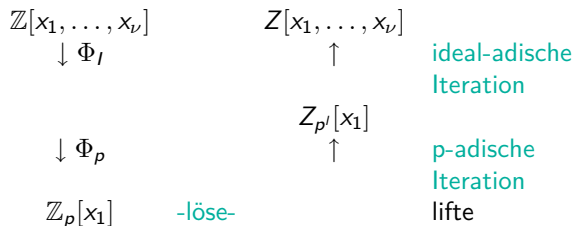
- ▶ Für die Swinnerton-Dyer Polynome gilt: sie lassen sich für jedes  $p$  in linearen und quadratischen Faktoren faktorisieren.

$\rightsquigarrow$  obige Heuristik bringt dafür nichts!



# Multivariate Polynomfaktorisierung in $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_\nu]$ bzw. $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_\nu]$

- ▶ Siehe Homomorphismus-Diagramm Fol. 303



- ▶ Problem Liste der korrekten multivariaten Leit-Koeffizienten.

$a(x_1, \dots, x_\nu) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_\nu]$   $x_1$  als Hauptvariable.

$a(x_1, \dots, x_\nu) \equiv u_1(x_1) \cdots u_n(x_1) \in \mathbb{Z}[x_1] \pmod{\Phi_I}$

- ▶ Leitkoeffizienten von  $a(x_1, \dots, x_\nu)$  (als Polynome in  $x_1$ ) ist multivariates Polynom in Variablen  $x_2, \dots, x_\nu$ .



# Faktorisierung in $K[x]$ für $K$ algebraischer Zahlkörper

Anwendung: Symbolische Integration

Träger (Kronecker).

Algebraische Zahlkörpern, algebraische Erweiterungen von  $F$ , d. h.

$F(\alpha) = F[x]/\langle m(x) \rangle$ ,  $m$  irreduzibles Polynom in  $F[x]$ .

$\alpha$  ist „Wurzel“ von  $m(x)$  mit Grad  $n$  (z. B.  $x^2 + 1$  in  $\mathbb{Q}[x]$  oder  $\mathbb{R}[x]$ )

$$F(\alpha) = \{[f_0 + f_1\alpha + \cdots + f_{n-1}\alpha^{n-1}] : f_i \in F\}$$

**6.33 Beispiel**  $F = \mathbb{Q}$ ,  $\alpha = \sqrt{2}$ ,  $m(x) = x^2 - 2$ , dann

$\mathbb{Q}[x]/\langle x^2 - 2 \rangle \simeq \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$  mit

$$\begin{aligned} (a + b\sqrt{2}) + (a' + b'\sqrt{2}) &= (a + a') + (b + b')\sqrt{2} \\ (a + b\sqrt{2}) \cdot (a' + b'\sqrt{2}) &= (aa' + 2bb') + (ab' + ba')\sqrt{2} \end{aligned}$$

## Grundlagen: Konjugation

- ▶ Sei  $m(x)$  eindeutiges monisches **Minimalpolynom** von  $\alpha$  über  $F$ . Die **Konjugierten von  $\alpha$  über  $F$**  sind die restlichen verschiedenen Nullstellen von  $m(x)$ . Seien diese  $\alpha_2, \dots, \alpha_n$   
z.B.  $-\sqrt{2}$  ist konjugiert zu  $\sqrt{2}$  über  $\mathbb{Q}$ .
- ▶ Sei  $\beta \in F(\alpha)$  mit  $\beta = f_0 + f_1\alpha + \dots + f_{n-1}\alpha^{n-1}$ . Die **Konjugierten von  $\beta$**  sind  $\beta_2, \dots, \beta_n$ , wobei

$$\beta_i = f_0 + f_1\alpha_i + \dots + f_{n-1}\alpha_i^{n-1}$$

- ▶ Konjugation induziert Isomorphismen:

$$\sigma_i : F(\alpha) \rightarrow F(\alpha_i) \text{ mit } \sigma_i(\beta) = \beta_i$$

# Charakterisierungssatz für $F$

**6.34 Satz** Sei  $\beta \in F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ .

$\beta \in F$  gdw  $\beta$  invariant unter allen Permutationen der  $\alpha_j$ .

**Beweis:** Fundamentalsatz für symmetrische Funktionen liefert:

$\beta$  kann eindeutig durch die **elementarsymmetrischen Funktionen** von  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  dargestellt werden (z. B.  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$ ,  $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n$ ,  $\dots$ ).  
Diese können als **Terme der Koeffizienten des Minimalpolynoms** von  $\alpha$  dargestellt werden, die dann in  $F$  liegen.

**6.35 Definition** Sei **Norm**:  $F(\alpha) \rightarrow F$  definiert durch

- ▶  $\text{Norm}(\beta) = \beta \cdot \beta_2 \cdot \dots \cdot \beta_n$  (d. h. Produkt aller Konjugierten).  
Da invariant unter Konjugation, folgt  $\text{Norm}(\beta) \in F$ .
- ▶ Norm kann auch mithilfe der **Resultante** beschrieben werden:

$$a(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i \quad b(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i$$



## Sylvester Matrix: Beispiel

**6.36 Beispiel** Seien  $a = 3yx^2 - y^3 - 4$ ,  $b = x^2 + y^3x - 9 \in \mathbb{Z}[y][x]$  dann gilt:

$$\text{Res}_x(a, b) = \det \begin{bmatrix} 3y & 0 & -y^3 - 4 & 0 \\ 0 & 3y & 0 & -y^3 - 4 \\ 1 & y^3 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & y^3 & -9 \end{bmatrix}$$

$$= -3y^{10} - 12y^7 + y^6 - 54y^4 + 8y^3 + 729y^2 - 216y + 16$$

Man beachte, dass  $\text{Res}_x(a, b) \in \mathbb{Z}[y] = R$ . Es gilt für  $a(x) = a_m \prod_{i=1}^m (x - \alpha_i)$  und  $b(x) = b_n \prod_{i=1}^n (x - \beta_i)$

$$\text{Res}_x(a, b) = a_m^n b_n^m \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n (\alpha_i - \beta_j) = (-1)^{mn} b_n^m \prod_{i=1}^n a(\beta_i)$$

# Grundlagen (Forts.)

- **Eigenschaft:** Zwei Polynome haben einen nichttrivialen gemeinsamen Faktor, falls  $\text{Res}(a, b) = 0$ .
- **Eigenschaft:** Ist  $q(x)$  monisch, so gilt

$$\text{Res}_x(p, q) = \prod_{x:q(x)=0} p(x), \text{ d. h.}$$

$\text{Norm}(\beta) = \text{Res}_x(b(x), m(x)) = \beta \cdot \beta_2 \cdots \beta_n$ ,  
wobei  $\beta$  durch "Polynom"  $b(\alpha)$  dargestellt wird.

- **Fortsetzung der Norm** auf  $F(\alpha)[z]$ .  
Sei  $p \in F(\alpha)[z]$ , d. h.  $p$  kann als bivariates Polynom in Variablen  $\alpha$  und  $z$  betrachtet werden. Setze  
 $\text{Norm}(p) = \text{Res}_x(p(x, z), m(x))$  liefert als Ergebnis ein Polynom in  $F[z]$ .



## Grundlagen (Forts.)

- ▶ Beachte:  $p(\alpha, z) \mid \text{Norm}(p)$  in  $F(\alpha)[z]$ .
- ▶ Die Norm-Funktion ist **multiplikativ**, d. h.  $\text{Norm}(pq) = \text{Norm}(p)\text{Norm}(q)$   
d.h. Jedes Polynom  $p$  welches in  $F(\alpha)[z]$  in Faktoren zerfällt, liefert eine Faktorisierung von  $\text{Norm}(p)$  in  $F[z]$
- ▶ Trager's Algorithmus basiert auf einer Umkehrung dieser Eigenschaft.  
Prozedur:  
**Faktorisiere**  $\text{Norm}(p)$  in  $F[z]$  und lifte diese Faktoren von  $F[z]$  zu Faktoren von  $p(z)$  in  $F(\alpha)[z]$ .
- ▶ Benötigt wir noch **Irreduzibilitätstest** in  $F(\alpha)[z]$ .





## Umkehrung

**6.38 Satz** Sei  $a(z) \in F(\alpha)[z]$ ,  $\text{Norm}(a)$  quadratfrei. Ist  $p_1(z), \dots, p_k(z)$  eine vollständige Faktorisierung von  $\text{Norm}(a)$  über  $F[z]$ , so ist

$$a(z) = \prod_{i=1}^k \text{GGT}(a(z), p_i(z))$$

eine vollständige Faktorisierung von  $a(z)$  über  $F(\alpha)[z]$ .

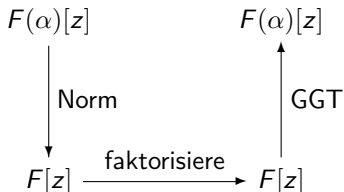
**Beweis:**

- ▶ Angenommen  $a(z) = a_1(z) \cdots a_k(z)$  vollständige Faktorisierung von  $a(z)$  in  $F(\alpha)[z]$ , dann ist  $\text{Norm}(a) = \text{Norm}(a_1) \cdots \text{Norm}(a_k)$  eine Faktorisierung von  $\text{Norm}(a)$  in  $F[x]$ . d.h.  
Für jedes  $i$  gilt  $p_i(z) = \text{Norm}(a_j)$  für ein geeignetes  $j$ .  
Da  $\text{Norm}(a)$  quadratfrei, folgt  $\text{Norm}(a_j) \neq \text{Norm}(a_h)$  für  $h \neq j$ .



Faktorisierung in  $F(\alpha)[z]$ 

- ▶ Wenn **Norm(a) quadratfrei**, so kann  $a(z)$  wie folgt faktorisiert werden:



- ▶ Ist  $a(z) \in F(\alpha)[z]$  **nicht** quadratfrei, so kann man wie gehabt o.b.d.A. auf quadratfreien Fall reduzieren. Benötigt wird aber **Norm(a) quadratfrei**.
- ▶ Finde  $s \in F$ , so dass  $b(z) = a(z + s\alpha)$  quadratfrei. Dann faktorisiere  $b(z) = b_1(z) \cdots b_k(z)$ .
- ▶ Die Faktorisierung für  $a(z) = a_1(z) \cdots a_k(z)$  mit  $a_i(z) = b_i(z - s\alpha)$ .

## Faktorisierung in $F(\alpha)[z]$ (Forts.)

**6.39 Satz** Sei  $a(z)$  quadratfreies Polynom in  $F(\alpha)[z]$ . Dann ist  $\text{Norm}(a(z - s\alpha))$  quadratfrei bis auf endlich vielen  $s \in F$ .

Beweis:

- ▶ Sei  $\text{Norm}(a) = \prod_{i=1}^r p_i(z)^i$  quadratfreie Faktorisierung von  $\text{Norm}(a)$  in  $F[z]$ .
- ▶ Da  $a(z)$  quadratfrei ist und  $a(z) \mid \text{Norm}(a) \rightsquigarrow a(z) \mid p(z) = p_1(z) \cdots p_r(z)$ . **Beachte hierbei  $p(z) \in F[z]$ .**
- ▶ Seien  $\beta_1, \dots, \beta_k$  die Wurzeln von  $p(z)$ , d.h.  $p(z) = \prod (z - \beta_i)$ .
- ▶ Da  $p(z)$  quadratfrei ist, so sind alle  $\beta_i$  verschieden.

## Beweis (Forts.)

- ▶ Sei  $s \in F$ , dann

$$c_s(z) := \text{Norm}(p(z - s\alpha)) = \prod_j \prod_i (z - (s\alpha_j + \beta_i)) \in F[z].$$

- ▶ Dieses Polynom kann mehrfach Wurzeln haben gdw

$$s \cdot \alpha_j + \beta_i = s \cdot \alpha_u + \beta_v \text{ für } j, i, u, v \text{ geeignet gdw } s = \frac{\beta_v - \beta_i}{\alpha_j - \alpha_u}$$

- ▶ d. h. für fast alle  $s \in F$  gilt  $\text{Norm}(a(z - s\alpha)) \mid p(z - s\alpha) \mid c_s(z)$  mit  $c_s(z)$  Polynom ohne Mehrfachwurzeln.
- ▶ In diesen Fällen ist  $a_s(z) = a(z - s\alpha)$  Polynom in  $F(\alpha)[z]$  mit quadratfreier Norm.



## Faktorisierung über alg. Zahlkörpern

**procedure** Alg\_Factorization( $a(z), m(x), \alpha$ )

{Eingabe: quadratfrei  $a(z) \in F(\alpha)[z]$ }

{ $\alpha$  Alg-Zahl mit minimal Polynom  $m(x)$ , grad  $n$ ,  $a$  als Polynom in  $\alpha, z$ }

{Ausgabe: Faktorisierung von  $a$ }

1 //Finde  $s$  : Norm( $a_s(z)$ ) quadratfrei //

$s := 0$ ;  $a_s(\alpha, z) := a(\alpha, z)$ ;

Norm( $a_s$ ) := Res <sub>$x$</sub> ( $m(x), a_s(x, z)$ )

**while** Grad (GGT (Norm( $a_s$ ), Norm( $a_s$ )'))  $\neq 0$  **do**

$s := s + 1$ ;  $a_s(\alpha, z) := a_s(\alpha, z - \alpha)$ ;

Norm( $a_s$ ) := Res <sub>$x$</sub> ( $m(x), a_s(x, z)$ )

2 //Faktorisiere Norm( $a_s$ ) in  $F[z]$  und liefte Ergebnis //

$b := \text{factors}(\text{Norm}(a_s))$ ;

**if** sizeof( $b$ ) = 1 **then** return  $a(z)$

**else**

**for each**  $a_i(z) \in b$  **do**

$a_i(\alpha, z) := \text{GGT}(a_i(z), a_s(\alpha, z))$

$a_i(\alpha, z) := a_i(\alpha, z + s\alpha)$

substitute( $a_i(z) \leftarrow a_i(\alpha, z), b$ )

**return** ( $b$ )

## Beispiel

### 6.40 Beispiel Sei

$$a_\alpha(z) = z^4 + z^3 + (2 + \alpha - \alpha^2)z^2 + (1 + \alpha^2 - 2\alpha^3)z - 2 \in \mathbb{Q}(\alpha)[z]$$

Mit  $\alpha = 3^{1/4}$  minimal Polynom für  $\alpha$ ,  $m(x) = x^4 - 3$ .

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \text{Norm}(a_\alpha(z)) &= \text{Res}_x(a_\alpha(z), m(x)) = \\ &= z^{16} + 4z^{15} + 14z^{14} + 32z^{13} + 47z^{12} + 92z^{11} + 66z^{10} + 120z^9 \\ &\quad - 50z^8 - 24z^7 - 132z^6 - 40z^5 - 52z^4 - 64z^3 - 64z^2 - 32z + 16 \end{aligned}$$

Ist QF in  $\mathbb{Q}[z]$

$\blacktriangleright$  Faktorisiert man in  $\mathbb{Q}[z]$  so  $\text{Norm}(a_\alpha(z)) = g(z) \cdot h(z)$  mit

$$\begin{aligned} g(z) &= z^8 + 4z^7 + 10z^6 + 16z^5 - 2z^4 - 8z^3 - 20z^2 - 8z + 4 \\ h(z) &= z^8 + 4z^6 + 9z^4 + 4z^2 + 4 \end{aligned}$$

## Beispiel (Forts.)

- ▶ Berechne GGT in  $\mathbb{Q}(\alpha)[z]$

$$\text{GGT}(a_\alpha(z), g(z)) = z^2 + (1 - \alpha)z + (1 - \alpha^2) \text{ und}$$

$$\text{GGT}(a_\alpha(z), h(z)) = z^2 + \alpha z + (1 + \alpha^2)$$

Faktorisierung von  $a_\alpha(z)$  in  $\mathbb{Q}(\alpha)[z]$  ist

$$a_\alpha(z) = (z^2 + (1 - \alpha)z + (1 - \alpha^2))(z^2 + \alpha z + (1 + \alpha^2))$$

**Problem:**

- Gradwachstum von  $\text{Norm}(a)$ .
- Koeffizientenwachstum

**Forschungsgegenstand**

- Vermeidung von Wachstum
- Berechnungen mit Körpererweiterungen
- Galois Korrespondenz



# Inhalt Kapitel 7

## Primzahltesten und Faktorisierung in $\mathbb{Z}$

Primzahltesten

Primzahlen mit vorgebenen Eigenschaften

Faktorisierung in  $\mathbb{Z}$

Anwendung: Cryptosysteme







# Algorithmus Fermat's Test

**procedure** Alg\_Fermat\_Test  $N$

{**Eingabe:** ungerade Zahl  $N \geq 3$ }

{**Ausgabe:** „Nicht Primzahl“ oder „mögliche Primzahl“}

**begin**

1 Wähle  $a \in \{2, \dots, N - 2\}$  zufällig (Gleichverteilung)

2 Berechne  $b := a^{N-1} \bmod N$  durch wiederholtes Quadrieren

3 **if**  $b \neq 1$  **then return** „nicht Primzahl“  
**else return** „mögliche Primzahl“

**end**

- ▶ Ist  $\text{GGT}(a, N) \neq 1$  so  $\text{GGT}(b, N) \neq 1$  d.h.  $b \neq 1 \rightsquigarrow$  nicht Primzahl ist korrekt.
- ▶ Angenommen  $\text{GGT}(a, N) = 1, b \neq 1$  Fermat  $\rightsquigarrow$  Antwort korrekt
- ▶  $b = 1$  Antwort „mögliche Primzahl“.  
 Wann ist für diese Antwort  $N$  keine Primzahl?





















## Andere Primzahltests (Fort.)

- Ist  $N$  Primzahl, so gilt für alle  $a \in \mathbb{Z}$

$$(*) \left(\frac{a}{N}\right) \equiv a^{(N-1)/2} \pmod{N}$$

- Solovay-Strassen zeigen: Ist  $N$  zusammengesetzt und nicht Primzahlpotenz, so gilt (\*) **nicht** für mindestens die Hälfte der Zahlen  $a \in 1 \dots N-1$ . Ihr Algorithmus testet (\*) für zufällig gewählte  $a$ 's und kostet  $O(\log N \cdot M(\log N))$  Wortoperationen pro Test.
- Spezielle Primzahltests:
  - Pepin (1877) für **Fermat Zahlen**  $F_n = 2^{2^n} + 1$   
 $F_n$  ist Primzahl gdw  $3^{(F_n-1)/2} \equiv -1 \pmod{F_n}$
  - Lucas-Lehmer Test (1878, 1935) für **Mersenne-Zahlen**  $M_n = 2^n - 1$   
 $2^n - 1$  ist Primzahl gdw  $l_{n-1} \equiv 0 \pmod{M_n}$ .  
 Hierbei  $l_i$  rek. definiert durch  $l_1 = 4$  und  $l_i = l_{i-1}^2 - 2$  ( $i \geq 1$ )



## Finden von Primzahlen mit vorgebenen Eigenschaften

z. B. Primzahl mit  $n$ -Bits, Big-Prime Methoden, Hensel Lifting Methoden.

### ► Primzahlsatz:

- Seien  $\Pi(x) = |\{p \in \mathbb{N} : p \leq x, p \text{ Primzahl}\}|$ ,  $p_n = n \text{ te Primzahl}$
- Dann gilt:  $\Pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$  und  $p_n \approx n \ln n$

d.h. Eine zufällige Zahl nahe bei  $x$  ist eine Primzahl mit Wahrscheinlichkeit  $1/\ln x$ .

d. h. wählt man zufällige  $n$ -Bit Zahl und testet sie auf Primalität, so erwartet man eine Primzahl zu finden mit etwa  $n \ln 2$  Versuchen.

- Wie findet man Primzahl  $p$  mit  $B < p \leq 2B$  ( $B$  vorgegeben).  
Wähle zufälliges Element im Intervall, teste auf Primalität  $k$  mal und gebe erste Zahl aus, die diesen Test erfüllt.
- Ist  $p$  nicht Primzahl, so ist die Wahrscheinlichkeit Antwort „mögliche Primzahl“  $\leq 2^{-k}$ . Dies bedeutet aber nicht, dass die Ausgabe Primzahl mit Wahrscheinlichkeit  $1 - 2^{-k}$  ist.







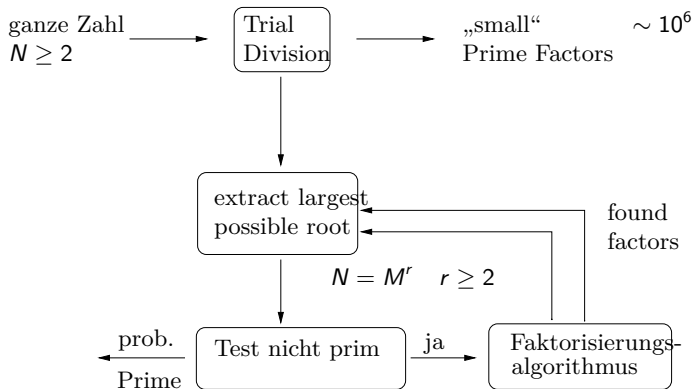
# Faktorisierung in $\mathbb{Z}$ (Übersicht)

| Methode                   | Jahr        | Zeit                      |
|---------------------------|-------------|---------------------------|
| Trialdivision             | $-, \infty$ | $O_{\sim}(2^{n/2})$       |
| Pollard's $p - 1$ Methode | 1974        | $O_{\sim}(2^{n/4})$       |
| Pollard's $\rho$ -Methode | 1975        | $O_{\sim}(2^{n/4})$       |
| Pollard-Strassen          | 1976        | $O_{\sim}(2^{n/4})$       |
| Morrison/Brillhart        | 1975        | $\exp(O_{\sim}(n^{1/2}))$ |
| Dixon's Random Squares    | 1981        | $\exp(O_{\sim}(n^{1/2}))$ |
| Lenstra's Elliptic Curves | 1987        | $\exp(O_{\sim}(n^{1/2}))$ |
| Number Field Sieve        | 1990        | $\exp(O_{\sim}(n^{1/3}))$ |





# Format der Faktorisierungsalgorithmen



siehe Kap. 19, vz. Gathen/Gerhard  
+ Kap.20: Anwendung Public Key Cryptography.

# Faktorisierungsalgorithmen in $\mathbb{Z}$

**Annahme:**  $N$  ist keine perfekte Potenz, d.h.  $N \neq M^k$  für  $M \in \mathbb{Z}$ ,  $k \geq 2$

- ▶ Ganzzahlige Wurzeln berechnen: **Gegeben**  $a, n \in \mathbb{N}$   
**Entscheide** ob  $a$  eine  $n$ -te Potenz einer Zahl ist und berechne diese gegebenenfalls.
- ▶ Gesucht Lösung von  $y^n - a = 0$ ::  
Verwende hierfür **Newtons Iteration** (2-adisch) für  $a, n$  ungerade in  $O(M(\log N))$ .
- ▶ Bestimme  $b, d, e, r$  mit  $N = 2^d 3^e b^r$   $\text{GGT}(b, 6) = 1$   $r$  maximal in  $O(\log N \cdot M(\log N))$  Wortoperationen.  
(Siehe Aufgaben 9.44 und 18.6 in vzG,G).



# Pollard und Strassen Methode

Sei  $a \mapsto \bar{a}$  die mod  $N$  Reduktion und  $1 \leq c \leq \sqrt{N}$ . Betrachte

$$F = (x+1)(x+2)\cdots(x+c) \in \mathbb{Z}[x] \quad f = \bar{F} \in \mathbb{Z}_N[x]$$

Dann gilt  $c^2! = \prod_{0 \leq i < c} f(i\bar{c})$ . Strategie: "baby step/giant step":

## 2. Pollard\_Strassen\_Faktorisierung

{Eingabe:  $N \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ , weder Prim noch perfekte Potenz,  $b \in \mathbb{N}$ }

{Ausgabe: kleinster Primfaktor von  $N$  falls  $< b$  sonst „Failure“}

**begin**

1  $c \leftarrow \lceil b^{1/2} \rceil$ ; Berechne Koeffizienten von  $f = \prod_{1 \leq j \leq c} (x+j) \in \mathbb{Z}_N[x]$ ;

2 Berechne  $g_i \in \{0, \dots, N-1\}$  mit  $g_i \bmod N = f(i\bar{c})$  für  $0 \leq i < c$ ;

3 Falls  $\text{GGT}(g_i, N) = 1$  für  $0 \leq i < c$  **then return** „Failure“

$k \leftarrow \text{Min} \{0 \leq i < c : \text{GGT}(g_i, N) > 1\}$

4 **return**  $\text{Min} \{kc + 1 \leq d \leq kc + c : d \mid N\}$

**end**

## Fakt. Alg. Pollard/Strassen (Forts.)

### 7.6 Satz

Algorithmus 2. ist korrekt und benötigt  $O(M(b^{1/2})M(\log N)(\log b + \log \log N))$  Wortoperationen und Platz für  $O(b^{1/2} \log N)$  Wörter.

**Beweis:** Für  $0 \leq i < c$  gilt:

- ▶ Ein Primteiler  $p$  von  $N$  teilt  $F(ic)$  und somit auch  $\text{GGT}(g_i, N) = \text{GGT}(F(ic) \bmod N, N)$  gdw.  
 $p$  teilt Zahl im Intervall  $\{ic + 1, \dots, ic + c\} \rightsquigarrow$  Korrektheit.
- ▶ Kosten für 1. und 2.  $O(M(c) \log c)$  Add., Mult. in  $\mathbb{Z}_N$   
 Schritt 3  $O(cM(\log N) \log \log N)$  Wortoperationen  
 Schritt 4  $O(cM(\log N))$  Wortoperationen  
 Add., Mult. in  $\mathbb{Z}_N$  kostet  $O(M(\log N))$ .
- ▶ Platz für  $O(b^{1/2})$  Zahlen der Größe  $O(\log N)$
- ▶ Schleife mit  $b = 2^i, (i = 1, 2, \dots, b > S_2(N))$  liefert vollständige Faktorisierung in  $O(M(S_2(N)^{1/2})M(\log N) \log N)$ .

# Pollards $\rho$ -Methode (1975)

## Idee

Wähle Funktion  $f : \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{Z}_N$  und Startwert  $x_0 \in \mathbb{Z}_N$  Setze  $x_i = f(x_{i-1})$  für  $i > 0$ . Betrachte die Folge  $(x_i)$ :

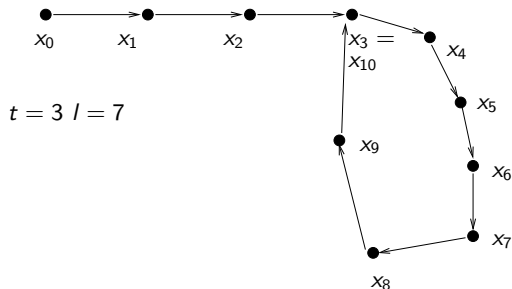
- ▶ Hoffe nun die Folge  $x_0, x_1, x_2, \dots$  verhält sich wie eine Folge unabhängiger Zufallselemente von  $\mathbb{Z}_N$ .
- ▶ Ist  $p$  ein unbekannter Primfaktor von  $N$  so findet eine **Kollision mod  $p$**  statt, falls es  $t, l$  gibt mit  $l > 0$  und  $x_t \equiv x_{t+l} \pmod{p}$
- ▶ Ist  $N$  keine Primzahlpotenz und  $q$  ein weiterer  $p$ -Teiler von  $N$ , so sind, für unabhängige Reste modulo  $N$ ,  $x_i \pmod{p}$  und  $x_i \pmod{q}$  ebenfalls unabhängige Zufallsvariablen (Chin. Restsatz).
- ▶ D.h. mit großer Wahrscheinlichkeit  $x_t \not\equiv x_{t+l} \pmod{q}$  und somit  $\text{GGT}(x_{t+l} - x_t, N)$  ist nicht trivialer Faktor von  $N$ .

## Pollards $\varrho$ -Methode (Forts.)

- ▶ **Frage:** Wie groß sind  $t, l$ ?  
Offenbar  $t + l \leq p$  und der erwartete Wert ist  $O(\sqrt{p})$  für eine Zufallsfolge  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ .
- ▶ **Geburtstagproblem:** Wieviel Personen benötigt man um eine Wahrscheinlichkeit (zwei Personen mit gleichem Geburtstag zu haben)  $\geq 1/2$  zu erhalten (23 reichen 50,7%)
- ▶ Auswahl (mit Wiederholung) aus Urne mit  $p$  Marken. Die erwartete Anzahl von Wahlen bis zu einer Kollision ist  $O(\sqrt{p})$
- ▶ **Wie bestimmt man Zykel : Floyd's Trick.**  
Sei  $x_0 \in \{0, \dots, p-1\}$   $f : \{0, \dots, p-1\} \rightarrow \{0, \dots, p-1\}$   
Betrachte  $(x_i)_{i \geq 0}$  mit  $x_{i+1} = f(x_i)$ .
- ▶ **Zykel** der Länge  $l > 0$  mit  $x_i = x_{i+l}$  für alle  $i \geq t$  für  $t \in \mathbb{N}$

# Pollards $\rho$ -Methode (Forts.)

$l, t$  seien minimal



Speichere Folge  
bis  $x_i = x_j$   
 $O(t + l)$   
zuviel Platz

**Floyd's 1-step/2-step cycle detection method::**

Führe zweite sequenz mit  $y_i = x_{2i}$  speichere nur  $x_i, y_i$  bis  $x_i = y_i = x_{2i}$

**FLOYD\_Cycle\_Det\_ALG**

$y_0 \leftarrow x_0; i \leftarrow 0;$

**repeat**  $i \leftarrow i + 1; x_i \leftarrow f(x_{i-1}); y_i \leftarrow f(f(y_{i-1}))$  **until**  $x_i = y_i;$

**return**  $i$





# Pollards $\rho$ -Methode zur Faktorisierung

## 3. Pollard\_ $\rho$ \_Faktorisierung

{Eingabe:  $N \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ , weder Prim noch perfekte Potenz}  
 {Ausgabe: entweder echter Teiler oder „Failure“}

**begin**

1 Wähle  $x_0 \in \{0, \dots, N - 1\}$  zufällig;  $y_0 \leftarrow x_0$ ;  $i \leftarrow 0$ ;

2 **repeat**

3  $i \leftarrow i + 1$ ;  $x_i \leftarrow x_{i-1}^2 + 1 \pmod N$ ;  $y_i \leftarrow (y_{i-1}^2 + 1)^2 + 1 \pmod N$ ;

4  $g \leftarrow \text{GGT}(x_i - y_i, N)$ ;

**if**  $1 < g < N$  **then return**  $g$

**else if**  $g = N$  **then return** „Failure“

**end**

**7.8 Satz** Ist  $p$  der kleinste P-Teiler von  $N \rightsquigarrow$  erwartete Laufzeit ersten Teiler zu finden  $O(\sqrt{p}M(\log N) \log \log N)$ .

Vollständige Faktorisierung  $S_2(N)^{1/2} \sim (\log^2 N) \approx 0 (N^{1/4})$

Pollards  $S$ -Methode zur Faktorisierung (Forts.)7.9 Beispiel  $N = 82123$   $x_0 = 631$ 

| $i$ | $x_i \bmod N$ | $x_i \bmod 41$ | $y_i \bmod N$ | GGT $(x_i - y_i, N)$ |
|-----|---------------|----------------|---------------|----------------------|
| 0   | 631           | 16             | 631           | $N$                  |
| 1   | 69670         | 11             | 28986         | 1                    |
| 2   | 28986         | 40             | 13166         | 1                    |
| 3   | 69907         | 2              | 40816         | 1                    |
| 4   | 13166         | 5              | 20459         | 1                    |
| 5   | 64027         | 26             | 6685          | 1                    |
| 6   | 40816         | 21             | 75835         | 1                    |
| 7   | 80802         | 32             | 17539         | 41                   |
| 8   | 20459         | 0              |               |                      |
| 9   | 71874         | 1              |               |                      |
| 10  | 6685          | 2              |               |                      |

$$N = 41 \cdot 2003$$

$$x_{38} \equiv 4430 \equiv x_{143} \pmod{N}$$

# Dixon's Random Square Faktorisierungsmethode

- ▶ Erstes Verfahren mit Aufwand kleiner als  $\exp(\varepsilon \cdot \log N)$  für jedes  $\varepsilon > 0$

**Idee:** Die Gleichungen

$$N = s^2 - t^2 = (s + t)(s - t)$$

$$N = a \cdot b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

Beschreiben **Bijektion** zwischen Faktorisierungen von  $N$  und Darstellungen von  $N$  als Differenz zweier Quadrate.

- ▶ **Naiver Faktorisierungsalgorithmus:** Für  $t = \lceil \sqrt{N} \rceil, \lceil \sqrt{N} \rceil + 1, \dots$   
 Teste ob  $t^2 - N$  perfektes Quadrat ist.  
 Findet man solch ein Quadrat so Faktorisierung erfolgreich!
- ▶ Gut Falls  $N = ab$  mit  $|a - b|$  klein, da **Laufzeit** abhängig von  $|a - b|$  ist.  
 Fermat kannte dieses Argument:  $N = 2027651281 \quad \sqrt{N} \approx 45029$

$$N = 45041^2 - 1020^2 = 46061 \cdot 44021$$

## Dixon's Random Square Methode (Forts.)

- ▶ **Variante:** Wähle  $k \ll N$   $t = \lceil \sqrt{kN} \rceil, \lceil \sqrt{kN} \rceil + 1, \dots$  und teste ob  $t^2 - kN$  perfektes Quadrat.  
Falls  $t^2 - kN = s^2$  so  $\text{GGT}(s + t, N)$  ist hoffentlich nichttrivialer Faktor von  $N$ , so dass  $s \not\equiv \pm t \pmod N$
- ▶ Das finden von Relationen der Form  $s^2 \equiv t^2 \pmod N$  auf dieser Weise ist für große  $N$  sehr unwahrscheinlich.

### 7.10 Beispiel

$N = 2183$  Angenommen wir haben folgende Kongruenzen

$$453^2 \equiv 7 \pmod N \quad 1014^2 \equiv 3 \pmod N \quad 209^2 \equiv 21 \pmod N$$

$$\text{Dann } (453 \cdot 1014 \cdot 209)^2 \equiv 21^2 \pmod N \text{ oder}$$

$$687^2 \equiv 21^2 \pmod N \quad \rightsquigarrow$$

$$37 = \text{GGT}(687 - 21, N) \quad 59 = \text{GGT}(687 + 21, N)$$

Dieses ist auch die Faktorisierung von  $N$

## Dixon's Random Square Methode (Forts.)

▶ Systematisches Vorgehen:

Wähle  $b$  zufällig und hoffe, dass  $b^2 \text{ REM } N$  Produkt kleiner Primzahlen ist. Sind genügend solcher gefunden, so erhält man eine Kongruenz  $s^2 \equiv t^2 \pmod{N}$ . Dann  $\text{GGT}(s - t, N)$  bzw.  $\text{GGT}(s + t, N)$

▶ Faktorisierungsbasis Primzahlen  $p_1, \dots, p_h$  bis zu einer Schranke  $B \in \mathbb{R}^+$

Eine Zahl  $b$  heißt  **$B$ -Zahl** falls  $b^2 \text{ REM } N$  (Rest der Division von  $b^2$  durch  $N$ ) Produkt der  $P$ -Zahlen  $p_1, \dots, p_h$  ist.

▶ Im Beispiel sind 453, 1014, 209  $B$ -Zahlen für jedes  $B \geq 7$  und  $N = 2183$

- Für eine  $B$ -Zahl  $b$  sei  $b^2 \equiv p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_h^{\alpha_h} \pmod{N}$  mit  $\alpha_1 \cdots \alpha_h \in \mathbb{N}$ .  
Assoziiere dazu **Binären Exponenten Vektor**

$$\varepsilon = (\alpha_1 \bmod 2, \alpha_2 \bmod 2, \dots, \alpha_h \bmod 2) \in \mathbb{F}_2^h$$

- ▶ Für  $B$ -Zahl  $b_i$ , sei  $b_i^2 \equiv \prod_{1 \leq i \leq h} p_i^{\alpha_{ij}} \pmod{N}$



## Dixon's Random Square Methode (Forts.)

- ! Die Hoffnung ist nun  $s, t$  gefunden zu haben mit  $s \not\equiv \pm t \pmod{N}$
- ▶ Ist  $N$  keine Primzahlpotenz mit  $r \geq 2$  verschiedene Primfaktoren, so folgt aus Chinesischer-Restsatz, dass jedes Quadrat in  $\mathbb{Z}_N^x$  genau  $2^r$  Quadratwurzeln in  $\mathbb{Z}_N$  hat.
- ▶ Ist somit  $s$  eine zufällige Quadratwurzel von  $t^2$  so gilt

$$\text{Prob } \{s \equiv \pm t \pmod{N}\} = \frac{2}{2^r} \leq \frac{1}{2}$$

- ▶ Im Beispiel mit  $B = \{2, 3, 5, 7\}$  gilt
 

|                                                                                                                                 |                                         |                                |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|--------------------------------|
| $\varepsilon_1 = (0, 0, 0, 1)$                                                                                                  | $\varepsilon_2 = (0, 1, 0, 0)$          | $\varepsilon_3 = (0, 1, 0, 1)$ |
| $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$ in $\mathbb{F}_2^4$ und $\gamma_1 = \gamma_3 = 0$ $\gamma_2 = \gamma_4 = 1$ |                                         |                                |
| $s = 453 \cdot 1014 \cdot 209$                                                                                                  | $t = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^1$ |                                |



## Dixon's Random Square Methode (Forts.)

- ▶ **Analyse:** Sei  $L(N) = e^{\sqrt{\ln N \ln \ln N}}$   
 Dixon's Random Square Methode faktorisiert eine Zahl  $N$  mit erwarteten Wert von  $O(L(N)\sqrt{9/2})$  Wortoperationen.
- ▶ Zu den Kosten des folgenden Dixon's Random Squares Algorithmus:
  - ▶ Sei  $n = \log N$ . Kosten für Basis von Primzahlen  $O(h \log^2 h \log \log h)$  Wortoperationen.
  - ▶ Teilbarkeitstest  $O(h \cdot M(n))$ .
  - ▶ Kosten für eine Iteration in Schleife 2 sind  $O(M(n) \log n)$ , für GGT,  $O(M(n))$  Wortoperationen für  $b^2 \text{REM}N$  und  $O((h+n)M(n))$  Operationen um  $B$ -Zahl Check durchzuführen.
  - ▶ Ist  $k$  die Anzahl der Iterationen von 2, so kosten  $O(k(h+n)M(n))$  Wortoperationen.
  - ▶ Lösen des linearen Gleichungssystems:  $O(h^3)$
  - ▶  $\rightsquigarrow O(h^3 + k(h+n)M(n))$  Wortoperationen.

# Dixon's Random Squares Methode zur Faktorisierung

## 4. Dixon's\_Random\_Squares\_Faktorisierung

{Eingabe: Ungerade Zahl  $N \geq 3$ , weder Prim noch perfekte Potenz  $B \in \mathbb{R}^+$ }  
 {Ausgabe: entweder echter Teiler oder „Failure“}

- 1 Berechne alle P-Zahlen  $p_1, \dots, p_h \leq B$   
**if**  $p_i \mid N$  für ein  $i \in \{1, \dots, h\}$  **then** return  $p_i$
- 2  $A \leftarrow \emptyset$  //Initialisiere Menge der B-Zahlen//  
**repeat**
- 3 Wähle zufällig  $b \in \{2, \dots, N - 2\}$   
 $g \leftarrow \text{GGT}(b, N)$  **if**  $g > 1$  **then** return  $g$
- 4  $a \leftarrow b^2 \text{ REM } N$  //Faktorisiere  $a$  über  $\{p_1, \dots, p_h\}$ //  
**for**  $i = 1 \dots h$  **do** //Bestimme Vielfachheit von  $p_i$  in  $a$ //
- 5  $\alpha_i \leftarrow 0$ ; **while**  $p_i \mid a$  **do**  $a \leftarrow \frac{a}{p_i}$ ,  $\alpha_i \leftarrow \alpha_i + 1$
- 6 **if**  $a = 1$  **then**  $\alpha \leftarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_h)$ ,  $A \leftarrow A \cup \{(b, \alpha)\}$
- 7 **until**  $\#A = h + 1$

## Dixon's Random Squares Methode zur Faktorisierung

- 8 Finde verschiedene Paare  $(b_1, \alpha^{(1)}), \dots, (b_l, \alpha^{(l)}) \in A$  mit  $\alpha^{(1)} + \dots + \alpha^{(l)} \equiv 0 \pmod{2}$  in  $\mathbb{F}_2^h$  für ein  $l \geq 1$  durch lösen eines  $(h+1) \times h$  System von linearen Gleichungen in  $\mathbb{F}_2$
- 9  $(\gamma_1, \dots, \gamma_h) \leftarrow \frac{1}{2}(\alpha^{(1)} + \dots + \alpha^{(l)});$   
 $s \leftarrow \prod_{1 \leq i \leq l} b_i; t \leftarrow \prod_{1 \leq j \leq h} p_j^{\gamma_j}; g \leftarrow \text{GGT}(s+t, N);$   
**if**  $g < N$  **then** **return**  $g$  **else return** „Failure“

! Abschätzung für  $k$  und geeignete Wahl von  $B$  siehe vz. Gathen/Gerhard 19.5 (S.527 - 530)

- ▶ Fixiere  $r \in \mathbb{N}$ ,  $n = \ln N$   $B = N^{1/2r}$ , d.h.  $\ln B = N/2r$ ,  
 $h = \Pi(B) > B/\ln(B)$  für  $B \geq 59$  nach PZ-Satz
- ▶ Die Erwartete Anzahl  $k$  erfüllt dann  $\frac{N}{h^{2r}}(2r)! < n^{2r} \rightsquigarrow$  Schranke.
- ▶ Sei  $\Psi(x, y) = \{a \in \mathbb{N} : 1 \leq a \leq x, \forall p \text{ prim } p \mid a \Rightarrow p \leq y\}$  die Menge der **y glatten Zahlen**.  $b$  ist B-Zahl gdw.  $b^2 \text{REM } N \in \Psi(N, B)$ .

## Pollard's $p - 1$ Methode

- ▶ Als Einführung in der Methode der **elliptischen Kurven**. Annahme  $N$  hat Primfaktor  $p$ , mit  $p - 1$   $B$ -Zahl, d.h. Primpotenzen  $l^e \mid p - 1$  erfüllen  $l^e \leq B$ , (sie sind also  $B$  zahm für geeignet gewähltes  $B$ ).

### 5. Pollard's\_p - 1\_Faktorisierung

{Eingabe:  $N \geq 3, B > 0$ }

{Ausgabe: entweder echter Teiler von  $N$  oder „Failure“}

- 1  $k \leftarrow \text{KGV}\{i : 2 \leq i \leq B\}$
  - 2 Wähle  $a \in \{2, \dots, N - 2\}$  zufällig
  - 3  $b \leftarrow a^k \bmod N$ ;  $d \leftarrow \text{GGT}(b - 1, N)$ ;
  - 4 **if**  $1 < d < N$  **then return**  $d$  **else return** „Failure“
- ▶ Hoffnung  $d$  ist nichttrivialer Teiler von  $N$ . Die Annahme garantiert  $a^k \equiv 1 \pmod p$ , da  $p - 1 \mid k$ , d.h.  $d > 1$ . Um  $d < N$  zu garantieren, genügt es, wenn  $N$  einen weiteren Primfaktor  $q$  hat, mit  $a^k \not\equiv 1 \pmod q$
  - ▶ Grundlage ist die Gruppe  $G = \mathbb{Z}_N^\times$ . Hoffnung ist  $|G \bmod p|$  ist  $B$ -Zahl.

## Lentra's Elliptische-Kurven Methode (1987)

- ▶ Statt  $G = \mathbb{Z}_N^x$ , werden Gruppen von Elliptischen-Kurven und deren Ordnung als Testkandidat  $B$ -Zahl zu sein, verwendet.

Algebraische Geometrie

- ▶ Sei  $F$  Körper mit  $\text{char} \neq 2, 3$  und  $x^3 + ax + b \in F[x]$  quadratfrei. Dann ist

$$E = \{(u, v) \in F^2 : v^2 = u^3 + au + b\} \cup \{O\} \subseteq F^2 \cup \{O\}$$

eine **elliptische Kurve über  $F$** .  $O$  Punkt im Unendlichen von  $E$ .

- ▶  $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ ,  $x^3 - x + b$  definieren elliptische Kurven.
- ▶ **Gruppenstruktur:**  $E$  wird zu einer abelschen Gruppe mit  $+$  wie folgt:: Ist  $P = (u, v) \in E$ , so sei der **Spiegelpunkt**  $-P = (u, -v)$  wobei  $-O = O$ . Sind  $P, Q \in E$ , so schneidet die Gerade durch  $P, Q$   $E$  in Punkt  $S$ . Dann  $R = P + Q = -S$ . Spezialfälle  $P = Q$  (Tangente),  $P + O = -(-P) = P$  und  $P + (-P) = -O = O$ .

## Lentra's Elliptische-Kurven Methode (1987)

- ▶ Die Größe elliptischer Kurven über  $\mathbb{F}_q$ :
- ▶ Sei  $E$  elliptische Kurve über  $\mathbb{F}_q$ ,  $\text{char} > 3$ , dann gilt  $|E| \leq 2q + 1$ .
- ▶ Hasse's Schranke:  $||E| - (q + 1)| \leq 2\sqrt{q}$
- ▶ Sei  $y^2 = x^3 + x$  mit  $q = 7$ .  $E$  enthält  $(0, 0), (1, 0), (4, 2), (4, 5), (5, 1), (5, 6), (6, 0), O$ . Die Gruppe wird von  $(4, 2)$  mit Ordnung 4 und  $(0, 0)$  mit Ordnung 2 erzeugt, d.h. isomorph zu  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ .
- ▶  $|E| \cdot P = O$ . Die Ordnung eines Elements ist wie üblich definiert.
- ▶ Rationale Funktionen zur Berechnung der Summe  $(x_1, y_1) + (x_2, y_2)$ 

$$x_1 \neq x_2 \rightsquigarrow x_3 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2 - x_1 - x_2, y_3 = -y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x_1 - x_3)$$

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \rightsquigarrow x_3 = \left(\frac{3x_1^2 + a}{2y_1}\right)^2 - 2x_1, y_3 = -y_1 + \frac{3x_1^2 + a}{2y_1} \cdot (x_1 - x_3)$$

# Lenstra's Elliptische-Kurven Faktorisierungsalgorithmus

## 5. Lenstra's\_Elliptic\_Curve\_Faktorisierung

{Eingabe: Ungerade Zahl  $N$ ,  $3 \nmid N$ , keine perfekte Potenz,  $B \in \mathbb{R}^+$ ,  $\min_{p|N} \leq C$ }  
 {Ausgabe: entweder echter Teiler oder „Failure“}

- 1 Wähle zufällig  $(a, u, v) \in \{0, \dots, N-1\}^3$ ;  
 $b \leftarrow v^2 - u^3 - au$ ;  $g \leftarrow \text{GGT}(4a^3 + 27b^2, N)$ ;  
**if**  $1 < g < N$  **then return**  $g$  **else if**  $g = N$  **return** „Failure“;
- 2 //Sei  $E$  die „elliptische Kurve“ über  $\mathbb{Z}_N$  mit Koeffizienten  $a, b$ //  
 Berechne die Primzahlen  $p_1 = 2 < \dots < p_h \leq B$ ;  
 $P \leftarrow (u, v)$ ;  $Q \leftarrow P$ ;  $t \leftarrow 1$ ;
- 3 **for**  $1 \leq j \leq h$  **do**  
 $e_j \leftarrow \lfloor \log_{p_i}(C * 2\sqrt{C} + 1) \rfloor$ ;  
**for**  $0 \leq r < e_j$  **do** //Invarianten:  $t = p_i^j \prod_{1 \leq r \leq i} p_r^{e_r}$  und  $Q = tP$ //
- 4 Versuche  $p_i Q$  in  $E$  über  $\mathbb{Z}_N$  zu berechnen;  
**if** ein Zähler  $w$  Nullteiler in  $\mathbb{Z}_N$  **then return**  $\text{GGT}(w, N)$   
**else**  $Q \leftarrow p_i Q$ ;  $t \leftarrow p_i t$ ;
- 5 **return** „Failure“

## Analyse von Lenstra's Faktorisierungsalgorithmus

- ▶ Benötigt wird:  $E \bmod p$  ist elliptische Kurve für jeden Primteiler  $p \mid N$ .  $E$  ist i.A. keine Gruppe mit  $+$  definiert durch die Gleichungen, d.h die rationalen Ausdrücke müssen nicht  $\bmod N$  wohldefiniert sein.
- ▶ Sei  $p \mid N$  prim, dann  $p \nmid 4a^3 + 27b^2$ , da sonst Ausgang in 1. Sei  $E_p$  die Reduktion von  $E \bmod p$ , d.h. die elliptische Kurve über  $\mathbb{Z}_p$  mit Koeffizienten  $a, b \bmod p$ . Zu  $P \in E$  sei  $P_p$  der korrespondierende Punkt  $P \bmod p$ .  $O_p$  korrespondiert zu  $O$  und für alle  $P \in E \setminus \{O\}$  gilt  $P_p \neq O_p$ .
- ▶ Bis der Teiler  $p$  in Schritt 4 gefunden wird ( $p \mid \text{GGT}(w, N)$ ), implementieren die Berechnungen die Arithmetik von  $E_p$  in folgenden Sinn:: Ein partielles Ergebnis  $Q = tP$  in  $E$  liefert  $(\bmod p)$  das partielle Ergebnis  $Q_p = tP_p$  in  $E_p$ , d.h.  $tP_p = (tP)_p$ .
- ▶ Eine Faktorisierung wird gefunden wenn für zwei Primteiler  $p, q$  von  $N$  ein Vielfaches der Ordnung von  $P_p$  in  $E_p$  erreicht wird, der nicht Vielfaches der Ordnung von  $P_q$  in  $E_q$  ist.







## Laufzeitanalyse von Lenstra's Faktorisierungsalgorithmus

- ▶ Die Laufzeit hängt wesentlich ab von der Anzahl der Auswahlen die der Algorithmus benötigt um mit großer Wahrscheinlichkeit erfolgreich zu faktorisieren (Siehe Seite 540 vzG,G).
- ▶ **Vermutung:** Für  $x, u \in \mathbb{R}^+$  und  $d \in \mathbb{Z}$  zufällig gewählt aus Intervall  $(x - \sqrt{x}, x + \sqrt{x})$  gilt

$$\text{prob}\{d \text{ ist } x^{\frac{1}{u}} \text{ glatt}\} = u^{-u(1+o(1))}$$

- ▶ Unter der Annahme der Vermutung, kann man eine erwartete Laufzeitschranke von

$$L(p)^{\sqrt{2}+o(1)} \text{ wobei } L(p) = e^{\sqrt{\ln p \ln \ln p}}$$

zeigen. **Praxis:** Wähle  $C$  "klein" und bestimme  $B = e^{\sqrt{(\ln C \ln \ln C)/2}}$ . Verdopple  $C$  falls nicht erfolgreich.





## Public Key Cryptosysteme: Anforderungen

- ▶ Ein Cryptosystem gilt als **geknackt**, wenn es ein Boolesches Prädikat  $B(x)$  gibt - z.B. die Parität von  $x$  falls  $x$  eine Zahl ist - und ein pol. Zeit probabilistischer Algorithmus der  $B(x)$  mit einer etwas besseren Wahrscheinlichkeit als Zufallsraten berechnet. Andernfalls gilt das System als **semantisch sicher**.
- ▶ Was bedeutet ein Cryptosystem ist "hart"? **Möglichkeiten::**
  - ▶ Der Erfinder (oder niemand) kennt keinen pol. Zeit Algorithmus.
  - ▶ Falls das System geknackt wird, so wird möglicherweise ein bekanntes "harte" Problem gelöst werden.
  - ▶ Falls das System geknackt wird, so ist ein bekanntes "harte" Problem gelöst.
  - ▶ Falls das System geknackt wird, so ist eine pol. Zeit Lösung für ein **NP-vollständiges** Problem gefunden.
  - ▶ Es gibt nachweisbar keinen (prob.) pol. Zeit Algorithmus wie oben.









# Das Diffie-Hellman Schlüsselaustauschprotokoll (1976)

- ▶ **Zweck:** Protokoll zum Austausch von Schlüsseln zum Versenden von Nachrichten mit einem symmetrischen Cryptosystem.
- ▶ sei  $q \in \mathbb{N}$  eine große Primzahlpotenz (etwa 1000 bits) und  $g$  ein Erzeuger (Generator) von  $\mathbb{F}_q^\times$ . Dann ist  $\mathbb{F}_q^\times$  isomorph zur additiven (zyklischen) Gruppe  $\mathbb{Z}_{q-1}$  via  $g^i \longleftrightarrow i$ .
- ▶ Das Protokoll arbeitet wie folgt:
  - ▶ Alice und Bob einigen sich auf  $q$  und  $g$  die öffentlich sein können.
  - ▶ Alice wählt für sich  $a \in \mathbb{Z}_{q-1}$ , berechnet und sendet  $u = g^a \in \mathbb{F}_q^\times$  an Bob.
  - ▶ Bob wählt für sich  $b \in \mathbb{Z}_{q-1}$ , berechnet und sendet  $v = g^b \in \mathbb{F}_q^\times$  an Alice.
  - ▶ Alice und Bob berechnen  $v^a = g^{ab} = u^b$  und benützen dies als gemeinsamen Schlüssel.



# Das ElGamal Cryptosystem

- ▶ Wie groß  $\mathbb{F}_q^\times$  und  $g$  Generator.
- ▶ Um Nachrichten von Bob zu erhalten wählt Alice zufällig  $S = b \in \mathbb{Z}_{q-1}$  als ihr geheimer Schlüssel und gibt  $K = (q, g, g^b)$  als ihr öffentlicher Schlüssel bekannt.
- ▶ Will Bob eine Nachricht  $x$  an Alice senden, wählt er zufällig  $k \in \mathbb{Z}_{q-1}$ , berechnet  $g^k$  und  $xg^{kb}$  und sendet  $y = (u, v) = (g^k, xg^{kb})$  an Alice.
- ▶ Alice berechnet  $x = v/u^b$
- ▶ Die Berechnung von  $x$  aus  $y$  ohne Kenntnis von  $S$  ist pol Zeit äquivalent zu DH.



## Cryptosystem die auf elliptische Kurven basieren

- ▶ Die Idee ist analog zum ElGamal System, man verwendet an Stelle von  $\mathbb{F}_q^\times$  die additive Gruppe einer elliptischen Kurve  $E$  über  $\mathbb{F}_q$ .
- ▶ Die Kurve  $E$  und ein Punkt  $P \in E$  sind öffentlich. Sei  $n$  die Ordnung von  $P$  in  $E$ .
- ▶ Alice wählt zufällig  $a \in \{2, \dots, n-2\}$  und gibt  $aP$  bekannt.
- ▶ Wenn Bob eine Nachricht  $(m_1, m_2) \in \mathbb{F}_q^2$  an Alice senden, so wählt er ein zufälliges  $k$ , berechnet  $kP = (r_1, r_2)$  und  $k \cdot aP = (s_1, s_2)$  und sendet  $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (r_1, r_2, s_1 m_1, s_2 m_2) \in \mathbb{F}_q^4$  an Alice.
- ▶ Alice berechnet  $a \cdot (r_1, r_2) = a \cdot kP = (s_1, s_2)$  und berechnet die Nachricht als  $(m_1, m_2) = (s_1^{-1} y_3, s_2^{-1} y_4)$ .
- ▶ Kommerzielle Implementierung auf Chip mit  $\mathbb{F}_{2^{155}}$ .



# Inhalt Kapitel 8

## Polynomideale und Gröbner-Basen

Motivation: Buchberger's Algorithmus

Reduktionstechniken zur Lösung des Wortproblems

Termordnungen und multivariate Division mit Rest: Reduktion in

$K[x_1, \dots, x_n]$

Polynom-Reduktion

Längen von Reduktionsketten

Term-Ideale und Hilbert's Basissatz

Gröbnerbasen und S-Polynome

Buchberger's Algorithmus

Anwendungen von Gröbner Basen

Eliminationseigenschaften - Polynomgleichungen (Syzygien)

Zur Komplexität der Berechnung von  $G$ -Basen

## Motivation: Buchberger's Algorithmus

Polynomringe in mehreren Variablen. Werkzeug zur Modellierung vieler Probleme aus der (Alg)-Geometrie, Robotik (eukl. Geometrie), Invarianten, Singularitäten.

**Polynomideale:**  $\{p_1, \dots, p_k\} \subseteq R[x_1, \dots, x_n] = \mathfrak{R}$ ,  $\langle p_1, \dots, p_k \rangle_{\mathfrak{R}}$  Ideal.

**Wortproblem:**  $p \in \mathfrak{R}$  gilt  $p \in \langle p_1, \dots, p_k \rangle$ .

Gegebenenfalls **berechne Darstellung**

$$p = \sum_{i=1}^k f_i p_i \text{ mit } f_i \in \mathfrak{R}$$

**Division durch  $\langle p_1, \dots, p_k \rangle$  mit Rest:**  $p = \sum_{i=1}^k f_i p_i + \text{Rest}$ .

- ▶ Polynomideale als Kern von Homomorphismen
- ▶ Rechnen im Quotientenring



# Buchberger's Algorithmus

- ▶ z. B. in  $\mathbb{Q}[x, y, z]$ 
  - ▶  $p_1 = x^3yz - xz^2$
  - ▶  $p_2 = xy^2z - xyz$
  - ▶  $p_3 = x^2y^2 - z^2$

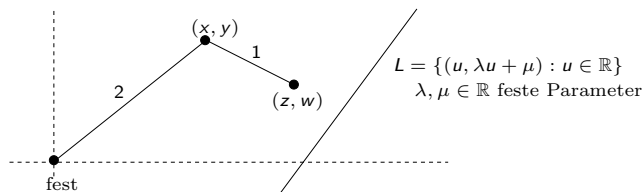
**Frage:** Liegt  $q = x^2yz - z^3 \in \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ .

Gegebenenfalls finde  $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{Q}[x, y, z]$  mit  $q = \sum_{i=1}^3 f_i p_i$ .

- ▶ Spezialfall vom  $O$ -Äquivalenzproblem:
  - $q \approx 0 \text{ mod } \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$
  - $\approx$  Kongruenz, die von  $\mathfrak{i} = \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$  induziert wird.
- ▶  $q_1 \approx_{\mathfrak{i}} q_2$  gdw  $q_1 - q_2 \in \mathfrak{i}$

# Beispiele

## 8.1 Beispiel Einfacher Roboter



- Die möglichen Positionen  $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$  des Roboters sind charakterisiert durch

$$(*) \quad x^2 + y^2 = 4$$

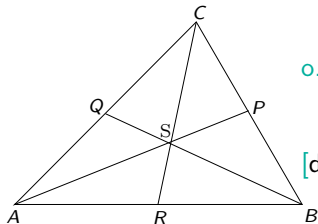
$$(z - x)^2 + (w - y)^2 = 1$$

- Frage:** Kann der Roboter die Linie erreichen?

$$(*) \text{ muss erfüllt sein und } w = \lambda z + \mu.$$

## Beispiele

**8.2 Beispiel** Euklidische Geometrie:: Die drei Medianen eines  $\Delta$  schneiden sich in einem Punkt. Schnittpunkt drittelt jedes Median.



o.B.d.A.:

$$A = (0, 0) \quad B = (1, 0)$$

$$C = (x, y) \quad x, y \in \mathbb{R}$$

[da Satz invariant unter transl, rot., Skalierung]

- ▶ d.h.  $P = ((x + 1)/2, y/2)$ ,  $Q = (x/2, y/2)$ ,  $R = (1/2, 0)$ .  
Sei  $S = (u, v)$  Schnittpunkt  $\overline{AP}$  und  $\overline{BQ}$ .

- ▶  $S$  liegt auf  $AP$  ist äquivalent zur Aussage  $\overline{AS}$  und  $\overline{AP}$  haben gleiche Steigung, d. h.

$$\frac{u}{v} = \frac{x+1}{y}$$

$$f_1 := uy - v(x + 1) = 0$$

- ▶  $S$  liegt auf  $\overline{BQ}$  analog

$$f_2 := (u - 1)y - v(x - 2) = 0$$



## Erinnerung: Grundlagen

- ▶ Sei  $F$  Körper  $R = F[x_1, \dots, x_n]$  Polynomring in  $n$ -Variablen.  
 $f_1, \dots, f_s \in R$ . Die Polynome  $f_1, \dots, f_s$  erzeugen Ideal  $I$ .

$$I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle = \left\{ \sum_{1 \leq i \leq s} q_i f_i : q_i \in R \right\}$$

$$\begin{aligned} V(I) &:= \{u \in F^n : f(u) = 0 \text{ für alle } f \in I\} && \text{Die Varietät} \\ &= \{u \in F^n : f_1(u) = \dots = f_s(u) = 0\} && \text{von } I. \end{aligned}$$

- ▶ Schreibe  $V(f_1, \dots, f_s)$  statt  $V(\langle f_1, \dots, f_s \rangle)$ .
- ▶ Fragen über Varietäten bzw.  $I$ :
  - ▶ Ist  $V(I) \neq \emptyset$ ?
  - ▶ Ist  $V(I)$  endlich?
  - ▶ Wortproblem:  $f \in R$  gilt  $f \in I$ .
  - ▶ Trivialitätsproblem: Gilt  $I = R$ ?











## Beispiel (Forts.)

- ▶ Sei  $h^* = x^2 + y^2 - 5x - 5y + 11 \in \mathbb{C}[x, y]$ .

$V(h^*) \cap \mathbb{R}^2$  ist Kreis mit Mittelpunkt  $(5/2, 5/2)$  und größerem Radius als der von  $V(h) \cap \mathbb{R}^2$ , enthält somit keine Punkte aus  $V(I)$ . D. h.  $h^* \notin I$ .

Es gilt  $-f - g - h^* = 1$  in  $\mathbb{C}[x, y]$ .

Also  $\langle f, g, h^* \rangle = \mathbb{C}[x, y]$  und somit  $V(f, g, h^*) = \emptyset$ .

Da jede gemeinsame Wurzel von  $f, g, h$  auch Nullstelle von 1 wäre.

Hilberts Nullstellensatz besagt genau dies:

$V(J) = \emptyset \rightsquigarrow 1 \in J$  (dies gilt über alg. abg. Körper) aber nicht über  $\mathbb{R}$  wie Beispiel i) zeigt.

- ▶ Studium der Varietäten + Eigenschaften: alg. Geometrie.  
Gröbner Basen (oder Standard Basen Hironaka) sind spezielle Idealbasen für die viele der obigen Fragen leicht zu lösen sind.

## Erinnerung: Grundlagen

- ▶ Der Fall  $n = 1$ , d. h.  $F[x]$  ist leicht da  $F[x]$  euklidischer Bereich ist (und somit **PID Hauptidealring**),  
d. h.  $\langle f_1, \dots, f_s \rangle = \langle \text{GGT}(f_1, \dots, f_s) \rangle$ , d. h. o.B.d.A.  $s = 1$ .
  - ▶  $f, g \in F[x]$ ,  $f = qg + r$  mit  $\text{grad } r < \text{grad } g$ . Dann
  - ▶  $f \in \langle g \rangle$  gdw  $r = 0$  und
  - ▶  $V(g) = \{u_1, \dots, u_s\}$ , falls  $x - u_1, \dots, x - u_d$  die verschiedenen linearen Faktoren von  $g$  in  $F[x]$  sind.

### Beachte:

$\langle f_1, \dots, f_s \rangle = \langle \text{GGT}(f_1, \dots, f_s) \rangle$  ist nicht mehr gültig für  $F[x, y]$ . z. B.  
 $\text{GGT}(x, y) = 1$  in  $F[x, y]$  aber  $\langle x, y \rangle \neq \langle 1 \rangle = F[x, y]$   
 $(F[x, y]$  ist nicht euklidisch  $\nexists p, q \quad p \cdot x + q \cdot y = 1)$ .

- ▶ Gröbner Basen erlauben es einige der Eigenschaften zu erhalten (Division mit Rest).
- ▶ Erinnerung Reduktionstechniken.







## Reduktionstechniken zur Lösung des Wortproblems (Forts.)

► Standardbegriffe für  $\rightarrow$  Reduktionsrelation:

- $x \rightarrow$   $x$  ist reduzibel d. h.  $\exists y : x \rightarrow y$
- $\underline{x}$   $x$  ist irreduzibel oder in Normalform
- $x \downarrow y$  ( $x \uparrow y$ )  $x, y$  haben gemeinsamen direkten Nachfolger / Vorgänger, d.h.  

$$\exists z : x \rightarrow z \leftarrow y \quad / \quad x \leftarrow z \rightarrow y$$
- $x$  ist eine  $\rightarrow$ -Normalform von  $y$  gdw  $y \rightarrow^* \underline{x}$

### Wichtige Eigenschaften von $\rightarrow$ :

► **Noethersch:**

Jede Reduktionsfolge terminiert  
 d. h. es gibt keine  $\infty$  Folge  $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots$

- **Church Rosser**  $a \xrightarrow{*} b \rightsquigarrow a \downarrow_* b$
- **konfluent**  $a \uparrow^* b \rightsquigarrow a \downarrow^* b$
- **lokal-konfluent**  $a \uparrow b \rightsquigarrow a \downarrow^* b$





## Reduktionstechniken: Beispiel (Forts.)

2)  $I$  ideal in  $\mathbb{Q}[x, y]$  erzeugt von  $x^3 - x^2$      $x^2y - x^2$

→ Def. auf  $\mathbb{Q}[x, y]$ : Jedes "Vorkommen" von  $x^3$  oder  $x^2y$  kann durch  $x^2$  ersetzt werden.

**Behauptung:**  $\rightarrow$  ist noethersch + Church Rosser.

### 8.6 Satz

a)  $\rightarrow$  Church Rosser gdw  $\rightarrow$  konfluent.

b) **Newman Lemma.** Sei  $\rightarrow$  noethersch:  
 $\rightarrow$  konfluent gdw  $\rightarrow$  lokal konfluent.

▶ Verbunden unterhalb.



## Termordnungen

**8.7 Definition** Eine **Termordnung** auf  $T(X)$  ist eine Relation  $\prec$  auf  $\mathbb{N}^n$  mit

- i)  $\prec$  ist totale Ordnung.
- ii)  $\alpha \prec \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \prec \beta + \gamma$  für alle  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$   
( $s \prec t \Rightarrow su < tu$  für alle  $s, t, u \in T(X)$  kompatibel mit Multiplikation)
- iii)  $\prec$  ist Wohlordnung

!(insbesondere  $1 = x_1^0 \cdots x_n^0 \prec t$  für alle  $t \in T(X) \setminus \{1\}$ !).

- ▶ Falls i) gilt so ist iii) äquivalent zu, es gibt keine  $\infty$ -fallende Ketten.
- ▶  $n = 1$  Standard Ordnung auf  $\mathbb{N}$  ist die übliche Grad Ordnung auf  $T(X)$ .

## Beispiel: Termordnungen

### 8.8 Beispiel 3 Standard Termordnungen

#### i) Lexikographische Ordnung

- $\alpha \prec_{lex} \beta$  gdw erste nicht Null-Eintrag in  $\alpha - \beta$  ist negativ (von links).  
(Entspricht Präzedenz  $x_1 \succ x_2 \succ \dots \succ x_n$ ).
- $n = 3$     $\alpha_1 = (0, 4, 0)$     $\alpha_2 = (1, 1, 2)$     $\alpha_3 = (1, 2, 1)$     $\alpha_4 = (3, 0, 0)$ .  
Dann  $\alpha_1 \prec_{lex} \alpha_2 \prec \alpha_3 \prec \alpha_4$ .

#### ii) Graduierte lexikographische Ordnung:

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$$

- $\alpha \prec_{grlex} \beta$  gdw  $\sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i < \sum_{1 \leq i \leq n} \beta_i$  oder  $\left( \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i = \sum_{1 \leq i \leq n} \beta_i \wedge \alpha \prec_{lex} \beta \right)$   
(oft noch mit Gewichtsfunktion  $W : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ).
- Es gilt  $\alpha_4 \prec_{grlex} \alpha_1 \prec_{grlex} \alpha_2 \prec_{grlex} \alpha_3$ .

## Beispiel: Termordnungen (Fort.)

### iii) Graduierte inverse lexikographische Ordnung:

- $\alpha \prec_{grevlex} \beta$  gdw  $\sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i < \sum_{1 \leq i \leq n} \beta_i$  oder  
 $(\sum \alpha_i = \sum \beta_i \wedge$  am weitesten rechts stehende  
 nicht Null-Eintrag in  $\alpha - \beta$   
 ist positiv).

- Es gilt  $\alpha_4 \prec_{grevlex} \alpha_2 \prec_{grevlex} \alpha_3 \prec_{grevlex} \alpha_1$ .

$$\hookrightarrow n = 1 \quad \prec_{lex} = \prec_{grlex} = \prec_{grevlex}.$$

$$\hookrightarrow f = 4xyz^2 + 4x^3 - 5y^4 + 7xy^2z \in \mathbb{Q}[x, y, z]$$

$$lex : 4x^3 + 7xy^2z + 4xyz^2 - 5y^4$$

$$grlex : 7xy^2z + 4xyz^2 - 5y^4 + 4x^3.$$



## Wichtige Begriffe für Polynome und deren Reduktion

**8.10 Definition** Sei  $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha x^\alpha \in R = K[x_1, \dots, x_n]$ ,  $f \neq 0$ .  
 $c_\alpha \in F$  (nur endlich viele  $\neq 0$ ),  $\prec$  Termordnung.

- i)  $c_\alpha x^\alpha$  ist **Monom** in  $f$  für  $c_\alpha \neq 0$       **Coeff**( $f, \alpha$ ) =  $c_\alpha$ .
- ii) Der **Multigrad** von  $f$  ist **mdeg**( $f$ ) =  $\max_{\prec} \{ \alpha \in \mathbb{N}^n : c_\alpha \neq 0 \}$
- iii) **LT**( $f$ ) :=  $x^{\text{mdeg}(f)}$  =  $\max_{\prec} \{ t \in T[X] \mid \text{Coeff}(f, t) \neq 0 \}$   
**Leitterm** (Hauptterm) von  $f$ .
- iv) **LC**( $f$ ) :=  $c_{\text{mdeg}(f)} \in F \setminus \{0\}$       **Leitkoeffizient**.
- v) **LM**( $f$ ) =  $LC(f) \cdot LT(f) \in R$       **Leitmonom**.
- vi) **Red**( $f$ ) =  $f - LM(f)$       **Redukt von  $f$** .

# Beispiel

↪  $\prec$  induziert noethersche Partialordnung  $\ll$  auf  $R$ : (Beweis!)

- ▶  $f \ll g$  gdw  $f = 0$  und  $g \neq 0$  oder
- ▶  $f \neq 0, g \neq 0 \wedge LT(f) \prec LT(g)$  oder
- ▶  $f \neq 0, g \neq 0 \wedge LT(f) = LT(g) \wedge Red(f) \ll Red(g)$

**8.11 Beispiel** Sei  $f = 4xyz^2 + 4x^3 - 5y^4 + 7xy^2z \in \mathbb{Q}[x, y, z]$

|           |                            |                              |                                |
|-----------|----------------------------|------------------------------|--------------------------------|
| $mdeg(f)$ | $\prec_{lex}$<br>(3, 0, 0) | $\prec_{grlex}$<br>(1, 2, 1) | $\prec_{grevlex}$<br>(0, 4, 0) |
| $LC(f)$   | 4                          | 7                            | -5                             |
| $LT(f)$   | $x^3$                      | $xy^2z$                      | $y^4$                          |
| $LM(f)$   | $4x^3$                     | $7xy^2z$                     | $-5y^4$                        |







b) Sei  $\prec = \prec_{lex}$ 

$$f = x^2y + xy^2 + y^2$$

$$f_1 = xy - 1$$

$$f_2 = y^2 - 1$$

|                                      | $xy - 1$ | $y^2 - 1$ | Rest |
|--------------------------------------|----------|-----------|------|
| $x^2y + xy^2 + y^2$<br>$-(x^2y - x)$ | $x$      |           |      |
| $xy^2 + x + y^2$<br>$-(xy^2 - y)$    | $y$      |           |      |
| $x + y^2 + y$<br>$-x$                |          |           | $x$  |
| $y^2 + y$<br>$-(y^2 - 1)$            |          | $1$       |      |
| $y + 1$                              |          |           |      |

$$f = (x + y) \cdot f_1 + 1 \cdot f_2 + (x + y + 1)$$

► Kein Term in  $x + y + 1$  durch ein  $LT(f_i)$  teilbar.

# Polynom-Reduktion

**procedure** Algorithmus multivariate Division mit Rest

{Eingabe: Polynome  $f, f_1, \dots, f_s \in R = F[x_1, \dots, x_n]$ ,  $F$  Körper}

{Termordnung  $\prec$  auf  $T[x]$ .}

{Ausgabe:  $q_1, \dots, q_s, r \in R$  mit  $f = q_1 f_1 + \dots + q_s f_s + r$ .}

{Kein Monom in  $r$  ist durch ein  $LT(f_1), \dots, LT(f_s)$  teilbar.}

**begin**

1  $r := 0; p := f;$

**for**  $i = 1, \dots, s$  **do**  $q_i := 0$

2 **while**  $p \neq 0$  **do**

3   **if**  $LM(f_i) \mid LM(p)$  für ein  $i \in \{1, \dots, s\}$

**then choose some such**  $i: q_i := q_i + \frac{LM(p)}{LM(f_i)}; p := p - \frac{LM(p)}{LM(f_i)} f_i;$

**else**  $r := r + LM(p); p := p - LM(p)$

4 **return**  $q_1, \dots, q_s, r$

**end**

## Polynom-Reduktion (Forts.)

**8.14 Satz** Bei Schritt 3 gelten folgende Invarianten

- i)  $\text{mdeg}(p) \preceq \text{mdeg}(f) \quad f = p + q_1 f_1 + \cdots + q_s f_s + r.$
- ii)  $q_i \neq 0 \Rightarrow \text{mdeg}(q_i f_i) \preceq \text{mdeg}(f) \quad 1 \leq i \leq s.$
- iii) Kein Term in  $r$  ist teilbar durch ein  $LM(f_i).$

- ▶ Ist  $p_j$  der Wert von  $p$  in Durchgang  $j$ , so  $p_{j+1} \prec p_j.$
- ▶ Der Algorithmus terminiert

**Frage:** Platz und Zeit Bedarf für den Algorithmus? Wovon hängen diese ab?.

# Einschrittreduktion mit einer Menge $P = \{f_1, \dots, f_s\}$

- ▶ **Einschritt Reduktionsrelation**::  $f, g, h \in K[x]$   $g \xrightarrow{f} h$   
 $g$  reduziert sich nach  $h$  mit  $f$  gdw. es gibt  $s, t \in T[X]$   
 $\text{Coeff}(g, s) = c \neq 0$   $s = \text{LT}(f)t$  (d.h.  $\text{LT}(f) \mid s$ ) und

$$h = g - \frac{c}{\text{LC}(f)} \cdot t \cdot f \quad \text{Ein „Monom“ in } g \text{ wird ersetzt}$$

- ▶  $g \xrightarrow{P} h$  gdw  $\exists f_i \in P \quad g \xrightarrow{f_i} h$
- ▶  $\xrightarrow{P}^*$ ,  $\xleftarrow{P}^*$  wie üblich.
- ▶ **Beachte**: Multivariate Division mit Rest liefert ein  $r$  mit  $r \xrightarrow{P}$  irreduzibel  
 und  $g \xrightarrow{P}^* r$ . **Strategie: Left-Most-Reduktion.**
- ▶ Es gilt  $\xleftarrow{P}^* = \equiv_{\langle P \rangle}$  (Übung)



## Beispiel (Forts.)

Beachte i. Allg. **Wahl von  $i$**  mit  $HT(f_i) \mid HT(P)$ . Wähle kleinstes  $i \rightsquigarrow$  die Quotienten  $q_1, \dots, q_s$  und der Rest  $r$  sind eindeutig festgelegt, schreibe

$$r = f \operatorname{rem}(f_1, \dots, f_s) \text{ für diese Wahl.}$$

**Gewünscht wird:**

- ▶  $f \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle$  gdw  $r = f \operatorname{rem}(f_1, \dots, f_s) = 0$ 
  - ▶ Dies stimmt, falls  $s = 1$  ist.
  - ▶ Für  $s \geq 2$  für Gröbner Basen! Sonst i. Allg. nicht
- ▶ “ $\Leftarrow$ ” stimmt aber  $\Rightarrow$  nicht.

**8.16 Beispiel**  $f = xy^2 - x$ ,  $f_1 = xy + 1$ ,  $f_2 = y^2 - 1$

$$xy^2 - x \xrightarrow{f_1} -x - y = r, \quad \text{d. h. } f = yf_1 + 0f_2 + (-x - y),$$

$$\text{aber } f = 0f_1 + xf_2 + 0, \quad \text{d. h. } f \in \langle f_1, f_2 \rangle.$$



## Nachtrag: Längen von Reduktionsketten

$$x_1 > x_2 > \cdots > x_n \quad x, y, z$$

$$\langle_{lex} \quad 1 < z < z^2 < \cdots < y < yz < y^2 < \cdots < x < xz < \cdots < xy < \cdots < x^2 < \cdots$$

$$\langle_{grlex} \quad 1 < z < y < x < z^2 < yz < \dots < y^2 < xz < xy < x^2 < \dots$$

$$\langle_{grevlex} \quad 1 < z < y < x < z^2 < yz < xz < y^2 < xy < x^2 < \dots$$

$$G \subset K[x_1, \dots, x_n] = R, \quad G \text{ endlich}, \quad f \in R$$

- ▶  $K = K(G, f)$  Max. Länge einer Reduktionsfolge

$$f = h_1 \xrightarrow{G} h_2 \xrightarrow{G} h_3 \xrightarrow{G} \cdots \xrightarrow{G} h_k$$

Siehe: Dube, Mishra, Yap Report 88 Courant Institute NY University 1986  
Yap Fundamental Problems of algorithmic Algebra. Oxford.



## Längen von Reduktionsketten (Forts.)

- Seien  $d, \Delta, l, L$  mit  $d \geq l - 2 > 0$   $\Delta > L$
- $$f = x_1^\Delta x_n^L + x_1^\Delta x_n^{L-1} + \dots + x_1^\Delta x_n \quad \text{mit } G$$
- $$g_1 = x_1 - (x_2^d x_3^d \dots x_{n-1}^d)(x_n^d + x_n^{d-1} + \dots + x_n^{d-l+2})$$
- $$g_2 = x_2 - (x_3^d x_4^d \dots x_{n-1}^d)(x_n^d + x_n^{d-1} + \dots + x_n^{d-l+2})$$
- $$\vdots$$
- $$g_n = x_n^l - x_n^{l-1} - \dots - x_n$$
- $$g_{n+1} = x_n^{l-1} - x_n^{l-2} - \dots - x_n$$
- $$\vdots$$
- $$g_{n+l-2} = x_n^2 - x_n$$
- $$g_{n+l-1} = x_n - 1$$

- Reduktionsfolge, die  $\min_{<_{lex}}$  Monom zum Reduzieren wählt, hat Länge der oberen Schranke

Andere Schranken (genauere) Dube, Mishra, Yap.



## Term-Ideale und Hilbert's Basissatz

**8.17 Definition** Ein **Termideal**  $I \subseteq R = F[x_1, \dots, x_n]$  ist ein von Terme erzeugtes Ideal in  $R$ , d. h. es gibt eine Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{N}^n$  mit

$$I = \langle x^A \rangle = \langle \{x^\alpha : \alpha \in A\} \rangle$$

D.h. es wird von **Monomen** mit Koeffizienten 1 erzeugt.

**8.18 Lemma** Sei  $I = \langle x^A \rangle \subseteq R$  Termideal,  $\beta \in \mathbb{N}^n$ , dann

$$x^\beta \in I \text{ gdw } \exists \alpha \in A : x^\alpha \mid x^\beta$$

**Beweis:** “ $\Leftarrow$ ” klar, “ $\Rightarrow$ ” sei  $x^\beta \in I$ , dann

$x^\beta = \sum_{i \in E} q_i x^{\alpha_i}$  für eine endliche Menge  $E$  mit  $q_i \in R = F[x_1, \dots, x_n]$ .

Jeder Term, der in der rechten Summe vorkommt, ist teilbar durch ein  $\alpha \in A$ .  $x^\beta$  muss als Term in der rechten Seite vorkommen, also folgt die Behauptung.

## Term-Ideale und Hilbert's Basissatz (Forts.)

**8.19 Lemma** Sei  $I \subseteq R = F[x_1, \dots, x_n]$  **Termideal**,  $f \in R$ , dann sind äquivalent

- i)  $f \in I$ .
- ii) Jedes Monom von  $f$  liegt in  $I$ .
- iii)  $f$  ist eine  $F$ -Linearkombination von Terme in  $I$ .

**Beweis:**

$$i) \Rightarrow ii) \text{ nach Voraussetzung } f = \sum_{i \in E} q_i x^{\alpha_i} \quad \alpha_i \in A.$$

Jeder Term in  $f$  ist teilbar durch ein  $x^\gamma$  mit  $\gamma \in A$  also ist jedes Monom von  $f$  in  $I$ .

ii)  $\Rightarrow$  iii)  $\Rightarrow$  i) klar. (gilt sogar für beliebige Ideale).

## Term-Ideale und Hilbert's Basissatz (Forts.)

**8.20 Beispiel**  $I = \langle x^3, x^2y \rangle \subseteq \mathbb{Q}[x, y] \rightsquigarrow 3x^4 + 5x^2y^3 \in I$   
 $2x^4y + 7x^2 \notin I$ .

Die Implikation i)  $\Rightarrow$  ii) ist i. Allg. falsch. z. B.

$g = x^3 - 2xy$ ,  $h = x^2y - 2y^2 + x$ ,  $I = \langle g, h \rangle$   
 $x^2 = -yg + xh$ , dann  $x^2 \in \langle LT(I) \rangle$ ,  $x^2 \notin \langle LT(g), LT(h) \rangle$ .

**8.21 Folgerung** Gleichheit von Termidealen:  
 Zwei Termideale sind gleich gdw sie enthalten die gleichen Terme.

**8.22 Satz Dickson's Lemma**

Termideale sind endlich erzeugt, d.h. für  $A \subseteq \mathbb{N}^n$  gibt es eine endliche Teilmenge  $B \subseteq A$  mit  $\langle x^A \rangle = \langle x^B \rangle$ .

**Beweis:**  $A = \emptyset$  so klar. Sei  $A \neq \emptyset$ .

## Dickson's Lemma (Forts.)

- ▶ Betrachte  $\leq$  auf  $\mathbb{N}^n$  mit  
 $\alpha \leq \beta$  gdw  $\alpha_i \leq \beta_i, 1 \leq i \leq n$  (d. h.  $x^\alpha \mid x^\beta$ ).  
 Schreibe  $\alpha < \beta$ , falls  $\alpha \leq \beta$  und  $\alpha \neq \beta$ .
- ▶  $<$  ist Partialordnung auf  $\mathbb{N}^n$  die i.Allg. nicht total ist  $n \neq 1$ .
- ▶ Sei  $B = \{\alpha \in A : \forall \beta \in A, \beta \not< \alpha\}$  die Menge der minimalen Elemente von  $A$  bzgl.  $<$ .

Behauptung:  $B$  ist endlich,  $B \subseteq A$ ,

$$(*) \quad \forall \alpha \in A \quad \exists \beta \in B, \beta \leq \alpha$$

- ▶ Für  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  gibt es nur endlich viele  $\beta \in \mathbb{N}^n$  mit  $\beta \leq \alpha$ .  
 d.h. Es gibt keine  $\infty$  fallende Kette

$$\alpha^{(1)} > \alpha^{(2)} > \alpha^{(3)} > \dots \text{ in } \mathbb{N}^n$$

- ▶ Insbesondere folgt (\*).



## Dickson's Lemma (Forts.)

- ▶ **z. Z.**  $B$  ist endlich. **Induktion nach  $n$ .**
  - ▶  $n = 1$ , dann ist  $\lt \text{total } B = \{\text{kleinstes Element von } A\}$ .
  - ▶  $n \geq 2$ , sei  $A^* = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1} : \exists \alpha_n \in \mathbb{N} : (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in A\}$  nach Induktionvoraussetzung ist die Menge  $B^*$  der minimalen Elemente von  $A^*$  endlich.
- ▶ Für jedes  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1}) \in B^*$  wähle  $b_\beta \in \mathbb{N}$  mit  $(\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, b_\beta) \in A$  und sei  $b = \max\{b_\beta : \beta \in B^*\}$ .
- ▶ **Behauptung:**  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in B$ , so  $\alpha_n \leq b$ .
- ▶ Sei  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in A$ , dann gibt es ein minimales Element  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1}) \in B^*$  von  $A^*$  mit  $\beta \leq (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ .

## Dickson's Lemma (Forts.)

- ▶ Ist  $\alpha_n > b$ , so

$$(\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, b_\beta) \leq (\beta_1, \dots, \beta_n, b) < \alpha$$

$\alpha$  ist nicht minimal, d. h.  $\alpha_n \leq b$ .

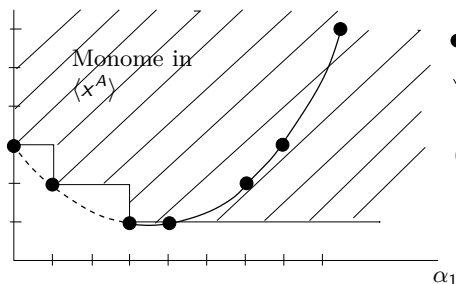
- ▶ Analog zeigt man, dass alle Komponenten beschränkt sind, es gibt nur endlich viele  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in B$ .
- ▶  $\alpha \leq \beta$  gdw  $x^\alpha \mid x^\beta \rightsquigarrow x^A \subseteq \langle x^B \rangle$  und somit  $\langle x^A \rangle \subseteq \langle x^B \rangle$ .  
 $\supseteq$  folgt aus  $B \subseteq A$ .
- ▶ Beachte: Ideale können auch in Monoiden betrachtet werden. Ideale in e.e. kommutativen Monoiden sind endlich erzeugt (als Ideal).

## Beispiel

**8.23 Beispiel**  $n = 2$ ,  $A = \{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2 : 6\alpha_2 = \alpha_1^2 - 7\alpha_1 + 18\}$

Die Menge der minimalen Elemente ist

$B = \{(0, 3), (1, 2), (3, 1)\}$ , d. h.  $\langle x^A \rangle = \langle y^3, xy^2, x^3y \rangle$

 $\alpha_2$ 

● Element von  $A$

⌋ in  $\mathbb{R}^2$

$f(\alpha_1, \alpha_2) =$

$6\alpha_2 - \alpha_1^2 + 7\alpha_1 - 18$

(Parabel)

## Folgerung

**8.24 Folgerung** Sei  $\prec$  eine totale Ordnung auf  $\mathbb{N}^n$  mit

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n, \alpha \prec \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \prec \beta + \gamma.$$

- ▶  $\prec$  ist wohlfundiert gdw  $\alpha \succeq 0$  für  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ .

**Beweis:** “ $\Leftarrow$ ”  $A \subseteq \mathbb{N}^n$ ,  $A \neq \emptyset$ ,  $I = \langle x^A \rangle \subseteq R$  ist endlich erzeugt nach Dickson's Lemma, d. h.  $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_s \in A$ :

$I = \langle x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_s} \rangle$  seien sie als  $\alpha_1 \prec \alpha_2 \prec \dots \prec \alpha_s$  geordnet.

**Behauptung**  $\min_{\prec} A = \alpha_1$ .

- ▶ Sei  $\alpha \in A$  beliebig, da  $x^\alpha \in I \exists i \leq s, \gamma \in \mathbb{N}^n : \alpha = \alpha_i + \gamma$ , d. h.  $\alpha = \alpha_i + \gamma \succeq \alpha_1 + \gamma \succeq \alpha_1 + 0 = \alpha_1 \rightsquigarrow \alpha_1 = \min_{\prec} A$ .

- ▶ D.h. die Bedingung iii) der Termordnungen kann durch (iii)\*  $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \alpha \succeq 0$  ersetzt werden.

## Notation-Beispiel

**Schreibweise:**  $G \subseteq R = F[x_1, \dots, x_n]$

$LM(G) = \{LM(g) : g \in G\}$ ,  $LT(G) = \{LT(g) : g \in G\}$

- ▶ Ist  $I \subseteq R$  ideal, dann **gibt** es eine endliche Teilmenge  $G \subseteq I$  mit  $\langle LT(G) \rangle = \langle LT(I) \rangle$  nach Dickson's Lemma.
- ▶ **Es kann aber endliche Mengen  $G$  die  $I$  erzeugen geben** mit

$$\langle LT(G) \rangle \subsetneq \langle LT(I) \rangle$$

- ▶ Beispiel:  $g = x^3 - 2xy$        $h = x^2y - 2y^2 + x$        $\prec = \prec_{grlex}$   
 $G = \{g, h\}$        $I = \langle G \rangle$        $x^2 = -yg + xh$ , d. h.  
 $x^2 \in \langle LT(I) \rangle$ , aber  $x^2 \notin \langle LT(G) \rangle = \langle x^3, x^2y \rangle$ .

## Hilbert's Basissatz

**8.25 Lemma** Sei  $I$  ideal in  $R = F[x_1, \dots, x_n]$ .

Ist  $G \subseteq I$  endlich mit  $\langle LT(G) \rangle = \langle LT(I) \rangle$ , so gilt  $\langle G \rangle = I$ .

**Beweis:** Sei  $G = \{g_1, \dots, g_s\}$   $f \in I$  beliebig.

Division mit Rest liefert

- ▶  $f = q_1g_1 + \dots + q_sg_s + r$  mit  $q_1, \dots, q_s, r \in R$ .  
Wobei  $r = 0$  oder kein Term in  $r$  ist durch  $LT(f_i)$  für ein  $i$  teilbar.
- ▶  $r = f - q_1g_1 - \dots - q_sg_s \in I \rightsquigarrow LT(r) \in LT(I) \subseteq \langle LT(G) \rangle$ .
- ▶ Wegen Lemma 8.18 folgt  $r = 0$ . Also  $f \in \langle g_1, \dots, g_s \rangle = \langle G \rangle$ .

**8.26 Satz Hilbert's Basissatz**

Jedes Ideal  $I$  in  $R = F[x_1, \dots, x_n]$  ist endlich erzeugt. **Genauer**, es gibt endliche Teilmenge  $G \subseteq I$  mit  $\langle G \rangle = I$  und  $\langle LT(G) \rangle = \langle LT(I) \rangle$ .

- ▶ Dickson's Lemma angewendet auf  $\langle LT(I) \rangle$ .







## Konfluenz von $\xrightarrow{G}$ für Gröbner Basen

**8.31 Lemma** Sei  $G$   $G$ -Basis für  $I \subseteq R$ ,  $f \in R$ .  
 Dann gibt es ein **eindeutiges Polynom**  $r \in R$  mit

- i)  $f - r \in I$ .
- ii) Kein Monom in  $r$  ist teilbar durch ein Element in  $LT(G)$ .

**Beweis:**

- **Existenz** folgt aus Algorithmus multivariate Division mit Rest.
- **Eindeutigkeit:** Angenommen  $f = h_1 + r_1 = h_2 + r_2 \quad h_1, h_2 \in I$ .  
 Kein Monom in  $r_1, r_2$  ist teilbar durch ein Element in  $LT(G)$ .  
 $r_1 - r_2 = h_2 - h_1 \in I \rightsquigarrow LM(r_1 - r_2)$  ist teilbar durch  $LT(g)$  mit  $g \in G$   
 nach Lemma 8.18  $\rightsquigarrow r_1 - r_2 = 0$ .

Konfluenz von  $\xrightarrow{G}$  für Gröbner Basen (Forts.)

- ▶ **Folgerung:** Wir können für Gröbnerbasen  $G$  schreiben  $f \text{ rem } G = r \in R$   
 $r$  ist die *einzig*e Normalform von  $f$  bzgl.  $\xrightarrow{G}$ .
- ▶  $\rightsquigarrow \xrightarrow{G}$  ist konvergent.

**8.32 Satz** Sei  $G$  Gröbner-Basis für  $I \subseteq R$  bzgl. Termordnung  $\prec$ ,  $f \in R$ .

- $f \in I$  gdw  $f \text{ rem } G = 0$  gdw  $f \xrightarrow{*G} 0$ .

**Umgekehrt:** Falls diese Eigenschaft für  $G$  gilt, so ist  $G$  eine Gröbner Basis (Beweis!).

**Beachte:** Beweis von Hilbert's Basissatz *nicht konstruktiv*, auch Dickson's Lemma liefert uns keine Konstruktion für die Menge der minimalen Elemente für  $A = \{\alpha : x^\alpha \in \langle LT(I) \rangle\}$ .



## S-Polynome: Konfluenztest (Forts.)

**8.34 Beispiel**  $g = x^3 - 2xy^2$      $h = x^2y - 2y^2 + x$      $\in \mathbb{Q}[x, y] \prec_{grlex}$

$\hookrightarrow \alpha = (3, 0), \beta = (2, 1), \gamma = (3, 1)$

•  $S(g, h) = \frac{x^3y}{x^3}g - \frac{x^3y}{x^2y}h = y(x^3 - 2xy^2) - x(x^2y - 2y^2 + x) = -x^2$

$$\begin{array}{c}
 x^3y \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \underbrace{2xy^2}_g \quad \quad \quad \underbrace{2xy^2 - x^2}_h
 \end{array}
 \quad \text{Differenz ist } -x^2$$

- ▶ Um Konfluenz auf  $\langle g, h \rangle$  zu erreichen müssen S-Polynome sich nach 0 reduzieren lassen. **Frage:** Folgt aus  $u - v \rightarrow_{\langle g, h \rangle}^* 0$  auch  $u \downarrow_{\langle g, h \rangle}^* v$
- ▶ Die Leitmonome bei Linearkombinationen können sich wegheben, dieses kann durch die S-Polynome charakterisiert werden.

## S-Polynome: Hauptlemma

**8.35 Lemma** Sei  $g_1, \dots, g_s \in R$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{N}^n$ ,  $c_1 \dots c_s \in F \setminus \{0\}$

▶  $f = \sum_{1 \leq i \leq s} c_i x^{\alpha_i} g_i \in R$  und

▶  $\delta \in \mathbb{N}^n$  mit  $\alpha_i + \text{mdeg}(g_i) = \delta$  für  $1 \leq i \leq s$  und  $\text{mdeg}(f) < \delta$   
(d. h.  $x^\delta$  ist nicht Leitterm von  $f$ ).

Dann gilt  $x^{\gamma_{ij}}$  teilt  $x^\delta$  für  $1 \leq i < j \leq s$  wobei  
 $x^{\gamma_{ij}} = \text{KGV}(LT(g_i), LT(g_j))$  und es gibt  $c_{ij} \in F$  mit

$$(*) \quad f = \sum_{1 \leq i < j \leq s} c_{ij} x^{\delta - \gamma_{ij}} S(g_i, g_j)$$

und  $\text{mdeg}(x^{\delta - \gamma_{ij}} S(g_i, g_j)) < \delta$  für alle  $1 \leq i < j \leq s$ .



# S-Polynome: Hauptlemma-Beweis

- Sei  $s \geq 2$

$$\begin{aligned} g &= f - c_1 x^{\delta - \gamma_{12}} S(g_1, g_2) \\ &= c_1 x^{\alpha_1} g_1 + c_2 x^{\alpha_2} g_2 + \sum_{3 \leq i \leq s} c_i x^{\alpha_i} g_i - c_1 x^{\delta - \gamma_{12}} \left( \frac{x^{\gamma_{12}}}{LT(g_1)} g_1 - \frac{x^{\gamma_{12}}}{LT(g_2)} g_2 \right) \\ &= c_1 \underbrace{(x^{\alpha_1} - x^{\delta - mdeg(g_1)})}_{=0} g_1 + (c_2 x^{\alpha_2} + c_1 x^{\delta - mdeg(g_2)}) g_2 + \sum_{3 \leq i \leq s} c_i x^{\alpha_i} g_i \\ &= (c_1 + c_2) x^{\alpha_2} g_2 + \sum_{3 \leq i \leq s} c_i x^{\alpha_i} g_i \end{aligned}$$

- Hierbei verwende  $\alpha_1 + mdeg(g_1) = \delta = \alpha_2 + mdeg(g_2)$ .













## Buchberger's Algorithmus: Korrektheit

**8.38 Satz** Algorithmus ist korrekt und terminierend.

**Beweis:** Es gilt stets  $\langle G \rangle = I$  (nur Elemente aus  $I$  hinzu), falls Terminierung, so korrekt.

- $G_i \subseteq G_{i+1}$ , d. h.  $\langle LT(G_i) \rangle \subseteq \langle LT(G_{i+1}) \rangle$   
aufsteigende Kette, die stabil werden muss.  
D.h., wenn  $G_i = G_{i+1}$ , so erfüllen alle  $S$  Polynome von  $G_i$ :  
 $S(\cdot, \cdot) \text{ rem } (G_i) = 0$ .
- **Frage:** Platz und Zeitbedarf, Implementierungen.

**8.39 Folgerung** Folgende Probleme sind mit  $G$ -Basen entscheidbar

- Wortproblem ( $f \in \langle G \rangle$ )
- $\langle G \rangle \subseteq \langle H \rangle$
- $\langle G \rangle = \langle H \rangle$

## Beispiel

$$f_1 = x^3 - 2xy \quad f_2 = x^2y - 2y^2 + x \in \mathbb{Q}[x, y], y < x \prec_{\text{grlex}}$$

▶  $S(f_1, f_2) = -x^2 \quad LT(S(f_1, f_2)) = -x^2 \notin \langle x^3, x^2y \rangle$

•  $f_3 := S(f_1, f_2) \text{ rem } (f_1, f_2) = -x^2.$

Dann  $S(f_1, f_2) \text{ rem } (f_1, f_2, f_3) = 0$

▶  $S(f_1, f_3) = 1f_1 - (-x)f_3 = -2xy$

$S(f_1, f_3) \text{ rem } (f_1, f_2, f_3) = -2xy =: f_4$  •

$S(f_1, f_3) \xrightarrow[*]{f_1, f_2, f_3, f_4} 0$

▶  $S(f_1, f_4) = yf_1 - (-\frac{1}{2}x^2)f_4 = -2xy^2 = yf_4 \xrightarrow[*]{} 0$

▶  $S(f_2, f_3) = 1f_2 - (-y)f_3 = -2y^2 + x$  irred.

•  $f_5 = S(f_2, f_3) \text{ rem } (f_1, \dots, f_4) = -2y^2 + x$

$\rightsquigarrow S(f_i, f_j) \text{ rem } (f_1, \dots, f_5) = 0$  für  $1 \leq i < j \leq 5,$

d. h.  $\{f_1, \dots, f_5\}$  ist Gröbner Basis.







## Eindeutigkeit reduzierter Gröbner Basen

- ▶ Seien  $G, G^*$  reduzierte Gröbner Basen für  $I$ . Dann  $LT(G) = LT(G^*)$ :  
für  $t \in LT(G) \subseteq \langle LT(G) \rangle = \langle LT(I) \rangle = \langle LT(G^*) \rangle$  gibt es  $g^* \in G^*$  mit  $LT(g^*) \mid t$  und es gibt  $g \in G$  mit  $LT(g) \mid LT(g^*) \mid t$ .  
 $G$  ist reduziert  $\rightsquigarrow LT(g) = LT(g^*) = t \rightsquigarrow LT(G) \subseteq LT(G^*)$ .  
= aus Symmetrie
- ▶ Sei  $g \in G$  und  $g^* \in G^*$  mit  $LT(g) = LT(g^*)$ . Da beide reduziert sind, ist kein Monom in  $g - g^* \in I$  reduzibel also  $g = g^*$ , d.h.  $G \subseteq G^*$  und umgekehrt.

### 8.43 Lemma Translationslemma:

$$p - q \xrightarrow{F} h \rightsquigarrow \exists p', q' : p \xrightarrow{*} p', q \xrightarrow{*} q', h = p' - q'$$

$$p - q \xrightarrow{*} 0 \rightsquigarrow \exists g : p \xrightarrow{*} g, q \xrightarrow{*} g$$

$$p \rightarrow q \rightsquigarrow tp \rightarrow tq \wedge p + h \downarrow^* q + h$$

**Frage:** Wieviele Polynome müssen hinzugenommen werden, um eine Gröbner Basis zu bekommen?

## Äquivalente Charakterisierungen für GB

### 8.44 Satz Charakterisierungssatz für Gröbner Basen bzgl. $\prec$

Sei  $G \subseteq R$  endlich  $I = \langle G \rangle$ . Dann sind äquivalent

1. (Normalform) jedes  $f \in R$  hat eindeutige  $\xrightarrow{G}$  Normalform
2. (Standard Basen)  $\langle LT(G) \rangle = \langle LT(I) \rangle$
3. (Buchberger Krit.) für alle  $f, g \in G$  gilt  $S(f, g) \xrightarrow{G}^* 0$
4. (Church Rosser)  $\xrightarrow{G}$  ist Church-Rosser, d. h.  $f \xrightarrow{G}^* g$ , so  $f \downarrow_G^* g$
5. (Extended Standard) Jedes  $f \in I$  hat eine Darstellung

$$f = \sum_{1 \leq i \leq s} q_i g_i \quad \text{mit } \text{mdeg}(f) \succeq \text{mdeg}(q_i g_i) \quad i = 1, \dots, s$$

6. (Ideal Membership) für alle  $f \in I$  gilt  $f \xrightarrow{G}^* 0$  oder  $f \text{ rem}(G) = 0$ .

## Beispiele von GB

**8.45 Beispiel**  $\{f_1, \dots, f_5\}$ , Beispiel ist Gröbner Basis

$$x^3 - 2xy, \quad x^2y - 2y^2 + x, \quad -x^2, \quad -2xy, \quad -2y^2 + x$$

↪  $\{x^2, xy, y^2 - \frac{1}{2}x\}$  ist minimale reduzierte Gröbner Basis, sie ist eindeutig bzgl.  $\prec_{\text{grlex}}$ .

**Beachte:** Bzgl. einer anderen Ordnung kann die G-Basis mehr oder weniger Polynome enthalten.

$$\text{z.B. } x \succ y : \{x - 2y^2, y^3\}$$

$$y \succ x : \{y^2 - \frac{1}{2}x, yx, x^2\}$$

**Beachte:** Termideale, Monomideale und homogene Ideale haben reduzierte Gröbner Basen, die **unabhängig** von der Ordnung sind.



# Anwendungen von Gröbner Basen

## 1. Berechnungen in Quotientenringen: $K[x_1, \dots, x_n]/I$

$$a \in R \mapsto \bar{a} = a + I \in S = R/I$$

$\bar{a}$  Restklasse von  $a$ .

- ▶ Ist  $G$  eine reduzierte  $G$ -Basis von  $I$ , so kann man als Repräsentant von  $a$  die Normalform von  $a$  bzgl.  $\xrightarrow{G}$  wählen, d. h.  $\text{rep}_G(a) = a \text{ rem } (G)$ .

Offenbar

$$\bar{a} = \bar{b} \text{ gdw } a - b \in I \text{ gdw } \text{rep}_G(a - b) = 0 \text{ gdw } \text{rep}_G(a) = \text{rep}_G(b)$$

- ▶ Arithmetik in  $S$ :

$$\bar{a} \pm \bar{b} \quad \leftrightarrow \quad \text{rep}_G(a) \pm \text{rep}_G(b)$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \quad \leftrightarrow \quad \text{rep}_G(\text{rep}_G(a) \cdot \text{rep}_G(b))$$

## Anwendungen von Gröbner Basen (Forts.)

**8.46 Lemma** Sei  $I \subseteq R = K[x_1, \dots, x_n]$ ,  $G$  Gröbnerbasis von  $I$ .

- i)  $V = R/I$  ist  $K$ -Vektorraum.
- ii)  $B = \{t \in T[X] : t = \text{rep}_G(t)\}$ . Dann ist  $\bar{B} = \{\bar{t} : t \in B\}$  eine  $K$ -Vektorraumbasis von  $V$ .
- iii)  $V$  hat endliche  $K$ -Dimension gdw  $I$  **nulldimensional**.
  - ▶ Eine Teilmenge  $S \subseteq R$  ist **nulldimensional**, falls  $\text{Zero}(S) \subseteq \bar{K}^n$ , ( $\bar{K}$  alg. Abschluss von  $K$ ) endlich ist
  - ▶ hier  $\text{Var}_{\bar{K}}(I)$  endlich. ( $S$  Ideal)

## Anwendungen von Gröbner Basen (Forts.)

**8.47 Satz**  $I \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ .

$I$  ist nulldimensional gdw für jedes  $i = 1, \dots, n$   $I \cap K[x_i] \neq \{0\}$ .

**Beweis:**

“ $\Leftarrow$ ” Sei  $0 \neq f_i \in I \cap K[x_i]$   $i = 1, \dots, n$ .

Sei  $\xi \in \text{Var}(I)$ ,  $\xi$  muss Nullstelle von  $f_i$  sein, d. h.  $\xi_i$  muss Nullstelle von  $f_i$  sein und davon gibt es nur endlich viele.  $\rightsquigarrow \text{Var}(I)$  ist endlich.

“ $\Rightarrow$ ” angenommen  $\text{Var}_{\bar{K}}(I) = \{\xi^1, \dots, \xi^m\}$  mit  $\xi^j = (\xi_1^j, \dots, \xi_n^j)$ . Da  $\xi_i^j \in \bar{K}$ , gibt es Polynome  $f_i \in K[x_i]$  mit  $f_i(\xi_i^j) = 0$  für  $j = 1, \dots, m$ , d. h.  $f_i$  ist null auf  $\text{Var}(I)$ .

Nach **Hilbert's Nullstellensatz** gibt es  $m_i \in \mathbb{N}^+$  mit  $f_i^{m_i} \in I$ , d. h.

$I \cap K[x_i] \neq \{0\}$ .

# Anwendungen von Gröbner Basen (Forts.)

**8.48 Folgerung** Sei  $G$  eine Gröbner Basis für  $I$ .

$I$  ist nulldimensional gdw für jedes  $i = 1, \dots, n$  es ein  $g_i \in G$  gibt mit  $LT(g_i) \in T[x_i]$  gdw  $V = R/I$  hat endliche  $K$ -Dimension.

**Beweis:**  $\langle LT(G) \rangle = \langle LT(I) \rangle$ , da Gröbner Basis. Für  $i = 1, \dots, k$ :

$I \cap K[x_i] \neq \{0\}$  gdw  $\langle LT(I) \rangle \cap K[x_i] \neq \{0\}$   
 gdw  $LT(G) \cap K[x_i] \neq \emptyset$   
 gdw  $B = \{t \in T[x] : t = rep_G(t)\}$  ist endlich.

**Bedingung:** " $\Rightarrow$ " klar, da  $x_i^k$ ,  $k > k_i$  reduzibel.

" $\Leftarrow$ " Ist  $I$  nicht nulldimensional, so gibt es eine Variable  $x_i$ , so dass  $x_i^l \in B$  für alle  $l \geq 0$ , d. h.  $B$  ist unendlich und  $V$  ist  $\infty$ -dimensional als  $K$ -Vektorraum.



# Beispiele

**8.49 Beispiel**  $I = \langle x^3y - 2y^2 - 1, x^2y^2 + x + y \rangle$  in  $\mathbb{Q}[x, y]$ .

- $\prec = \prec_{grlex}$  mit  $x \succ y$ .

$$GB(I, \prec) = \left\{ \underline{x^4} + x^2y - 2xy + 1, \underline{x^3y} - 2y^2 - 1, \underline{x^2y^2} + x + y, \right. \\ \left. x^2 + xy + \underline{2y^3} + y \right\}$$

- $\prec = \prec_{lex}$  mit  $y \succ x$ .

$$GB(I, \prec) = \left\{ 34y + 8x^8 - x^7 - 2x^6 - 4x^5 + 7x^3 - 35x^2 + 30x - 8, \right. \\ \left. x^9 + x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2 \right\}$$

► Dimension als  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum:

- $\{x^3, x^2, x, x^2y, xy, y^2, y, xy^2, 1\}$  irr. Terme
- $\{x^8, x^7, x^6, x^5, x^4, x^3, x^2, x, 1\}$  irr. Terme.

d.h.  $\text{DIM}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[x, y]/I) = 9$

**Übung:** Berechne Polynome in  $I \cap \mathbb{Q}[x]$  und  $I \cap \mathbb{Q}[y]$ .

## Beispiele

- Man kann auch eine Multiplikationstafel für  $B$  berechnen: für  $p, q \in B$  berechne Normalform von  $pq$  (ist dann Polynom), z. B. oben  
 $x \cdot x^3 = -x^2y + 2xy - 1$

Wortproblem für  $I$  bzw.  $\equiv_I$  Idealmembership.

Problem für e.e. Ideale  $I \subseteq R = K[x_1, \dots, x_n]$ .

Gegeben:  $f, f_1, \dots, f_m \in R$ .

Frage:  $f \in \langle f_1, \dots, f_m \rangle$  ggf. Darstellung.

Lösung: Berechne  $G$ -Basis  $G = \{g_1, \dots, g_s\}$  für  $I$ , wobei die

Darstellungen von  $g_i = \sum_{j=1}^m q_j^i f_j$  berechnet werden.

$f \in \langle f_1, \dots, f_m \rangle$  gdw  $f \text{ res}(G) = 0 +$  Darstellung in  $g_i \rightsquigarrow$  Darstellung in  $f_j$  berechnen.



## Beispiele (Forts.)

- ▶ Berechne Gröbner Basis bzgl. lex. Ordnung  $x < y < z$  liefert:

$$g_1 = 32x^7 - 216x^6 + 34x^4 - 12x^3 - x^2 + 30x + 8$$

$$g_2 = 2745y^2 - 112x^6 - 812x^5 + 10592x^4 - 61x^3 - 812x^2 + 988x + 2$$

$$g_3 = 4z - 4xy^2 - 16x^2 - 1$$

- $\rightsquigarrow \text{Var}(I)$  ist endlich.

$$g \xrightarrow[G]{*} 0 \quad , \text{ d. h. } \quad g(x, y) = 0 \quad \text{auf Var. } I.$$

- ▶ Lösung von Systemen von Polynomgleichungen

$$V = \{a \in K^n : f_1(a) = \dots = f_m(a) = 0\}$$

Fragen:  $V \neq \emptyset$ ? Gegebenenfalls finde  $a \in V$ .

$g \in K[x_1, \dots, x_n]$ , ist  $g(a) = 0$  für alle  $a \in V$ .

$\hookrightarrow$  Hilbert's Nullstellensatz, Radikal, Eliminationsmethoden.

## Eliminationseigenschaften - Polynomgleichungen

**8.51 Definition** Sei  $I \subseteq K[x_1, \dots, x_n] = R$ ,  $\text{radikal}(I)$  ist ideal in  $R$  mit:

$$f \in \text{radikal}(I) \text{ gdw } f^n \in I \text{ für ein } n \in \mathbb{N}^+$$

Schreibweise Lit:  $\sqrt{I}$  (Übung  $\sqrt{I}$  ist Ideal).

Motivation: Sei  $\mathbb{Z} \subseteq R_0 \subseteq R_1 \subseteq \mathbb{C}$  (oder alg. abg. Körper).

- ▶  $R_1^d = \mathbb{A}^d(R_1)$   $d$ -dimensionaler affiner Raum von  $R_1$ .
- ▶  $U \subseteq \mathbb{A}^d(R_1)$ ,  $f \in R_0[x_1, \dots, x_d]$ ,  $f$  verschwindet auf  $U$ , falls  $f(a) = 0$  für alle  $a \in U$ .
- $\text{Ideal}(U) \subseteq R_0[x_1, \dots, x_d]$  sei definiert durch  
 $\text{Ideal}(U) = \{f \in R_0[x_1, \dots, x_d] \mid f \text{ verschwindet auf } U\}$  ist Ideal!.
- ▶  $I = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ ,  $f_i \in R_0[x_1, \dots, x_d]$   
 $\text{Zero}_{R_1}(I) = \text{Var}_{R_1}(I) = \{a \in \mathbb{A}^d(R_1) : f_i(a) = 0, i = 1, \dots, n\}$

## Eliminationseigenschaften - Polynomgleichungen (Forts.)

- $U \mapsto \text{Ideal}(U)$  für  $U \subseteq \mathbb{A}^d(R_1)$
- $I \mapsto \text{Zero}_{R_1}(I)$  für  $I = \langle f_1, \dots, f_n \rangle \subseteq R_0[x_1, \dots, x_d]$

Algebraische Teilmengen von  $\mathbb{A}^d(R_1)$  (Zariski Topologie)

- ▶ Es gilt: für  $I \subseteq R_0[x_1, \dots, x_d]$  und  $U \subseteq \mathbb{A}^d(R_1)$ .
  - ▶  $I \subseteq \text{Ideal}[\text{Zero}_{R_1}(I)]$
  - ▶  $U \subseteq \text{Zero}_{R_1}[\text{Ideal}(U)]$
  - ▶  $\text{Zero}[\text{Ideal}[\text{Zero}(I)]] = \text{Zero}(I)$   $I \subseteq R_0[x_1, \dots, x_d]$
  - ▶  $\text{Ideal}[\text{Zero}[\text{Ideal}(U)]] = \text{Ideal}(U)$   $U \subseteq \mathbb{A}^d(R_1)$
- ▶ Schränkt man die Abbildungen auf ideale und alg. Mengen, sind sie dann **invers zueinander**?  
 Nur für ideale, die **radikal sind**, d. h.  $f^n \in I, n \geq 1 \rightsquigarrow f \in I$ .  
 Da  $\text{Ideal}(U)$  stets radikal ist.

## Hilbert's Nullstellensatz

### ► Hilberts Nullstellensatz (schwache Form)

Sei  $D$  noetherscher ZPE-Ring,  $\bar{D}$  alg. Abschluss.

Ein Ideal  $I \subseteq D[x_1, \dots, x_d]$  hat keine Nullstellen in  $\mathbb{A}^d(\bar{D})$  gdw  $I$  enthält nichtriviales Element von  $D$ .

### ► Hilberts Nullstellensatz (starke Form)

Sei  $D$  wie oben.  $I \subseteq D[x_1, \dots, x_d]$  Ideal und  $f \in D[x_1, \dots, x_d]$ .

$f$  verschwindet auf  $\text{Var}_{\bar{D}}(I)$  gdw es gibt  $m \geq 0$ ,  $0 \neq a \in D$  mit  $a \cdot f^m \in I$ .

↪ d.h.  $f \in \sqrt{I}$  (Körperfall).

↪  $f_1(\bar{x}) = 0 \wedge \dots \wedge f_m(\bar{x}) = 0 \Rightarrow f(\bar{x}) = 0$

↪  $f \in \sqrt{\langle f_1, \dots, f_m \rangle}$

## Hilbert's Nullstellensatz: Motivation

► Offenbar gilt:

- Starke Form  $\rightsquigarrow$  schwache Form.

- Schwache Form  $\rightsquigarrow$  starke Form:

Sei  $f \in D[x_1, \dots, x_d]$ ,  $f$  verschwindet auf  $\text{Var}_{\bar{D}}(I)$ .

Sei  $I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$  "Rabinowitz-Trick" neue Var.  $z$ : Setze  $g := 1 - z \cdot f$ , dann hat das Ideal  $\langle f_1, \dots, f_m, g \rangle$  keine Nullstellen, da  $g$  nicht null an den Nullstellen von  $f_1, \dots, f_m \rightsquigarrow$  es gibt  $0 \neq a \in D \cap \langle f_1, \dots, f_m, g \rangle$

$$a = \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i + \beta(1 - zf) \quad \alpha_i, \beta \in D[x_1, \dots, x_d, z]$$

- Setze  $z = 1/f \rightsquigarrow a = \sum_{i=1}^m \alpha'_i f_i$  mit  $\alpha'_i \in D(x_1, \dots, x_d)$ .  
Rationale Funktionen mit Nenner Potenz von  $f \rightsquigarrow$
- $a \cdot f^n = \sum(\alpha'_i f^{m_i}) f_i$  mit  $\alpha'_i f^{m_i} \in D[x_1, \dots, x_d]$ .



## Anwendungen von Hilbert's Nullstellensatz

### Anwendung: Radikal-Membership-Problem

- Seien  $f_1, \dots, f_m \in K[x_1, \dots, x_d]$ ,  $f \in K[x_1, \dots, x_d]$

Frage: Gilt  $f \in \sqrt{\langle f_1, \dots, f_m \rangle}$ ?

$$f \in \sqrt{\langle f_1, \dots, f_m \rangle} \quad \text{gdw} \quad f \text{ verschwindet auf } \text{Var}_K(\langle f_1, \dots, f_m \rangle)$$

$$\quad \quad \quad \text{gdw} \quad f_1(\bar{x}) = f_2(\bar{x}) = \dots = (1 - z \cdot f)(\bar{x}) = 0$$

hat keine Lösungen in  $\bar{K}^d$

$$\quad \quad \quad \text{gdw} \quad 1 \in \langle f_1, \dots, f_m, 1 - zf \rangle_{K[x_1, \dots, x_d, z]}$$

$$\text{d.h. } f \in \sqrt{\langle f_1, \dots, f_m \rangle} \quad \text{gdw} \quad 1 \in \text{GB}(f_1, \dots, f_m, 1 - zf)$$

- Frage: Gilt  $\text{Var}_{\bar{K}}(\langle f_1, \dots, f_m \rangle) = \emptyset$

Lösung: Ja, falls  $1 \in \text{GB}(f_1, \dots, f_m)$ .



# Eliminationseigenschaften: Beweis

Beweis:

“ $\supseteq$ ” klar.

“ $\subseteq$ ”  $LT(f) \in T[x_1, \dots, x_i]$  gdw  $f \in K[x_1, \dots, x_i]$ ,  
 $f \in I \cap K[x_1, \dots, x_i] \rightsquigarrow f \xrightarrow[G]{*} 0$  und die Leiterterme der Basispolynome bei  
 der Reduktion liegen in  $T[x_1, \dots, x_i]$ , d. h. diese Basispolynome liegen in  
 $G \cap K[x_1, \dots, x_i]$ .

**8.53 Folgerung** Sei  $G$   $G$ -Basis von  $I$  bzgl. der Lex Ordnung mit  
 $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ .

$I$  ist nulldimensional gdw für jedes  $i = 1, \dots, n$  gibt es ein  $g_i \in G$  mit  
 $HT(g_i) \in K[x_1, \dots, x_i] \setminus K[x_1, \dots, x_{i-1}]$ .

# Eliminationseigenschaften: Beweis (Forts.)

## Beweis:

“ $\curvearrowright$ ” klar

“ $\curvearrowleft$ ”  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \text{Var}_{\bar{K}}(I)$ . So  $g_i(\xi_1, \dots, \xi_i) = 0 \quad i = 1, \dots, n$ .

- $i = 1$      $g_1$  Polynom in einer Var.  $\rightsquigarrow$  endlich viele Nullstellen, d.h. nur endlich viele Möglichkeiten für  $\xi_1$ .
  
- **Induktiv**  $\rightsquigarrow$      $g_i(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_i) = 0$     für  $\xi_1, \dots, \xi_{i-1}$  nur endlich viele Möglichkeiten  $\rightsquigarrow$  für  $\xi_i$  nur endlich viele Möglichkeiten.

## Anwendung: Polynomgleichungen

### 8.54 Beispiel Pol. Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcll}
 f_1 :: & 4xz & -4xy^2 & -16x^2 & -1 & = 0 \\
 f_2 :: & & 2y^2z & +4x & +1 & = 0 \\
 f_3 :: & & 2x^2z & +2y^2 & +x & = 0
 \end{array}
 \quad \mathbb{Q}[x, y, z]$$

$x < y < z$

► Gröbner Basis bzgl. lex. Ordnung:

$$\begin{array}{rcll}
 g_1 = & 65z & +64x^4 & -423x^3 & +168x^2 & -354x & +104 \\
 g_2 = & 26y^2 & -16x^4 & +108x^3 & -16x^2 & +17x & \\
 g_3 = & 32x^5 & -216x^4 & +64x^3 & -42x^2 & +32x & +5
 \end{array}$$

## Anwendung: Polynomgleichungen (Forts.)

↪  $\text{Var}_{\mathbb{C}}(\langle f_1, f_2, f_3 \rangle)$  ist endlich,  $\text{DIM}_K(\mathbb{Q}[x, y, z]/I) = 10$ ,  
d. h.  $|\text{Zero}(f_1, f_2, f_3)| = 10$  (Nullstellen mit Vielfachheit zählen).

▶ Lösungen von  $g_3$  als Parameter:  $\alpha$  (5-Nullstellen)

$$\left(\alpha, \pm \frac{1}{\sqrt{26}} \sqrt{\alpha} \sqrt{16\alpha^3 - 108\alpha^2 + 16\alpha - 17}, \frac{1}{65} (64\alpha^4 - 423\alpha^3 + \dots)\right)$$

↪ Darstellung von  $\text{Var}_{\mathbb{C}}(\langle f_1, f_2, f_3 \rangle)$ .

# Beispiel: Polynomgleichungen

## 8.55 Beispiel Parametrisiertes Gleichungssystem.

$$f_1 := x_4 + b - d = 0$$

$$f_2 := x_4 + x_3 + x_2 + x_1 - a - c - d = 0$$

$$f_3 := x_3x_4 + x_1x_4 + x_1x_3 - ad - ac - cd = 0$$

$$f_4 := x_1x_3x_4 - acd = 0$$

- Parameter:  $a, b, c, d \in K$ ,  $<:: x_1 < x_2 < x_3 < x_4$

G-Basis bzgl. lex Ordnung:  $\mathbb{Q}(a, b, c, d)[x_1, x_2, x_3, x_4]$

$$g_1 = x_4 + b - d$$

$$g_2 = x_3 - \frac{b^2 - 2bd + d^2}{acd} x_1^2 - \frac{abc + abd - 2acd - ad^2 + bcd - cd^2}{acd} x_1 - a - c - d$$

$$g_3 = x_2 + \dots \quad g_4 = x_1^3 + \dots$$

Eine Wurzel von  $g_4$  ist  $\frac{-ad}{b-d}$  (?)

$$\rightsquigarrow \left( \frac{-ad}{bd}, \frac{ab + b^2 - bd}{b-d}, c, -b + d \right)$$

- Anwendungen: **Schaltungsentwurf**: Verstärker usw.





## Automatisches Beweisen in der Geometrie (Forts.)

- Die eindeutige reduzierte  $G$ -Basis ist

$$G = \left\{ uy - \frac{1}{3}xy - \frac{1}{3}y, v - \frac{1}{3}y \right\}$$

$$g_1 = -2uy - (v - y) + 2vx \quad \xrightarrow[G]{*} 0$$

$$g_2 = 3u - x - 1 \quad \text{irreduzibel d. h. } g_2 \notin \langle G \rangle$$

$$g_3 = 3v - y \quad \xrightarrow[G]{*} 0$$

- Beachte aber  $yg_2 = 3uy - xy - y \xrightarrow[G]{} 0$ , d. h.  $yg_2 \in I$

↪ d. h.  $g_2(x, y) = 0$ , falls  $(x, y) \in V(I)$  und  $y \neq 0$   
 nicht Degeneriertheitsbedingung  $y \neq 0$ .

- Nimmt man  $1 - yz$  zu  $G$  hinzu,  $z$  neue Variablen garantiert.  
 $y \neq 0$  :  $g_2 = g_2 \cdot (1 - yz) + zyg_2 \in \langle f_1, f_2, 1 - yz \rangle$













## Beweis

**Beweis** Seien  $b_1, \dots, b_{s+r}$  Polynome  $b = (b_1 \dots b_{s+r})$ .

$$\begin{aligned}
 (b \cdot Q)F &= ((b_1, \dots, b_s)(I_s - BA) + (b_{s+1} \dots b_{s+r})RA)F \\
 &= (b_1 \dots b_s)(F - \underbrace{BAF}_{=F}) + (b_{s+1} \dots b_{s+r})R \underbrace{AF}_{=G} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

↪ d.h. Jede Linearkombination der Zeilen von  $Q$  ist eine Syzygie von  $F$ .

- Sei  $H = (h_1 \dots h_s)$  eine Syzygie von  $F$ . Dann ist  $H \cdot B$  eine Syzygie von  $G$ . Für ein  $H'$  gilt dann  $H \cdot B = H' \cdot R$  und somit  $H \cdot B \cdot A = H' \cdot R \cdot A$ , d. h.  $H = H \cdot (I_s - BA) + H' \cdot R \cdot A = (H, H')Q$ , also ist  $H$  Linearkombination der Zeilen von  $Q$ .

### Lösung inhomogener Gleichungen

- ▶  $f_1 z_1 + \dots + f_s z_s = f$  Existenz gdw  $f \in \langle F \rangle$  Gröbner Basis für  $F$ ,  
 $G = A \cdot F$ ,  $f \xrightarrow[G]{*} f' \neq 0$  nicht lösbar, sonst  $f \xrightarrow[G]{*} 0$ ,  
 $g_1 h'_1 + \dots + g_m h'_m = f \iff H = (h'_1 \dots h'_m)A$  ist **partikuläre Lösung**.



## Effektive Operationen mit Idealen

Seien  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  und  $J = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$  Ideale in  $K[X]$

- ▶  $I + J := \{f + g : f \in I, g \in J\} = \langle f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_s \rangle$
- ▶  $I \cdot J := \{fg : f \in I, g \in J\} = \langle f_i g_j : 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s \rangle$
- ▶  $I \cap J := \{f : f \in I \text{ und } f \in J\} = (\langle t \rangle I + \langle 1 - t \rangle J) \cap K[X]$
- ▶  $I : J := \{f : fg \in I, \forall g \in J\} = \bigcap_{j=1, \dots, s} (I : \langle g_j \rangle)$   
wobei  $I : \langle g \rangle = \langle h_1/g, \dots, h_m/g \rangle$  mit  $I \cap \langle g \rangle = \langle h_1, \dots, h_m \rangle$
- ▶ Transformation von G-Basen bzgl. verschiedener Termordnungen (Lazard)
- ▶ GGT-Berechnung mit G-Basen (Gianni, Trager)

# Zur Komplexität der Berechnung von $G$ -Basen

Probleme:

- ▶ Ordnungen, Längen von Ketten bei Reduktion.
- ▶ Wachstum der Größen bei der Berechnung: Eingabe weniger Polynome, kleine Grade, kleine Koeffizienten: Ausgabe Polynome mit großen Graden, große Koeffizienten.

D. h. Ergebnisse können groß werden.

- ▶ Klassen  $P$ ,  $BPP$ ,  $NP$ ,  $EXPSPACE$
- $EXPSPACE$ -vollständige Probleme benötigen  $2^{2^{O(n)}}$  Zeit.  
 $IM$  (Wortproblem für Ideale über  $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_s]$ .)
- Mayr & Mayer 82:  $IM$  ist  $EXPSPACE$ -hart für allg. Ideale.
- Mayr 89,92:  $IM$  ist in  $EXPSPACE$ , d.h.  $IM$  ist vollständig.

## Zur Komplexität der Berechnung von G-Basen (Forts.)

- ▶  $f \in \langle f_1, \dots, f_m \rangle$  gdw  $f \xrightarrow[GB(f_1, \dots, f_m)]{*} 0$
- $f \xrightarrow[GB]{*} 0$  kann in EXPSPACE berechnet werden (für G-Basen).
- Entscheidungsproblem: Ist  $\{f_1, \dots, f_m\}$  Gröbner Basis ist EXPSPACE-hart.

### 8.61 Satz Kühnle, Mayr 96

Die Berechnung einer reduzierten G-Basis kann in EXPSPACE erfolgen. (Beachte EXPSPACE = DSPACE( $2^{\text{lin}}$ ) wird **nur Platz auf Arbeitsband** gemessen).

- ▶ Gleiche Ergebnisse gelten für binomial-ideale, d. h. Ideale werden durch Binome  $x^\alpha - x^\beta$  erzeugt.

## Zur Komplexität der Berechnung von $G$ -Basen (Forts.)

- ▶ **Bürgisser** (98)  $K$   $\infty$ -Körper. IM benötigt exponentielle parallele Zeit.
- ▶ Für homogene Ideale: **Mayr** 95: IM ist PSPACE-vollständig.  
Berechnung der  $G$ -Basis bleibt EXPSPACE-hart.

### Gradschranken

- ▶ **Hermann** 1926:  $f \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ ,  $f = \sum_{1 \leq i \leq s} q_i f_i$   
Grade der  $q_i$  doppeltextponentiell. Siehe auch Mayr & Mayer 82.
- ▶ Die Grade der Polynome in einer reduzierten Gröbner Basis für  $\langle f_1, \dots, f_s \rangle \subseteq F[x_1, \dots, x_n]$  sind höchstens

$$2 \left( \frac{d^2}{2} + d \right)^{2^{n-1}}$$

wobei  $\deg(f_i) \leq d$  für alle  $i$ .

## Zur Komplexität der Berechnung von $G$ -Basen (Forts.)

**Beachte:** die Schranke hängt nicht von der Anzahl der Polynome oder von den Koeffizienten ab. Sie ist polynomial im Grad und doppelt exponentiell in der Anzahl der Variablen.

- ▶ Es gibt Ideale, für die jede  $G$ -Basis mindestens  $2^{2^{cn}}$  Elemente enthält mit Elementen vom Grad mindestens  $2^{2^{c^*n}}$  ( $c, c^* \in \mathbb{R}^+$ ).
- ▶ Varietäten:  $V(f_1, \dots, f_s)$  ist leer gdw  $1 \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle$  in PSPACE.
- ▶ Für nulldimensionale Ideale einfache Exp-Schranken.  
[Lakshman \(90\)](#), [Mayr \(97\)](#) Übersicht.
- ▶ Systeme: Macaulay, Singular. Projekte: Posso Frisco.