SS 2009 22. April 2009

Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 1

Prof. Dr. Klaus Madlener Abgabe bis 29. April 2009 10:00 Uhr

1. Aufgabe: [Beziehung zwischen umgangssprachlicher und formaler Logik, 4P]
Versuchen Sie folgende umgangssprachliche Aussagen in Formeln der Aussagenlogik zu übertragen.

1. „Menschen atmen Luft."
2. „Wenn es um den Sitzplatz geht, das Alter sitzt, die Jugend steht!"
3. „Wer Banknoten nachmacht oder verfälscht oder nachgemachte oder verfälschte sich verschafft und in Verkehr bringt, wird mit Freiheitsstrafe nicht unter zwei Jahren bestraft."
4. „William Shakespeare schrieb 'Moby Dick' und Paris ist die Hauptstadt von Spanien oder Katzen jagen Mäuse."
5. „In England regnet es oft, weil England eine Insel ist."
6. „Dieser Satz hat fünf Wörter."
7. „Dieser Satz hat nicht fünf Wörter."
8. „Dieser Satz kein Verb."

Welche dieser Aussagen sind „wahr", welche „falsch"? Diskutieren Sie kurz die auftretenden Probleme.

Beispiel: Um die Aussage „Wenn ich nicht zu hause bin, kannst du mich über Mobilfunk erreichen." zu formalisieren, kann man zwei Atome

- $A \equiv$ „Ich bin zu hause." und
- $B \equiv$ „Du kannst mich über Mobilfunk erreichen."

definieren. Die obige Aussage lässt sich dann durch die Formel $(\neg A) \to B$ repräsentieren. Diese Aussage ist falsch. (Wer ist mit „Ich" und „Du" gemeint?)

2. Aufgabe: [Beziehung zwischen umgangssprachlicher und formaler Logik, 3P]
„Worin besteht das Geheimnis Ihres langen Lebens?" wurde ein 100-jähriger gefragt. „Ich halte mich streng an die folgenden Diätregeln: Wenn ich kein Bier zu der Mahlzeit trinke, dann habe ich immer Fisch. Immer wenn ich Fisch und Bier zusammen habe, verzichte ich auf Eiscreme. Wenn ich Eiscreme habe oder Bier meide, rühre ich Fisch nicht an.", antwortete er. Der Fragesteller fand diesen Ratschlag ziemlich verwirrend.

Formalisieren Sie den Diätplan mit Aussageformen und versuchen Sie eine weniger verwirrende Formulierung zu finden.

3. Aufgabe: [strukturelle Induktion, Übung]

Beweisen Sie folgende Sätze mit struktureller Induktion über den Aufbau der Aussageformen:

1. Für $A \in F$ gilt: Die Anzahl der Vorkommen von „(" ist gleich der Anzahl der Vorkommen von „)" und ist gleich der Summe der Vorkommen von $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$.
2. Jede aussagenlogische Formel enthält zumindest ein von $\neg$ verschiedenes Symbol.
3. Sei n die Anzahl der atomaren Formen von $A \in F$. Dann ist die Anzahl der Operatoren in A mindestens $n - 1$.

4. Aufgabe: [strukturelle Induktion, 4P]

Beweisen Sie den Eindeutigkeitssatz aus der Vorlesung:

Jede aussagenlogische Formel $A \in F$ ist entweder atomar oder sie lässt sich eindeutig darstellen als

$$A \equiv (\neg A_1) \text{ oder } A \equiv (A_1 * A_2)$$

mit $A_1, A_2 \in F$ und $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

Hinweis: Sie können den ersten Satz aus Aufgabe 3 benutzen.

5. Aufgabe: [Bewertung von Formeln, Übung]

Seien $p, q \in V$ aussagenlogische Variablen. Zeigen Sie durch Betrachtung aller Bewertungen:

1. $\varphi_1 = ((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p))$ ist eine Tautologie, d.h. die Formel ist für alle Belegungen erfüllt.
2. $\varphi_2 = ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$ ist erfüllbar, d.h. es gibt erfüllende Belegungen.

6. Aufgabe: [Bewertung von Formeln, 3P]

Welche der folgenden aussagenlogischen Formeln sind Tautologien, erfüllbar bzw. widerspruchsvoll, also nicht erfüllbar?

1. $\varphi_3 = (\neg(((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q))$
2. $\varphi_4 = (\neg(((\neg p) \vee q) \wedge p) \vee q)$
3. $\varphi_5 = (p \rightarrow \neg p)$
4. $\varphi_6 = ((\neg p) \vee q) \wedge ((\neg q) \vee r) \wedge ((\neg r) \vee p))$
5. $\varphi_7 = ((\neg p) \wedge q) \vee ((\neg q) \wedge r) \vee ((\neg r) \wedge p))$

Abgabe: bis 29. April 2009 10:00 Uhr im Kasten neben Raum 34/401.4