Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 10

Prof. Dr. Klaus Madlener Abgabe bis 8. Juli 2009 10:00 Uhr

49. Aufgabe: [endliche und unendliche Modelle, Übung]

1. Definieren Sie eine Formel A_n der Prädikatenlogik erster Stufe, so dass jedes Modell von A_n genau n Elemente hat. Genauer ist damit gemeint, dass in jeder Interpretation $I = (D, I_C, I_V)$, die A_n erfüllt, der Definitionsbereich D genau n Elemente hat.
2. Definieren Sie eine Formel A_∞ der Prädikatenlogik erster Stufe, so dass jedes Modell von A_∞ unendlich viele Elemente hat.

50. Aufgabe: [PKNF, PDNF, 2+2P]
Bringen Sie A_1 in PKNF und A_2 in PDNF:

$A_1 \equiv \forall x[p(x) \to q(f(b)) \vee \forall y \exists z[r(f(x), g(z)) \to (p(z) \wedge r(z, x))]]$

$A_2 \equiv \forall x \forall y[(p(x) \to q(z)) \to \exists z[r(x, z) \leftrightarrow q(x)]]$

51. Aufgabe: [Kompaktheitssatz in PL2, 4P]
Zeigen Sie, dass der Kompaktheitssatz nicht für die Prädikatenlogik 2. Stufe gilt. Hinweis: Gehen Sie von Aufgabe 49 aus und entwickeln Sie Ihre Formeln ggf. weiter.

52. Aufgabe: [Herleitungen in $\mathcal{F}$, 2+2P]
Zeigen Sie:

1. $\forall x[p(x, y)],\ y = z \vdash_{\mathcal{F}} \forall x[p(x, z)]$.
2. $\forall x[p(x) \to q(x)], \forall x[p(x)] \vdash_{\mathcal{F}} q(f(a))$

53. Aufgabe: [Korrektheit von $\mathcal{F}'$, 4+1P]

1. Zeigen Sie die Korrektheit der Generalisierungsregel.
2. In der Vorlesung wurde erwähnt, dass die Aussage $\Sigma \vdash_{\mathcal{F}'} A \rightsquigarrow \Sigma \vdash_{\mathcal{F}} A$ im Allgemeinen *nicht* gilt. Dies bedeutet, dass nicht alle logischen Folgerungen aus Σ, die in $\mathcal{F}'$ hergeleitet werden können, auch in $\mathcal{F}$ hergeleitet werden können. Warum steht dieses Ergebnis nicht im Widerspruch zur Korrektheit beider Kalküle?

54. Aufgabe: [Theorien, 3+3P]
Zeigen oder widerlegen Sie:

1. Sei M eine Theorie erster Stufe. Es gibt ein Modell I mit $I \models M$ genau dann, wenn M konsistent ist.
2. Falls T eine konsistente, nicht vollständige Theorie erster Stufe ist, dann gibt es eine Formel A, so dass $T \cup \{A\}$ und $T \cup \{\neg A\}$ beide konsistente Theorien sind.

Abgabe: bis 8. Juli 2009 10:00 Uhr im Kasten neben Raum 34/401.4