SS 2009 29. April 2009

Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 2

Prof. Dr. Klaus Madlener Abgabe bis 6. Mai 2009 10:00 Uhr

7. Aufgabe: [Logische Äquivalenz, Erfüllbarkeit, Übung]
Seien p, q, r und s aussagenlogische Variablen und A, B, C Formeln. Zeigen Sie:

1. $\{p, p \vee q, p \rightarrow s, r \rightarrow q\} \models p \rightarrow q$
2. $\{p, p \vee q, p \rightarrow s, r \rightarrow q\} \models s$
3. $A \models\!\!\dashv \neg(\neg A))$
4. $A \wedge (B \wedge C) \models\!\!\dashv (A \wedge B) \wedge C$
5. $A \wedge (B \vee C) \models\!\!\dashv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
6. $\neg(A \wedge B) \models\!\!\dashv (\neg A \vee \neg B)$ und $\neg(A \vee B) \models\!\!\dashv (\neg A \wedge \neg B)$
7. $A \rightarrow B \models\!\!\dashv (\neg A) \vee B$

Welche verschiedenen Möglichkeiten gibt es, die obigen logischen Äquivalenzen zu zeigen?

8. Aufgabe: [semantische Folgerung, 4P]
Zeigen oder widerlegen Sie:

1. $\{p \wedge q, q \rightarrow r\} \models r$
2. $\{p, p \wedge q, p \rightarrow (q \rightarrow r), q \vee \neg r,\} \models q \rightarrow r$
3. $\{p, p \wedge q, p \rightarrow r, q \wedge \neg r, r \rightarrow s, (\neg q \vee r \vee \neg s) \rightarrow p\} \models (q \rightarrow r) \wedge (p \vee (r \rightarrow r))$
4. $\{p, p \rightarrow r, r \vee \neg q\} \models p \rightarrow (q \rightarrow p)$
5. $F \models q \rightarrow p \wedge (\neg(s \wedge \neg(s \vee ((q \wedge r) \rightarrow p))))$
6. $F \models p \rightarrow \neg p$
7. $\Sigma \models p_3$ mit $\Sigma := \{A \in F | A = (p_i \rightarrow (p_{i+1} \rightarrow (\ldots \rightarrow (p_{j-1} \rightarrow p_j) \ldots)))\}$, $i, j \in \mathbb{N}$ und alle p_n atomar.

9. Aufgabe: [Deduktionstheorem, 4P]
Zeigen Sie die folgende Variante des Deduktionstheorems:

$$\{A_1, \ldots, A_n\} \models B \text{ gdw. } (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B \text{ eine Tautologie ist.}$$

10. Aufgabe: [Kompaktheitssatz, 4P]
Zeigen Sie, dass die folgende Menge erfüllbar ist:

$$\begin{aligned}\Sigma &:= \{p_1 \vee p_2, \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3, p_2 \vee p_3, \neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4, \ldots\} \\ &= \{p_i \vee p_{i+1} | i \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg p_i \vee \neg p_{i+1} \vee \neg p_{i+2} | i \in \mathbb{N}\}\end{aligned}$$

11. Aufgabe: [Kompaktheitssatz, 2P]

Sei $\Sigma \subseteq F$ eine unendliche Menge aussagenlogischer Formeln und seien $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \ldots$ erfüllbare Teilmengen von Σ, so dass für jede endliche Teilmenge $\Sigma' \subseteq \Sigma$ $\Sigma' \subseteq \Sigma_i$ für ein $i > 0$ gilt. Ist Σ erfüllbar? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Abgabe: bis 6. Mai 2009 10:00 Uhr im Kasten neben Raum 34/401.4