SS 2009 06. Mai 2009

Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 3

Prof. Dr. Klaus Madlener Abgabe bis 13. Mai 2009 10:00 Uhr

12. Aufgabe: [Substitution, Übung]
Seien $A, B, C \in F$. Ferner sei $A \models\dashv B$ und A ein Teilterm von C.

Beweisen Sie: Entsteht C' aus C durch Ersetzen ein oder mehrerer Vorkommen von A durch B, so gilt $C \models\dashv C'$.

13. Aufgabe: [vollständige Operatorenmengen, Übung]
Sei der NAND-Operator (oder auch Sheffer-Strich) | definiert durch

$$\varphi(A \mid B) := \begin{cases} 0 & \text{falls } \varphi(A) = \varphi(B) = 1 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\{|\}$ eine vollständige Operatormenge ist.

14. Aufgabe: [vollständige Operatorenmengen, 4P]
Zeigen Sie, dass $\{\neg \rightarrow\}$ eine vollständige Operatormenge ist.

15. Aufgabe: [Normalformen, 4P]
Wir definieren die konjunktive und die disjunktive Normalform (vgl. Skript S. 36ff):

- Eine aussagenlogische Formel ist in **konjunktiver Normalform (KNF)**, wenn sie eine *Konjunktion von Disjunktionen von Literalen* ist. Beispielsweise ist $A = ((p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3))$ eine Formel in KNF.
- Eine aussagenlogische Formel ist in **disjunktiver Normalform**, wenn sie eine *Disjunktion von Konjunktionen von Literalen* ist.

Kanonische Formen (**KKNF** und **KDNF**) sind dabei solche Formen, bei denen in den inneren Dis- bzw. Konjunktionen immer alle Variablen genau einmal vorkommen. Das obige Beispiel ist also eine KKNF.

Finden Sie mit Hilfe von Wertetabellen zu den folgenden Formeln äquivalente KKNF und KDNF:

$A_1 \equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \wedge (p \rightarrow q))$

$A_2 \equiv (p \rightarrow q) \vee (q \wedge \neg r) \wedge \neg p$

$A_3 \equiv (q \wedge \neg r) \wedge \neg p$

$A_4 \equiv p \leftrightarrow (q \rightarrow p)$

Sind die gefundenen Formeln minimale KNFs bzw. DNFs? Was sagen KNF und DNF einer Formel anschaulich aus?

16. Aufgabe: [syntaktischer Nachweis von Tautologien, 3P]

Gegeben seien die folgenden Regelschemata:

1. $\frac{A \vee \neg A}{true}$
2. $\frac{A \vee true}{true}$
3. $\frac{A \rightarrow \neg A}{\neg A}$
4. $\frac{(A \vee B) \vee C}{A \vee (B \vee C)}$
5. $\frac{A \vee B}{B \vee A}$
6. $\frac{A \rightarrow B}{\neg A \vee B}$

Dabei sei *true* eine aussagenlogische Konstante mit $\varphi(true) = 1$ für jede Bewertung φ.

a: Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen Tautologien sind, indem Sie mit Hilfe der obigen Regelschemata jeweils $A \vdash true$ herleiten.

1. $A_1 \equiv (p \vee q) \vee (q \rightarrow \neg q)$
2. $A_2 \equiv p \rightarrow (q \rightarrow p)$

17. Aufgabe: [Beweise in $\mathcal{F}_0$, 10P]

Beweisen Sie die Aussageformen 7, 10 und eine weitere der Formen 8, 9 oder 11 aus Beispiel 1.22 in den Folien im deduktiven System $\mathcal{F}_0$.

Abgabe: bis 13. Mai 2009 10:00 Uhr im Kasten neben Raum 34/401.4