Computeralgebra

Prof. Dr. K. Madlener

8. Juni 2010

Einführung „Computer Algebra“

- Berechnungen in algebraischen Strukturen: Monoide, Gruppen, Ringe, Polynomringe, Körper, Körpererweiterungen, Moduln, Vektorräume ...
- Lineare Algebra: Vektorräume, Matrizen, Determinanten, Gleichungssysteme.
- Analysis: Grenzwerte, Funktionen, Differentiation, Integration, Differentialgleichungen.
- Algebra: Gruppen, Ringe, Körper, Moduln, Konstruktionen: Produkte, Quotienten, Unterstrukturen.
- Zahlentheorie: Primzahlen, Faktorisierung, Kryptographie.
- Numerische Berechnungen vs. Symbolische Berechnungen.
- Computer Algebra Systeme, seit 60’er Jahren.
- Inhalt–Umriss

Moderne CA-Systeme

Derive, Macsyma, Maple, Mathematica, Reduce, Scratchpad, Mupad, Mumath, Axiom, Magma, Mathlab

Ziele:

- Breite Funktionalität
- Einfache Bedienung
- Effizienz
- Erweiterbarkeit

Probleme:

- Darstellung der Strukturen und ihrer Elemente
- Effiziente Lösungen: Darstellungsabhängig
- Effiziente Transformationen zwischen Darstellungen

Vorteile CA-Systeme

Verarbeitung großer algebraischer Berechnungen
$\rightsquigarrow$ genaue Berechnungen „fehlerfrei“

Grundoperationen: Multiplikation, Division, Addition, Substraktion, Exponentation
$\rightsquigarrow$ Arithmetik, Langzahlarithmetik

- GGT, KGV:
  Euklidischer Algorithmus (Ringe euklidisch z. B. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}[x]$)
- Faktorisierung:
  UFD (ZPE)-Ringe, Prim-Elemente (z. B. $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[x, y, z], .$)
- Klassische Algorithmen sind nicht immer effizient.
  Problem: Zwischengrößenwachstum
- Kosten arithmetischer Operatoren hängt von der Länge der Operanden ab.

Probleme bei der Implementierung von CA-Systemen

- Allgemeine Systeme: Sprachumgebung, Notationen, Ein/Ausgaben,...
- Erfordern oft spezielle Programmiersprachen und Umgebungen
- Spezielle Systeme, z. B. Gruppen oder Gröbnerbasen, können oft nicht in andere Systeme verwendet werden.
- Vielzahl algorithmischer Lösungen, Vergleich schwer.
- Analyse der Algorithmen erfordert oft tiefe mathematische Ergebnisse.
- Wahl der Implementierungs- und Programmiersprachen

Symbolische Numerische Berechnungen

1.1 Beispiel Chebyshev-Polynome. Rekursive Definition.

$$T_0(x) = 1;\ T_1(x) = x;\ T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x) \text{ für } k \geq 2.$$

Liste der Polynome: $1, x, 2x^2 - 1, 4x^3 - 3x, 8x^4 - 8x^2 + 1, \ldots$

Werte die Polynome an bestimmten Stellen aus.
Etwa für $x = 0.3$: $1, 0.3, -0.82, -0.792, 0.3448, \ldots$

Programm: Berechnung der 5 ersten Werte an einer Stelle x.

Für 0.3 sollte das Programm die Ausgabe:
$T_0[0.3] = 1.0;\ T_1[0.3] = 0.3;\ T_2[0.3] = -0.82;\ T_3[0.3] = -0.792;$
$T_4[0.3] = 0.3448$ liefern.

Standard Algorithmus in Programmiersprachen

procedure Chebyshev (input, output);
begin
var x: real; T: array[0..4] of real; n: integer;
writeln(x eingeben);
read(x);
$T[0] := 1; T[1] := x;$
for $n := 2$ **to** 4 **do**
    $T[n] := 2 \cdot x \cdot T[n-1] - T[n-2];$
for $n := 0$ **to** 4 **do**
    writeln('T'$_n[x] = T[n]$)
end.

Maple Version für Chebyshev Polynome

$T[0] := 1;$

$T[1] := x;$

for $n = 2$ **to** 4 **do**
$T[n] := \text{expand}(2 \cdot x \cdot T[n-1] - T[n-2]);$

Interne Darstellung

$$T[0] := 1$$

$$T[1] := x$$

$$T[2] := 2x^2 - 1$$
$$T[3] := 4x^3 - 3x$$
$$T[4] := 8x^4 - 8x^2 + 1$$

Externe Darstellung.

Historische Entwicklung der Case

Faktoren:

- Systeme (Programmiersprachen,HW.)
- Algorithmen (spezielle Lösungen)
- Anwendungen (Erweiterungen)

Höhere Programmiersprachen: Ende der 50er Anfang 60er.
Fortran (58), Algol (60), Lisp (61).

Systeme **1961-1966**:

- I. Slagle (MIT): Lisp-Programm SAINT (Symbolic Automatic Integration): Lösen von unbestimmten Integralen unter Ausnutzung von Heuristiken.
- J. Sammet, R. Tobey (IBM): FORMAC (Fortran-Preprozessor): Symbolisches Rechnen mit elementaren Funktionen: Polynome, rationale Funktionen,u.a.
- W.S. Brown (Bell Labs): ALPAK (in Assembler geschriebene Subroutinen für Fortran): Symbolisches Rechnen mit Polynomen und rationalen Funktionen.
- G. Collins (IBM, University of Wisconsin at Madison): PM: symbolisches Rechnen mit Polynomen.
- C. Engelman (MIT): MATHLAB (LISP-basiert): symbolisches Rechnen mit Polynomen und rationale Funktionen, erstes interaktives System.

Systeme **1966-1971**:

- J. Moses (MIT): LISP-Programm SIN (Symbolic INtegrator).
- T. Hearn (Stanford University): REDUCE (LISP-basiert, interaktiv): für physikalische Berechnungen, hohe Portabilität.
- C. Engelman (MIT):MATHLAB-68 (graphische Ausgaben).
- A.D. Hall: ALTRAN (ALgebraic TRANslator): Sprache und System für das symbolische Rechnen mit Polynomen und rationale Funktionen.
- G. Collins: SAC-1 (Symbolic and Algebraic Calculations).
- D. Barton, S. Bourne, J. Fitch (University of Cambridge): CAMAL (CAMbridge ALgebra system: für astronomische Berechnungen und für Berechnungen der allgemeinen Relativitätstheorie.
- T. Hearn: REDUCE-2: allgemeines System mit Schwerpunkt für Berechnungen in der Hochenergie-Physik, geschrieben in RLISP (ALGOL-ähnlich).

Systeme **1971-1981**:

Alle bisherigen Systeme rein experimenteller Natur, wurden auch außerhalb der Gruppe der Entwickler verwendet. Insbesondere REDUCE weite Verbreitung aufgrund der leichten Portierbarkeit.

- J. Griesmer, R. Jenks (IBM Research): SCRATCHPAD: LISP-basiert, interaktiv, beinhaltet MATHLAB-68, REDUCE-2 und SIN.
- J. Moses, W. Martin (MIT): MACSYMA: algebraische Berechnungen, Grenzwert-Berechnungen, symbolisch Integrieren, Lösen von Gleichungen.
- G. Collins, R. Loos: SAC/ALDES: Bibliothek von Modulen, die in ALDES (ALgebraic DEScription language) geschrieben sind, zusammen mit einem Übersetzer nach ANSI FORTRAN. Alle verwendeten Algorithmen waren vollständig und ausführlich dokumentiert.
- D. Stautemeyer, A. Rich (University of Hawai): muMATH: eigene Programmiersprache, lief auf PC.

Spezielle Systeme:

- I. Frick (University of Stockholm): SHEEP: Berechnungen von Tensorprodukten.
- W. Jeffreys (University of Texas at Austin): TRIGMAN: in FORTRAN geschrieben, zur Berechnung von Poisson-Reihen.
- H. Veltman (NL): SCHOONSHIP: für Berechnungen in der Hochenergie-Physik.
- V.M. Glushkov (Hiev): ANALYTIK: Implementierung in Hardware.

CASe, die portabel sind meistens C-basiert. Wegen der stark angestiegenen Rechenleistung der Computer finden CASe mehr und mehr Anwendungen und Benutzer. Insbesondere entstehen nun auch kommerzielle CASe.

Systeme **1981-1991**:

- G. Gonnet, K. Geddes (University of Waterloo): MAPLE: modulare Struktur, bestehend aus einem kleinen kompilierten Kern in C, und einer großen Library von mathematischen Subroutinen, die alle in der eigenen MAPLE Sprache geschrieben sind. Interpreter für die Kommandos, Integer und rationale Arithmetik, Polynom-Routinen und ein effizientes Speicherverwaltungssystem.
- S. Wolfram (Caltech): SMP (Symbolic Manipulation Program): in C geschrieben, Regel-basiert.
- S. Wolfram: MATHEMATICA: symbolische und numerische Berechnungen, graphische Wiedergabe (2-D und 3-D, inkl. Animation), C-basiert mit eigener Programmiersprache.
- D. Stoutemeyer, A. Rich: DERIVE: interaktiv, nicht als Programmierumgebung.
- weitere allgemeine Systeme: REDUCE 3, DOE-MACSYMA, MuPAD, AXIOM (SCRATCHPAD II).

Spezielle Systeme:

- J. Cannon (University of Sydney): CAYLEY: Gruppentheoretische Berechnungen. Mittlerweile MAGMA.
- J. Neubüser (RWTH Aachen): GAP (Group Algorithms and Programming). Mittlerweile in St. Andrews neu implementiert.
- J. Vermaseren: FORM: Berechnungen in der Hochenergie-Physik.
- A.M. Cohen: Lie: Berechnungen in Lie Algebren.
- M. Stillman: MACAULAY: Algebraische Geometrie und komm. Algebra.
- H. Cohen: PARI: Zahlentheorie.
- Greuel, Pfister (KL): SINGULAR: Gröbner Basen, Algebraische Geometrie, Singularitäten.
- COCOA (Genova) Kommutative Algebra. MAGNUS Gruppen.

Literatur

- von zur Gathen/Gerhard: Modern Computer Algebra, 1999, Cambridge University Press, ISBN 0-521-64176-4, INF 235/167 und L inf 92
- Geddes/Czapor/Labahn: Algorithms for Computer Algebra, INF 235/132, L inf 694.
- Davenport/Siret/Tournier: Computer Algebra, INF 235/116.
- Buchberger et al. (Eds.): Computer Algebra, INF 235/095.
- Mignotte: Mathematics for Computer Algebra, INF 235/126.
- Mignotte/Stefanescu: Polynomials: An Algorithmic Approach, INF 246/057.
- Winkler: Polynomial Algorithms in Computer Algebra, INF 235/132.
- Zippel: Effective Polynomial Computation, INF 246/054.
- Kreuzer, Robbiano Computational Commutative Algebra (0,1,2)

Inhalt Teil I

Einführung
- Einleitung
- Symbolische Numerische Berechnungen
- Historische Entwicklung der CASE
- Literatur

Algebraische Grundlagen: Polynome, rationale Funktionen und Potenzreihen
- Grundlagen
- ZPE (UFD)-Bereiche
- Euklidische Bereiche
- Ringkonstruktionen: Polynomring
- Ringkonstruktionen: Quotientenkörper
- Ringkonstruktionen: Potenzreihen

Grundlegende Konzepte der Algebra

Axiome:

A_1	Assoziativität:	$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
A_2	Neutrales Element:	$e \circ a = a \circ e = a$ (alle a)
A_3	Inverse:	$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$ (alle a)
A_4	Kommutativität:	$a \circ b = b \circ a$ (alle a, b)
A_5	Distributivität:	$a \circ (b + c) = (a \circ b) + (a \circ c)$
		$(a + b) \circ c = (a \circ c) + (b \circ c)$
A_6	Nullteilerfreiheit:	$a \circ b = 0 \Rightarrow a = 0$ oder $b = 0$.

Additiv neutrales Element: 0 null. Multiplikativ neutrales Element: 1 eins.

Struktur	Notation	Axiome
Gruppe	$(G; \circ, .^{-1})$	$A_1; A_2; A_3$
Abelsche Gruppe	$(G; \circ, .^{-1})$	$A_1; A_2; A_3; A_4$
Ring	$(R; +, \cdot)$	$A_1; A_2; A_3; A_4$ bzgl. $+$, $A_1; A_2$ bzgl. $\cdot$, A_5
Kommutative Ringe	$(R; +, \cdot)$	$+A_4$ bzgl. $\cdot$
Integritätsbereich	$(D; +, \cdot)$	$+A_6$
Körper	$(F; +, \cdot)$	$+A_3$ für $F \backslash \{0\}$ bzgl. $\cdot$ (A_6 folgt daraus)

Grundlegende Konzepte der Algebra

2.1 Beispiel Strukturen

$\mathbb{Z}$ Integritätsbereich, $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ Körper,
$\mathbb{Z}_n$ Ring, $n \in \mathbb{N}$, Primzahl p $\mathbb{Z}_p$ Körper, sonst kein Integritätsbereich.
Beachte: jeder endliche Integritätsbereich ist Körper.
Teilbarkeit und Faktorisierung in Integritätsbereichen

$$a, b \in D \quad a \mid b \ (a \text{ teilt } b) \ \text{gdw} \ b = ax \text{ für ein } x \in D.$$

a Teiler von b, b Vielfaches von a.
GGT (GCD) größter gemeinsamer Teiler von $a, b \in D$ ist $c \in D$ mit $c \mid a$ und $c \mid b$, wobei c Vielfaches von jedem d mit $d \mid a$ und $d \mid b$ ist.
KGV (LCM) kleinstes gemeinsames Vielfaches von $a, b \in D$ ist $c \in D$ mit $a \mid c$ und $b \mid c$, wobei c Teiler von jedem d mit $a \mid d$ und $b \mid d$ ist.
Beachte: nicht eindeutig.
Assoziierte Elemente: $a, b \in D$ sind assoziiert, falls $a \mid b \wedge b \mid a$
Einheiten: $a \in D$ ist Einheit, falls a eine multiplikative Inverse besitzt.

Grundlegende Konzepte der Algebra

2.2 Beispiel Einheiten, assoziierte Elemente:
$\mathbb{Z}$ :: Einheiten $1, -1$ $\quad$ $6, -6$ sind GGT von 18 und 30,
$6, -6$ sind assoziiert.
Assoziert sein ist Äquivalenzrelation, Klassen assoziierter Elemente.
$\mathbb{Z}$ :: $\{0\}, \{1, -1\}, \{2, -2\}, \ldots$
Auswahl von Repräsentanten aus assoziierten Klassen:$\rightsquigarrow$
Einheits-normale Elemente:: $n : D \to D$ $\quad$ $n(a)$ EN.

$\mathbb{Z}$ :: $\mathbb{N}$ als Einheits-normale Elemente
F Körper:: $0, 1$ Einheits-normal.
Einheits-normaler GGT und KGV sind dann eindeutig.

In der Regel: 0 ist EN, 1 ist EN, a, b EN, so auch ab.
Für $a \in D$, so $a = u(a)n(a)$ eindeutig, wobei $u(a)$ Einheit und $n(a)$ EN.
Diese Begriffe, geeignet angepasst, sind auch für Ringe und Halbgruppen sinnvoll.
Nullteiler: $0 \neq a \in R$ ist Nullteiler, falls $ab = 0$ für ein $0 \neq b \in D$.

ZPE (UFD)-Bereiche

Prim-Elemente (irreduzible Elemente):: $p \in D - \{0\}$ ist Prim, falls

a) p ist keine Einheit, b) $p = ab$, so a oder b Einheit.

$a, b \in D$ heißen relativ Prim (teilerfremd), falls $\mathrm{GGT}(a, b) = 1$.

Ein Integritätsbereich heißt ZPE-Ring (UFD), falls für $a \in D - \{0\}$ gilt, a ist Einheit oder a kann als (endliches Produkt) von Primelementen dargestellt werden und diese Darstellung ist eindeutig bis auf Assoziativität und Umordnung:
$a = p_1 \cdots p_n$ Primelemente p_i $1 \leq i \leq n$ und ist $a = q_1 \cdots q_m$ mit Primelemente q_i, so $m = n$ und bei geeigneter Umordnung der q_j gilt p_i ist assoziert mit q_i.
Wähle **Einheitsnormale Primelemente** : Eindeutige Primfaktorisierung:
$a = u(a) p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_n^{e_n}$ p_i Einheitsnormale Primelemente, $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$.
2.3 Satz
Ist D ein ZPE-Ring $\{a, b\} \neq \{0\}$, so existiert $\mathrm{GGT}(a, b)$ und ist eindeutig.

Polynomringe

Polynomring über R: $R[x]$

$a(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$, $a_k \in R$, $m \geq 0$, Koeffizienten a_k

Grad von $a(x)$: größtes n mit $a_n \neq 0$:: $\operatorname{grad}(a(x))$

Standardform $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_n \neq 0$: a_n Leitkoeffizient

0 Polynom: $a_k = 0$ für alle k:: $\operatorname{grad}(0) := -\infty$

Monisch, falls $a_n = 1$

Addition, Multiplikation definiert wie üblich.

Eigenschaften von $\boldsymbol{R[x]}$

i) R ist kommutativ, so auch $R[x]$, 0 add. Einheit, 1 mult. Einheit.

ii) D Integritätsbereich, so auch $D[x]$.
Einheiten sind die konstanten Polynome a_0 mit a_0 ist Einheit in D.

iii) Ist D ein ZPE-Ring, so auch $D[x]$.

Polynome mit einheitsnormalen Leitkoeffizienten heißen einheitsnormal.

Polynomringe: Beispiele

2.4 Beispiel

$\mathbb{Z}[x]$: Einheiten $1, -1$, einheitsnormale Polynome sind solche mit positiven Leitkoeffizienten.

$\mathbb{Q}[x]$: Einheiten sind konstante Polynome $(\neq 0)$. Einheitsnormale Polynome: Leitkoeffizienten 1 bzw. 0.

$\mathbb{Z}_p[x]$ p prim: wie in $\mathbb{Q}[x]$.

Beachte

$\text{grad}(a(x) + b(x)) \leq \max(\text{grad}(a(x), \text{grad}(b(x)))$
$(=$ falls $\text{grad}(a(x)) \neq \text{grad}(b(x))$

$\text{grad}(a(x) \cdot b(x)) = \text{grad}(a(x)) + \text{grad}(b(x))$

Euklidische Bereiche

2.5 Definition

Euklidischer Ring ist Integritätsbereich D mit einer Bewertung $v : D - \{0\} \to \mathbb{N}$, die folgende Eigenschaft hat:

1) für alle $a, b \in D - \{0\} : v(ab) \geq v(a)$
2) für alle $a, b \in D$ mit $b \neq 0$ gibt es $q, r \in D$: $a = bq + r$, wobei $r = 0$ oder $v(r) < v(b)$.

2.6 Beispiel

- $\mathbb{Z}$ mit $v(a) = |a|$ erfüllt 1), 2).
- F Körper $v(a) = 1$, $a \neq 0$ (r immer 0).
- $\mathbb{Q}[x]$ (allgemeiner $F[x]$ F Körper) $v(a(x)) = \text{grad}(a(x))$ erfüllt 1) + 2).

Beachte:

q (Quotient), r (Rest) in 2) müssen nicht eindeutig bestimmt sein (falls $r \neq 0$).

Euklidische Bereiche

2.7 Beispiel

$\mathbb{Z}: a = -8 \quad b = 3$, so
$-8 = 3 \cdot (-2) - 2 = 3 \cdot (-3) + 1$,
d. h. $q = -2$, $r = -2$ und $q = -3$, $r = 1$ erfüllen 2).

Vereinbarungen um Eindeutigkeit zu erreichen:

- In $\mathbb{Z}$
  a) Wähle q, r mit $r = 0$ oder $\text{sign}(r) = \text{sign}(a)$
  b) Wähle q, r mit $r = 0$ oder $\text{sign}(r) = \text{sign}(b)$
- In $F[x]$ sind q, r eindeutig. (warum?)

Euklidische Ringe sind ZPE-Ringe.
$g = \text{GGT}(a, b)$, so gibt es $s, t \in D$ mit $g = sa + tb$ (nicht eindeutig!)
s, t heißen Bezout-Koeffizienten.
Annahme: In "effektiven" Euklidischen Ringen seien zu a, b stets eindeutige q, r festgelegt und berechenbar.

Euklidischer Algorithmus

2.8 Beispiel

In $\mathbb{Z}$:: GGT-Berechnung von 126 35

$$\begin{aligned} 126 &= 3 \cdot 35 + 21 \\ 35 &= 1 \cdot 21 + 14 \\ 21 &= 1 \cdot 14 + 7 \\ 14 &= 2 \cdot 7 + 0 \end{aligned}$$

7 ist $\mathrm{GGT}(126, 35)$

Anwendung: Simplifikation rationaler Ausdrücke: $35/126 \rightsquigarrow 5/18$

Nutzen: Zahlen „klein“ halten.

Sei D euklidischer Bereich $a, b \in D$, $b \neq 0$. Seien q, r Quotient und Rest mit $a = bq + r$, wobei $r = 0$ oder $v(r) < v(b)$ setze

$$\begin{aligned} \mathrm{quo}(a, b) &= q \quad (\text{ auch } a \text{ quo } b) \text{ und} \\ \mathrm{rem}(a, b) &= r \quad (\text{ auch } a \text{ rem } b \text{ oder } a \bmod b) \end{aligned}$$

Es gilt dann $\mathrm{GGT}(a, b) = \mathrm{GGT}(b, r)$

Grundlage für Euklidischen Algorithmus

2.9 Lemma $\mathrm{GGT}(a,b) = \mathrm{GGT}(b,r)$

Beweis: Sei $a = bq + r$, dann gilt
$\mathrm{GGT}(b,r)|a$ und $|b \rightsquigarrow \mathrm{GGT}(b,r)|\ \mathrm{GGT}(a,b)$, wegen $r = a - bq$ folgt
$\mathrm{GGT}(a,b)|r$ und $|b \rightsquigarrow \mathrm{GGT}(a,b)|GGT$(b,r), d. h.
$\mathrm{GGT}(a,b)$ und $\mathrm{GGT}(b,r)$ sind assoziiert, da EN sind sie gleich.

Seien $a, b \in D$, $b \neq 0$, $v(a) \geq v(b)$.
Eine Restefolge für a, b ist definiert durch die Folge $\{r_i\}$ mit
$r_0 := a$, $r_1 := b$ und $r_i = \mathrm{rem}(r_{i-2}, r_{i-1})$, $i = 2, 3, 4 \ldots$

Es gilt $v(r_0) \geq v(r_1) > v(r_2) > v(r_3) \ldots$
Es gibt ein k mit $r_{k+1} = 0 \quad (k \leq v(b))$ und $\mathrm{GGT}(a,b) = n(r_k)$.

Procedure Euclid

procedure Euclid (a,b)
{Berechne $g = \mathrm{GGT}(a, b)$ $a, b \in D$ euklid. Bereich}
begin
$c := n(a); d := n(b);$
while $d \neq 0$ **do**
begin
$r := \mathrm{rem}(c, d);$
$c := d;$
$d := r;$
end
$g := n(c);$ **return** g
end.

Korrektheit und Terminierung folgen aus Lemma und Restefolgeneigenschaften. Komplexitätsanalyse folgt.

Erweiterter euklidischer Algorithmus (EEA)

procedure $EEA(a, b; s, t)$
$\{$Berechne $g = \mathrm{GGT}(a, b)$ und $s, t \in D$ mit $g = sa + tb\}$
begin
$c := n(a); d := n(b); c_1 := 1; d_1 := 0; c_2 := 0; d_2 := 1;$
while $d \neq 0$ **do**
begin
$q := \mathrm{quo}(c, d); r := c - q \cdot d;$
$r_1 := c_1 - q \cdot d_1; r_2 := c_2 - q \cdot d_2;$ $\{Invariante::\}$
$c := d; c_1 := d_1; c_2 := d_2;$ $\{c = c_1 n(a) + c_2 n(b) \wedge\}$
$d := r; d_1 := r_1; d_2 := r_2;$ $\{d = d_1 n(a) + d_2 n(b)\}$
end
$g := n(c);$
$s := c_1/(u(a) \cdot u(c)); t := c_2/(u(b) \cdot u(c));$ **return** $(g, s, t);$
end.

Beachte:
$n(c) = c_1 \cdot \frac{n(a)}{u(c)} + c_2 \cdot \frac{n(b)}{u(c)}$: d.h. s, t sind die Bezout-Koeffizienten.

Erweiterter euklidischer Algorithmus: Beispiel

2.10 Beispiel In $\mathbb{Z}$:: $a = 18$ $b = 30$

Wertefolge::

Iteration	q	c	c_1	c_2	d	d_1	d_2
0	–	18	1	0	30	0	1
1	0	30	0	1	18	1	0
2	1	18	1	0	12	−1	1
3	1	12	−1	1	6	3	−1
4	2	6	2	−1	0	−5	3

$g = 6,\ s = 2,\ t = -1,\ \mathrm{GGT}(18, 30) = 2 \cdot 18 - 1 \cdot 30 = 6$

Erweiterter euklidischer Algorithmus: Beispiel

In $\mathbb{Q}[x]$:: $a = 12x^3 - 28x^2 + 20x - 4$, $b = -12x^2 + 10x - 2$

$u(a) = 12$ $\qquad$ $u(b) = -12$

Iter.	q	c	c_1	c_2	d
–	–	$x^3 - \frac{7}{3}x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{1}{3}$	1	0	$x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}$
1	$x - \frac{3}{2}$	$x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}$	0	1	$\frac{1}{4}x - \frac{1}{12}$
2	$4x - 2$	$\frac{1}{4}x - \frac{1}{12}$	1	$-x + \frac{3}{2}$	0

$g = n(c) = x - \frac{1}{3}$, $s = \frac{c_1}{u(a)u(c)} = \frac{1}{12\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$

$t = \frac{-x+\frac{3}{2}}{(-12)\frac{1}{4}} = \frac{x-\frac{3}{2}}{3} = \frac{x}{3} - \frac{1}{2}$

$x - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}a + \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right) b$

Kostenanalyse von EAA für $\mathbb{Z}$ und $F[x]$

Seien $a, b \in R$ mit $n = v(a) \geq v(b) = m \geq 0$.
Die Anzahl l der Durchläufe der While-Schleife wird durch $l \leq v(b) + 1$ beschränkt. Die wesentliche Operation ist die Division mit Rest.
Diese ist l-mal durchzuführen: $l \leq v(b) + 1 = m + 1$.

Sei $R = F[x]$, F Körper, dann $v(a) = \text{grad}(a)$.
Zähle Grundoperationen (go) in F:
Kosten der Division mit Rest: Seien $\text{grad}(a) = n$, $\text{grad}(b) = m$.
Ein Durchgang der Division kostet: Eine Division, m Multiplikationen, m Additionen in F, $n - m + 1$ Durchläufe, d. h.

$$(2m + 1)(n - m + 1) = (2\ \text{grad}(b) + 1)(\text{grad}(q) + 1) \in O(n^2)$$

Operationen in F. Ist b monisch, so spart man die Division.
Sei $n_i = \text{grad}(c)$ in Durchlauf i $(0 \leq i \leq l + 1)$, wobei d in Durchlauf l Null wird. Dann gilt $n_0 = n \geq n_1 = m > n_2 > \cdots > n_l$ und $\text{grad}(q_i) = n_{i-1} - n_i$ für $1 \leq i \leq l$ (q_i Wert von q in Durchlauf i). Kosten der Division mit Rest: $(2n_i + 1)(n_{i-1} - n_i + 1)$ arithm. Operationen in F.

Kostenanalyse von EAA für $F[x]$: Kosten für s und t

Die Kosten für die r_i und q_i sind $\sum_{1\le i\le l}(2n_i+1)(n_{i-1}-n_i+1)$ Operationen in F. Normaler Fall: $n_i = n_{i-1}-1 = \cdots = m-i+1$
$2 \le i \le l = m+1 \le 2mn+2m$.

2.11 Lemma Sei s_i Wert von c_1 in Durchgang i und t_i Wert von c_2 in Durchgang i. Dann gilt

1. $\text{grad } s_i = \sum_{2\le j<i} \text{grad } q_j = n_1 - n_{i-1} \quad 2 \le i \le l+1$
2. $\text{grad } t_i = \sum_{1\le j<i} \text{grad } q_j = n_0 - n_{i-1} \quad 1 \le i \le l+1$

Beweis: Wir zeigen nur 1) und $\text{grad } s_{i-1} < \text{grad } s_i \quad (2 \le i \le l)$ durch Induktion nach i.
$i = 2$:: $s_2 = (s_0 - q_1 s_1) = 1 - q_1 \cdot 0$, $\text{grad } s_1 = -\infty < 0 = \text{grad } s_2$.
Sei $i \ge 2$ Behauptung richtig für $2 \le j \le i$, dann

$$\text{grad } s_{i-1} < \text{grad } s_i < n_{i-1} - n_i + \text{grad } s_i = \text{grad } (q_i s_i)$$

Kostenanalyse von EAA für $F[x]$: Kosten für s und t

Also grad $s_{i+1} = \text{grad}\ (s_{i-1} - q_i s_i) = \text{grad}\ q_i + \text{grad}\ s_i > \text{grad}\ s_i$
und
$\text{grad}\ s_{i+1} = \text{grad}\ q_i + \text{grad}\ s_i = \sum_{2 \le j < i} \text{grad}\ q_j + \text{grad}\ q_i = \sum_{2 \le j < i+1} \text{grad}\ q_j$

Die Berechnung $t_{i+1} = (t_{i-1} - q_i t_i)$ bzw. $s_{i+1} = (s_{i-1} - q_i s_i)$.
Multiplikation von Pol grad $n, m :\le 2(n+1)(m+1)$ Operationen.
$2(\text{grad}\ t_i + 1)(\text{grad}\ q_i + 1) + (\text{grad}\ t_{i+1} + 1)$, d. h.

$$\sum_{2 \le i \le l} 2(n_0 - n_{i-1} + 1)(n_{i-1} - n_i + 1) + (n_0 - n_i + 1)$$

Normalfall

$$\sum_{2 \le i \le m+1} 2(n - m + i - 1)2 + n - (m - i + 1) + 1 =$$

$$\sum_{2 \le i \le m+1} 5n - 5m + 5i - 4 = 5nm - 5mm + \frac{5}{2} m(m+1) + O(m)$$

Kostenanalyse für $\mathbb{Z}$: Langzahlarithmetik

Darstellung von Zahlen: Wort 64 Bits. 2^{64}-Standard Darstellung: Zahl als Feld von Wörtern. Erstes Wort für Vorzeichen und Länge des Feldes, d. h. $a \in \mathbb{Z}$

$$a = (-1)^s \sum_{0 \le i \le n} a_i 2^{64i}$$

$s \in \{0,1\}, 0 \le n+1 < 2^{63}, a_i \in \{0, \ldots, 2^{64}-1\}$.

Als Feld: $s2^{63}+n+1, a_0, \ldots, a_n$ von 64 Bit-Wörtern, z. B. $-1 : 2^{63}+1, 1$ und $1 : 1, 1$.

Bereich: $-2^{64 \cdot 2^{63}} + 1$ bis $2^{64 \cdot 2^{63}} - 1$.

Länge von a: $\lambda(a) = \lfloor \log_{2^{64}} |a| \rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{\log_2 |a|}{64} \right\rfloor + 1$.

Allgemein: Darstellung zur Basis b mit $2 \le b < \frac{|w|}{2}$, wobei $|w|$ Wortlänge ist (Multiplikation der Koeffizienten in Wort).

$a = (u_1 \ldots u_n)_b \quad 0 \le u_i < b$, d. h. $a = \sum_{i=1}^{n} u_i b^{n-i}$

$= u_n + u_{n-1} b + \cdots + u_1 b^{n-1}$ a ist n-stellig zur Basis b.

$a < b^n \rightsquigarrow a$ hat Länge $\le n$.

Langzahlarithmetik: Klassische Algorithmen

Klassische Algorithmen für: $+, -, \cdot,$ quo, Exponentation

Maß in **Grundoperationen** (go):

- Addition, Substraktion von 1-stelligen Zahlen
- Multiplikation von 1-stelligen Zahlen
- Division von 1-stelligen Zahlen

Algorithmen: Addition

A: Addition nicht negativer ganzer Zahlen zur Basis b.

Eingabe: $(u_1 \cdots u_n)_b \quad (v_1 \cdots v_n)_b$
Ausgabe: $(w_0 \cdots w_n)_b$ w_0 Übertrag mit

$$(u_0 \cdots u_n)_b + (v_1 \cdots v_n)_b = (w_0 \cdots w_n)_b$$

begin
$j := n; k := 0$ $\{k = \textit{Übertrag}\}$
while $j > 0$ **do**
begin
$w_j := (u_j + v_j + k) \bmod b;$ $\{k \in \{0, 1\}\}$
$k := \lfloor (u_j + v_j + k)/b \rfloor;$
$j := j - 1;$
end
$w_0 := k;$
end.

Korrektheit! Aufwand $\approx 2n$ go.

Algorithmen: Substraktion

S: Substraktion nicht negativer ganzer Zahlen.

Eingabe: $(u_1 \cdots u_n)_b \geq (v_1 \cdots v_n)_b$
Ausgabe: Nichtnegative Differenz: $u - v = (w_1 \cdots w_n)_b$

begin
$j := n; k := 0$
while $j > 0$ **do**
begin
$w_j := (u_j - v_j + k) \bmod b;$
$k := \lfloor (u_j - v_j + k)/b \rfloor$ $\{k \in \{0, -1\}\}$
$j := j - 1;$
end
end.

Korrektheit! Aufwand $\approx 2n$ go.

Algorithmen: Multiplikation

M: Multiplikation nicht negativer ganzer Zahlen Basis b.
Eingabe: $(u_1 \cdots u_n)_b \geq (v_1 \cdots v_m)_b$, d. h. $n \geq m$
Ausgabe: Produkt $u \cdot v = (w_1 \cdots w_{m+n})_b$

for i from 1 **to** n **do**
    $w_{m+i} := 0$; {*Initialisierung* $m+i-$ *te Stelle*}
$j := m$;
while $j > 0$ **do**
    begin
    if $v_j = 0$ **then**
        $w_j := 0$
    else
        begin
        $i := n$; $k := 0$;
        while $i > 0$ **do**
            $t := u_i v_j + w_{i+j} + k$; $w_{i+j} := t \bmod b$; $k := \lfloor t/b \rfloor$; $i := i - 1$;
        $w_j := k$;
        end
    $j := j - 1$;
    end {Korrektheit! Aufwand $\approx 3nm$ go}

Algorithmen: Motivation für Multiplikationsalg.

$$(u_1 \cdots u_n)(v_1 \cdots v_m)$$

$$\left.\begin{array}{rr} (u_1 v_m) \cdots & (u_{n-1} v_m)(u_n v_m) \\ (u_1 v_{m-1}) \cdots & (u_n v_{m-1}) \end{array}\right\} m$$

$$(u_1 v_1) \cdots (u_n v_1)$$

$$w_1 \cdots w_m w_{m+1} \qquad \cdots w_{n+m}$$

Algorithmen: Division

D: Division mit Rest nicht negativer ganzer Zahlen Basis b.
Eingabe: $(m+n)$ stellige Zahl, n stellige Zahl.
Ausgabe: $(m+1)$ stelliger Quotient, n stelliger Rest.
Reduktion auf: Division mit Rest einer $(n+1)$ stelligen Zahl u durch n-stellige Zahl v, mit $0 \leq \left\lfloor \frac{u}{v} \right\rfloor < b$.

Rest r ist jeweils kleiner als v, d. h. $rb +$ (nächste Stelle des Dividenden) als „neues“ u,
z. B.

$$\begin{array}{l} \underline{3142} : \underline{47} = \underline{66} \text{ Rest } 40 \\ \underline{282} \\ \quad 322 \\ \quad \underline{282} \\ \quad\quad 40 \end{array}$$

Algorithmen: Division

Problem
Eingabe: $u = (u_0 u_1 \cdots u_n)_b \quad v = (v_1 \cdots v_n)_b$ mit $\left\lfloor \frac{u}{v} \right\rfloor < b$ (einstellig).
Bestimme: $q = \left\lfloor \frac{u}{v} \right\rfloor$ mit $u = qv + r$, wobei $0 \leq r < v$.

Schätzung für q: $\hat{q} = \min\left(\left\lfloor \frac{u_0 b + u_1}{v_1} \right\rfloor, b - 1 \right)$ erste Stelle für q.

2.12 Lemma (Übung): Es gilt
1) $\hat{q} \geq q$
2) Für $v_1 \geq \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor$ gilt $\hat{q} - 2 \leq q \leq \hat{q}$

D: Division mit Rest nicht negativer ganzer Zahlen Basis t.

Eingabe: $u = (u_1 \cdots u_{m+n})_b \quad v = (v_1 \cdots v_n)_b$, $v_1 \neq 0, n > 1$
Ausgabe: Quotient $\left\lfloor \frac{u}{v} \right\rfloor = (q_0 \cdots q_m)_b$, Rest $u \bmod v = (r_1 \cdots r_n)_b$

Algorithmen: Division

begin

$d := \left\lfloor \frac{b}{(v_1+1)} \right\rfloor$; $\{d \in \{\lfloor b/2 \rfloor, \ldots 1\}\}$

$(u_0 \cdots u_{m+n})_b := (u_1 \cdots u_{m+n}) \cdot d; (v_1 \cdots v_n)_b := (v_1 \cdots v_n) \cdot d; \{\textit{Normierung}\}$

for j from 0 **to** m **do**

begin

if $u_j = v_1$ **then**

$\hat{q} := b - 1$

else

$\hat{q} := \left\lfloor \frac{u_j b + u_j + 1}{v_1} \right\rfloor$

while $v_2 \hat{q} > (u_j b + u_{j+1} - \hat{q} v_1) b + u_{j+2}$ **do**

$\hat{q} := \hat{q} - 1;$

if $(u_j \cdots u_{j+n})_b < \hat{q} \cdot (v_1 \cdots v_n)_b$ **then**

$\hat{q} := \hat{q} - 1;$

$(u_j \cdots u_{j+n})_b := (u_j \cdots u_{j+m})_b - \hat{q} \cdot (v_1 \cdots v_n)_b; q_j := \hat{q};$

end

$(r_1 \cdots r_n)_b := (u_{m+1} \cdots u_{m+m})_b / d;$

end.

Korrektheit! Aufwand $O(m \cdot n)$ go.

Algorithmen: Exponentation

E: Exponentation:: **Eingabe**: x Basis b, $n \in \mathbb{N}$. **Ausgabe**: x^n
Naive Lösung: n-Multiplikationen.
Durch Quadrieren: $\log n$ Multiplikationen, d. h. $x^2, x^4, x^8, \ldots$
Länge der Zahlen: $\lambda(x) = h \rightsquigarrow \lambda(x^n) = n \cdot h$

begin
$y := x; z := 1;$ $\{$*Ergebnis in* $z, y \rightsquigarrow x, x^2, x^4, \ldots\}$
while $n > 1$ **do**
begin
$m := \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor;$
if $n > 2m$ **then**
$z := zy;$
$y := yy; n := m;$
end
$z := zy;$
end.

Algorithmen: Exponentation Beispiel

x^{13}

n	13	13	6	3
m		6	3	1
y	x	x^2	x^4	x^8
z	1	x	x	x^5	x^{13}

Grundlage: Ist $n = \sum_{i=0}^{k} e_i 2^i \quad e_i \in \{0,1\}$, so

$$x^n = x^{\sum_{i=0}^{k} e_i 2^i} = \prod_{i=0}^{k} x^{e_i \cdot 2^i} = \prod_{i:e_i \neq 0} x^{2^i}$$

Anzahl der Multiplikationen:
$N = k + e_0 + e_1 + \cdots + e_k - 1 \leq 2k = 2 \log n$

Problem:
Naiver Algorithmus x^n $\quad \lambda(x)$ fest $x^i \cdot x$ kostet $c \cdot i \cdot \lambda(x)^2$
Hingegen $y \cdot y$ kostet $c \cdot \lambda(y) \cdot \lambda(y)$. D.h. es kommen größere Zahlen vor!

Algorithmen: Exponentation Analyse

$$c_{\exp}(n) \approx c \cdot \lambda(x)^2 \sum_{i=0}^{k-1} 2^{2^{i+1}} + c \cdot \lambda(x)^2 \sum_{i=1}^{k} e_i \left(\sum_{j=0}^{i-1} e_j 2^j \right) 2^i$$

$$c_{\text{naiv}}(n) \approx \tfrac{1}{2} c \cdot n^2 \cdot \lambda(x)^2 = c \cdot \lambda(x) \cdot \sum_{i=1}^{n-2} i \cdot \lambda(x)$$

d. h. $n = 2^k$

$$c_{\exp}(n) \cong \frac{4}{3} c \cdot n^2 \lambda(x)^2 \cong \frac{8}{3} c_{\text{naiv}}(n)$$

Für $n = 2^k + 2^{k-1}$
$c_{\exp}(n) \cong \frac{4}{3} c \cdot 2^{2k} \lambda(x)^2 + c \cdot 2^{2k-1} \lambda(x)^2 \simeq \frac{11}{6} c \cdot 2^k \lambda(x)^2$
$c_{\text{naiv}}(n) = \frac{9}{4} c \cdot 2^{2k} \lambda(x)^2 \simeq \frac{27}{12} c_{\exp}(n)$
Falls $x \in R$, R endlich, so können die Kosten der Multiplikation als konstant gesehen werden und exp ist erheblich schneller als naiv.
Anwendungen: Cryptographie: Kodierung und Decodierung
RSA-Methode: $y = x^n \bmod a$, $n > 10^{50}$,
Rekurrenzgleichungen, Potenzreihenentwicklungen.

GGT Kosten für $\mathbb{Z}$: $v(a) = |a|$

$a = r_0 \geq b = r_1 > r_2 > \cdots > r_l \geq 0 \qquad q_i \geq 0$ alle i
Darstellung der Zahlen z. B. 2^{64}-Standard Darstellung
Länge $\lambda(a) = \left\lfloor \frac{\log_2 |a|}{64} \right\rfloor + 1$
Verwendet man $l \leq v(b) + 1 = b + 1 \leq 2^{64\lambda(b)} \rightsquigarrow$ exp in $\lambda(b)$.
Polynomiale Schranke für l : $1 \leq i \leq l$
$r_{i-1} = q_i r_i + r_{i+1} \geq r_i + r_{i+1} > 2r_{i+1}$, d. h.
$\prod_{2 \leq i < l} r_{i-1} > 2^{l-2} \prod_{2 \leq i < l} r_{i+1}$ für $l \geq 2 \quad r_{l-1} \geq 2$ folgt
$2^{l-2} < \frac{r_1 \cdot r_2}{r_{l-1} r_l} < \frac{r_1^2}{2}$ oder $l \leq \lfloor 2 \log r_1 \rfloor + 1 \approx 128\lambda(b)$

2.13 Satz Lamé 1845
Sei $n \in \mathbb{N}^+$ und u kleinste positive Zahl, für die der EA für Eingabe u, v' n Iterationen benötigt für mindestens eine Zahl v' mit $v' \leq u$. Dann gilt $u = F_{n+1}$ und $v' = F_n$, wobei F_k k-te Fibonacci Zahl.

GGT Kosten für $\mathbb{Z}$: $v(a) = |a|$

Alle Quotienten gleich 1, z. B. $(a, b) = (13, 8)$ EA

$$
\begin{aligned}
13 &= 1 \cdot 8 + 5 \\
8 &= 1 \cdot 5 + 3 \\
5 &= 1 \cdot 3 + 2 \\
3 &= 1 \cdot 2 + 1 \\
2 &= 2 \cdot 1
\end{aligned}
$$

l für $(a, b) = (F_{n+1}, F_n)$
$\rightsquigarrow l = n - 1 \approx 1.44 \log F_n + O(1)$
für b fest und a Var gilt
im Mittel $l \approx 0.584 \log b$

Beachte: Dirichlet / Lejeune 1849 Cesaro 1881

Für zufällig gewählte Zahlen a, b gilt
$PR(\mathrm{GGT}(a, b) = 1) = \frac{6}{\pi^2} \approx 0.6079$
Verwende: $PR(p \nmid n \wedge p \nmid m) = 1 - \frac{1}{p^2}$
$\prod_p (1 - \frac{1}{p^2}) \approx \frac{6}{\pi^2}$

Aufwand für EEA über $\mathbb{Z}$

Sei $n = \lambda(a), m = \lambda(b) \rightsquigarrow O(nm)$ für EA
(Kosten der Div mit Rest $a = qb + r \quad O((\lambda(a) - \lambda(b)) \cdot \lambda(b))$ go)
Für die Bezout Koeffizienten gilt analog
$|s_i| \leq \frac{b}{r_{i-1}}$ und $|t_i| \leq \frac{a}{r_{i-1}} \qquad 1 \leq i \leq l+1$

2.14 Satz Der EEA für Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ $\lambda(a) = n \geq \lambda(b) = m$, kann mit $O(nm)$ go durchgeführt werden.

Weitere Ergebnisse und Bemerkungen siehe von zu Gathen, Gerhard bzw. Mignotte. Siehe auch Knuth Kap. 4.5.3, Bach/Shallit 4.2, 4.3.
Viele Varianten zur Berechnung vom GGT (z. B. ohne Division).
KGV Kleinste gemeinsamer Vielfache (LCM)

$$\mathrm{KGV}(a, b) = \frac{|ab|}{\mathrm{GGT}(a, b)}$$

Reduktion auf GGT-Berechnung.

Ringkonstruktionen: $R[x]$ Polynomring

R ZPE, so $R[x]$ ZPE-Ring. R euklidisch $\not\Rightarrow$ $R[x]$ euklidisch
z. B. $\mathbb{Z}[x]$ nicht euklidisch, da kein Hauptidealring (z. B. $\langle 2, x\rangle$ wird nicht von $a(x) \in \mathbb{Z}[x]$ erzeugt oder $\mathbb{Q}[x, y]$ nicht euklidisch, da kein Hauptidealring (z. B. $\langle x, y\rangle$).
Vorteile E-Ringe: Euklidischer Algorithmus für GGT Berechnung.
Anwendungen: Lösung diophantischer Gleichungen in $F[x]$: $a(x), b(x), c(y)$ gesucht $\sigma(x)$ und $\tau(x)$ mit

$$\sigma(x)a(x) + \tau(x)b(x) = c(x)$$

Lösbar für $g(x) = \mathrm{GGT}(a(x), b(x))|c(x)$. Eindeutigkeit und Schranken für die Grade von $\sigma(x), \tau(x)$ (Übung).
Zerlegung rationaler Funktionen:

$$\frac{c(x)}{a(x)b(x)} = \frac{\tau(x)}{a(x)} + \frac{\sigma(x)}{b(x)} \qquad \rightsquigarrow \text{Integration}$$

Problem: wie berechnet man GGT in $\mathbb{Z}[x]$ oder $\mathbb{Q}[x, y]$.
$\rightsquigarrow$ Pseudodivision primitiver EA.

Quotienten-Körper von Integritätsbereichen

Übergang von $\mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathbb{Q}$. D: Integritätsbereich $\rightsquigarrow$ Körper.
Setze:: $S = \{a/b : a \in D, b \in D - \{0\}\}$ formale Quotienten.
$\sim$ auf S: $a/b \sim c/d$ gdw $ad = bc$ ist Äquivalenzrelation auf S $[a/b]$
$S/\sim = \{[a/b] : a \in D, b \in D - \{0\}\}$, $a/b \in [a/b]$ Repräsentant.
Addition + Multiplikation auf $S/\sim$:
$(a/b) + (c/d) = (ad + bc)/bd$
$(a/b) \cdot (c/d) = ac/bd$ wohldefiniert auf Äquivalenzklassen.
$S/\sim$ ist Körper:: $Q(D)$ (F_D):: Quotientenkörper von D.
Kleinster Körper, der D enthält, $D \cong \{[a/1] : a \in D\}$
$0/1$ $1/1$ $a/1$ mit a identifiziert.
Praxis: eindeutige Repräsentanten für $[a/b]$, Entscheidung für $\sim$.
Falls GGT in D existiert:
$a/b \in [a/b] \in S$ ist Repräsentant, falls $\mathrm{GGT}(a, b) = 1$, b ist einheitsnormal, a, b in „Normalform“.
z. B. $\mathbb{Z}$ Quotientenkörper $Q(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$ a/b „kanonisch“, $(b > 0)$.
$-2/4, 2/-4, 100/-200, -600/1200$ Kan. repräsentant: $-1/2$.

Quotienten-Körper von $D[x]$: Rationale Funktionen

$D[x]$ mit D ZPE-Ring, $Q(D[x])$ Körper der rationalen Funktionen (Ausdrücke) in x :: Schreibe $D(x)$.

Beachte: Operationen $+, \cdot$ sind „teuer“.
Addition: 3-Multiplikationen + Addition + GGT Berechnung
Multiplikation: 2 Multiplikationen und GGT Berechnung.

Wähle geeignete Darstellungen
Fall $\mathbb{Z}[x]$ $\mathbb{Q}[x]$ bzw. $\mathbb{Z}(x)$ $\mathbb{Q}(x)$

in $\mathbb{Q}(x)$: $a(x)/b(x) = \left(\frac{17}{100}x^2 - \frac{3}{113}x + \frac{1}{2}\right) / \left(\frac{5}{9}x^2 + \frac{4}{5}\right)$

Die Äquivalenzlasse enthält Repräsentanten mit ganzzahligen Koeffizienten: z. B.
$a(x)/b(x) = (4284x^2 - 675x + 12600)/(14000x^2 + 20160) \in \mathbb{Z}(x)$.

D mit Quotienten-Körper F_D dann $D(x) \cong F_D(x)$.

Beachte: unterschiedliche kanonische Repräsentanten möglich.
Siehe Beispiel oben.

Potenzreihen - erweiterte Potenzreihen

$R[[x]]$ Potenzreihen mit Koeffizienten in R: Ausdrücke

$$a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad a_k \in R$$

$\mathrm{ord}(a(x)) = \min\{k : a_k \neq 0\}$.
0 alle $a_k = 0$, $a_k = 0$ für $k \geq 1$ Konstante PR.
Addition + Multiplikation wie üblich!
$d(x) = a(x) \cdot b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k$ mit $d_k = a_0 b_k + \cdots + a_k b_0 \quad k \geq 0$

Eigenschaften:

1. $R[x] \hookrightarrow R[[x]]$
2. R kommutativ, so auch $R[[x]]$ $0, 1$
3. R Intbereich, so auch $D[[x]]$. Einheiten sind PR mit a_0 Einheit in R.
4. F Körper, so ist $F[[x]]$ euklidischer Ring mit Bewertung $v(a(x)) = \mathrm{ord}(a(x))$.

Potenzreihen - Einheiten

$a(x) = \sum a_k x^k \qquad b(x) = \sum b_k x^k \quad a(x) \cdot b(x) = 1$ so

$$\begin{aligned} 1 &= a_0 b_0 \\ 0 &= a_0 b_1 + a_1 b_0 \\ &\vdots \\ 0 &= a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow a_0$ ist Einheit

Ist a_0 Einheit in R, so wird b bestimmt durch

$b_0 = a_0^{-1},\ b_1 = -a_0^{-1}(a_1 b_0), \cdots,\ b_n = -a_0^{-1}(a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0)$

In $\mathbb{Z}[[x]]$ gilt $\qquad (1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$

Beachte

$\operatorname{ord}(a(x) + b(x)) \geq \min\{\operatorname{ord}(a(x)), \operatorname{ord}(b(x))\}$

$\operatorname{ord}(a(x) \cdot b(x)) = \operatorname{ord}(a(x)) + \operatorname{ord}(b(x))$.

Für $a(x), b(x) \in F[[x]], a(x) \neq 0 \neq b(x)$, so $a(x) \mid b(x)$ oder $b(x) \mid a(x)$.

Sei $\operatorname{ord}(a(x)) = l \qquad \operatorname{ord}(b(x)) = m$, d. h.

$a(x) = x^l \bar{a}(x) \quad b(x) = x^m \bar{b}(x) \quad \bar{a}(x), \bar{b}(x)$ Einheiten.

$l \geq m$, so $a(x)/b(x) = x^{l-m} \bar{a}(x) \cdot \bar{b}(x)^{-1} \in F[[x]]$.

Potenzreihen - Einheiten, GCD in $F[[x]]$

Für $a(x), b(x) \in F[[x]]$, $b(x) \neq 0$ gibt es $q(x), r(x)$ mit
$a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x)$ mit
$r(x) = 0$ falls $\text{ord}(a(x)) \geq \text{ord}(b(x))$, $r(x) = a(x)$ falls
$\text{ord}(a(x)) < \text{ord}(b(x))$.

Quotientenkörper: $Q(D[[x]])$ Schreibe $D((x))$.

Achtung: D ZPE Ring $\not\hookrightarrow$ $D[[x]]$ ZPE Ring, d. h. Normalformen schwer, assoziierte Elemente!

$a(x) = 2 + 2x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots$
$b(x) = 2 + 4x + 6x^2 + 9x^3 + 13x^4 + \cdots$
$c(x) = 2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \cdots$

sind assoziiert

$b(x) = a(x)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$
$c(x) = a(x)(1 - x)$

Welche PR soll als einheitsnormal gewählt werden! In $F[[x]]$ geht dies:
$a(x) = x^l \cdot b(x)$, $l = \text{ord}(a(x))$ $b(x) = a_l + a_{l+1}x + \cdots$ $a_l \neq 0$ also $b(x)$ Einheit. Die Monome $x^l (l \geq 0)$ und 0 sind einheitsnormal.

$$\text{GCD}(a(x), b(x)) = x^{\min\{\text{ord}(a(x)), \text{ord}(b(x))\}}$$

Erweiterte Potenzreihen

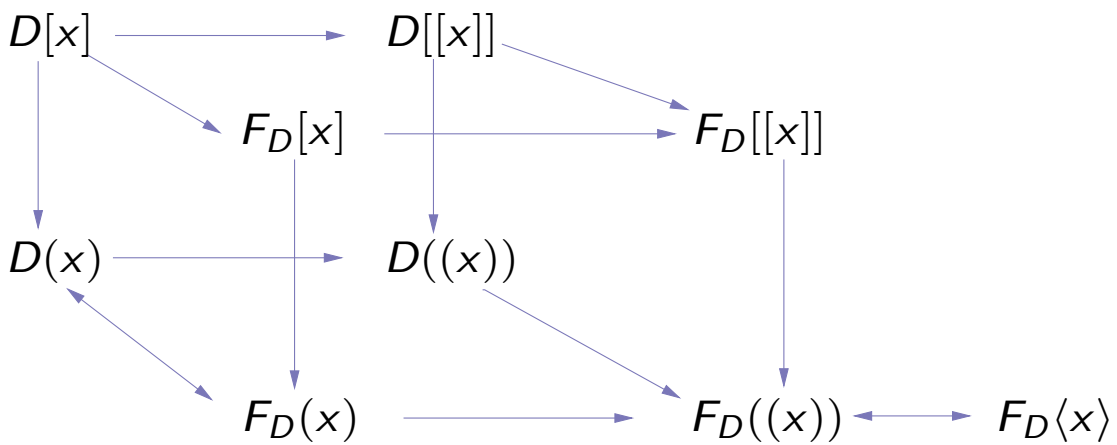
In $F((x))$ $\quad \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right) / x^n \qquad n \geq 0$

$F\langle x\rangle$: $a(x) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k x^k \quad a_k \in F, k \geq m, m \in \mathbb{Z}$

$\mathrm{ord}(a(x)) = \min\{k : a_k \neq 0\}$ $(< 0!)$

$F\langle x\rangle$ ist Körper.

Zusammenhang:



Standard Ringkonstruktionen

- $i \leq R, i$ ideal, so R/i Ring: Quotientenring
  Idealkongruenz: $x \equiv_i y \quad (x \equiv y \mod i)$ gdw. $x - y \in i$.
- R_1, R_2 Ringe, $R_1 + R_2 = \{(r_1, r_2) : r_1 \in R_1, r_2 \in R_2\}$ mit
  $(r_1, r_2) + (r_1', r_2') = (r_1 + r_1', r_2 + r_2')$
  $(r_1, r_2) \cdot (r_1', r_2') = (r_1 r_1', r_2 r_2')$.

  $(0_{R_1}, 0_{R_2})$ Nullelement, $(1_{R_1}, 1_{R_2})$ Einselement.

  Produkt
- Ist R bzw. sind R_1, R_2 effektiv, so stellt sich die Frage ob der Quotientenring bzw. das Produkt effektiv sind.

Inhalt Kapitel 3

Normalformen - Algebraische Darstellungen
- Datenstrukturen - Algebraische Strukturen
- Einfache Simplifikationsregeln in CA-Systemen
- Wortproblem - Simplifikation
- Formalisierung des Simplifikationsbegriffs
- Abstraktionsebenen für algebraische Strukturen
- Normalformen für Polynomringe, Quotientenkörper und Potenzreihen
- Datenstrukturebene

Normalformen - Algebraische Darstellungen

Algebraische Strukturen $\leftrightarrow$ Datenstrukturen (Typen) $\simeq$ „Klassen“
Menge und Operationen:: $(\mathbb{Z}; 0, 1, +, -, \cdot, /, \mathrm{mod}, \mathrm{ggt}, \mathrm{kgv}, \exp, \dots)$

- Darstellung der Objekte:
  oft Konstruktionsvorschriften „Konstruktoren“ für Definitionsbereich
- Termalgebra: Terme in Konstanten und Operatoren.
  Grundterme stellen Elemente des Definitionsbereich dar. Terme sind gleich, wenn sie das gleiche Element des Definitionsbereichs darstellen.
  z. B. $2^3 = (2 \cdot 2) + 4 = \mathrm{ggt}(24, 16)$.

Probleme:

- Welche Darstellungen sind erlaubt (Operatoren z. B. für Ringe: $0, 1, +, \cdot$)
- Transformation von Darstellungen
- Eindeutige oder mehrdeutige Darstellungen
- Gleichheit von Darstellungen

Verschiedene Darstellungsebenen

Elemente der algebraischen Struktur, Darstellungen, Rechnerdarstellung.

Objektebene, Formebene, Darstellungsebene

3.1 Beispiel Funktionenringe, Differentiation als Operator
$\frac{\partial}{\partial x}(ax + xe^{x^2})$ Regeln (Axiome-Gleichungen)

$$\frac{\partial c}{\partial x} \to 0 \qquad \frac{\partial x}{\partial x} \to 1 \qquad \frac{\partial(u+v)}{\partial x} \to \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x} \to u\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}v$$

$$\frac{\partial(u^v)}{\partial x} \to vu^v\frac{\partial u}{\partial x} + (\log_e u)u^v\frac{\partial v}{\partial x}$$

$\rightsquigarrow$ Simplifikation symbolischer Ausdrücke $\rightsquigarrow$ Reduktionsmethoden.

Einfache Simplifikationsregeln in CA-Systemen

- Unterdrücken von Klammern: Präfix-Postfix Notationen:: Formebene
- Identitäten Vereinfachung: z. B. $0 \cdot u \to 0$, $1 \cdot u \to u$, $u/1 \to u$, $v^0 \to 1$ $(v \neq 0)$, $0^w \to 0$ $(w > 0)$
- Vorzeichenregeln: z. B. $(-u)(-v^3) = uv^3$, $-(u+v) \to -u - v$?
- Numerische Vereinfachungen: $\frac{5}{8} - \frac{1}{8} \to \frac{1}{2}$, $9! \to 362880$

  Vorsicht! oft nicht einfach: $(33282)\frac{1}{2} \sin\left(\frac{13\pi}{6}\right) \to \frac{122}{\sqrt{2}}$, $e^e, e, \pi, \ldots$
- Assoziativ-kommutative Gesetze

  $(uv)w + (p+q) \to uvw + p + q \qquad q + p \to p + q$?
- Anordnung: z. B. Polynomdarstellung

Einfache Simplifikationsregeln in CA-Systemen

- Zusammenfassung gemeinsamer Faktoren
  $u + \left(\frac{2}{3}\right) u \longrightarrow \frac{5}{3}u$, $2^{x+2} \longrightarrow 4 \cdot 2^x$, $e^{5+\log u} \longrightarrow e^5 e^{\log u}$
- Operationen mit Exponenten: $(u^w)^v \longrightarrow u^{wv}$, $(uv)^w \longrightarrow u^w v^w$
- Distributiv Gesetze: $(u+v)w \longrightarrow uw + vw$
- Potenzen erweitern: $(a+b)^2 \longrightarrow a^2 + 2ab + b^2$, $(1+x)^{100} \longrightarrow ?$
- GGT-Vereinfachungen: $\frac{4u^2+12u^3+12u^2+4u}{2u^4-2u^3-2u^2+2u} \longrightarrow \frac{2u+2}{u-1}$

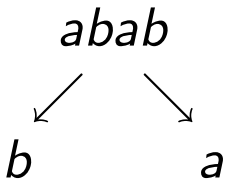
Wortproblem - Simplifikation

$(M, \sim)$ WP:: Gegeben $u, v \in M$, Frage: $u \sim v$?

Wie ist M gegeben: oft endlich erzeugt, z. B. Termalgebra.
Wie ist $\sim$ gegeben: oft Axiome (Gleichungen)

3.2 Beispiel Monoide, Gruppen: Erzeugende, Definierende Relationen

$M = (\{a, b\}; aba = \lambda, bab = \lambda)$
$G = (a, b, \bar{a}, \bar{b}; a\bar{a} = \bar{a}a = b\bar{b} = \bar{b}b = \lambda)$ freie Gruppe.
Frage: gilt $a =_M b$ $\quad a\bar{b}b\bar{a} =_G \lambda$?



Wortersetzungssysteme:: $M \cong (a; a^3 = \lambda)$,
allg: Termersetzungssysteme

Simplifikation: Terme in „einfachste“ Form zu bringen.
Methode: Maß: wohlfundierte (Partial)-Ordnung $\succ$ auf M.
$\mathrm{rep}(u) = \min_{v \sim u} v$ sollte eindeutig sein.
Frage: Ist rep effektiv berechenbar? i. Allg. nicht, da WP damit lösbar.

Wortproblem - Simplifikation

Termersetzungssysteme: Methoden zur Behandlung von WP:
Regeln, Konfluenz, Terminierung, Vervollständigung (KB).

Oft genügt es ein spezielles Wortproblem zu betrachten:

Rolle der Konstanten z. B. $0, 1$.

Gruppen: $u = v \text{ gdw } uv^{-1} = 1$

Ringe: $u = v \text{ gdw } u - v = 0$

$\rightsquigarrow$ Eigenschaften einer speziellen Äquivalenzklasse.

Wortproblem - 0-Äquivalenz

Richardson: Some unsolvable problems involving elementary funtions of a real var. J. Symb. Logic 33 (1968). How to recognize zero. J. Symb. Comp. 24 (1997). Funktionsklassen: $\{f : f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $+, \cdot, 0, 1$.

3.3 Satz Sei R die Klasse aller Terme, die man aus

1. $\mathbb{Q}$ (rationale Zahlen), π Konstanten.
2. Einer Variablen x und Funktionen $\sin(x)$, $|x|$.
3. Operatoren: add$(+)$, mult$(*)$, komp$(\circ)$.

Wie üblich definiert: $t_1(x) \circ t_2(x) = t_1(t_2(x))$

Interpretiert man die Konstanten als konstante Funktionen auf $\mathbb{R}$, x als Identitätsfunktion und $\sin(x)$, $|x|$ durch die Standardfunktionen, so stellt jeder Term eine eindeutige Funktion aus $(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ dar.
Folgendes Problem ist unentscheidbar:
Eingabe: $E \in R$ **Frage**: Gilt $E = 0$?

Wortproblem - 0-Äquivalenz

3.4 Beispiel

$\frac{1}{2} \qquad \sin\left(\frac{1}{2}\right) = \sin(x) \circ \frac{1}{2} \qquad \sin(|x|)$

$|\sin(x)|, \quad \sin(\sin(\sin(x))), \quad \sin(x)^2, \quad \sin(x) + |x|$

Beweisidee: Reduziere Hilbert's 10. Problem auf „$E = 0$".
Matiasevic 1970: Unentscheidbarkeit.

Hilbert's 10. Problem

Es gibt eine Menge $\mathcal{P} = \{p(x_1, \ldots, x_n) \mid p \text{ Polynome über } \mathbb{Z}\}$ mit Prädikat: $p \in \mathcal{P}$ hat p Nullstelle in $\mathbb{N}^n$ ist nicht rekursiv entscheidbar.

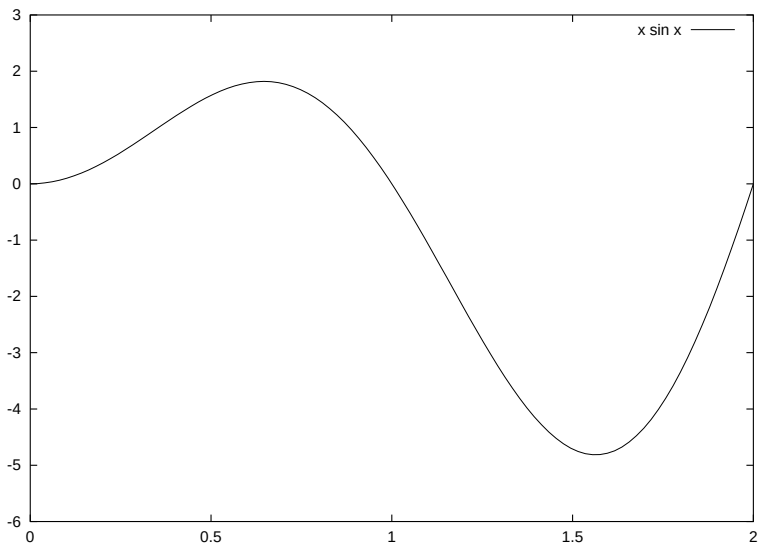
Idee der Reduktion: Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so

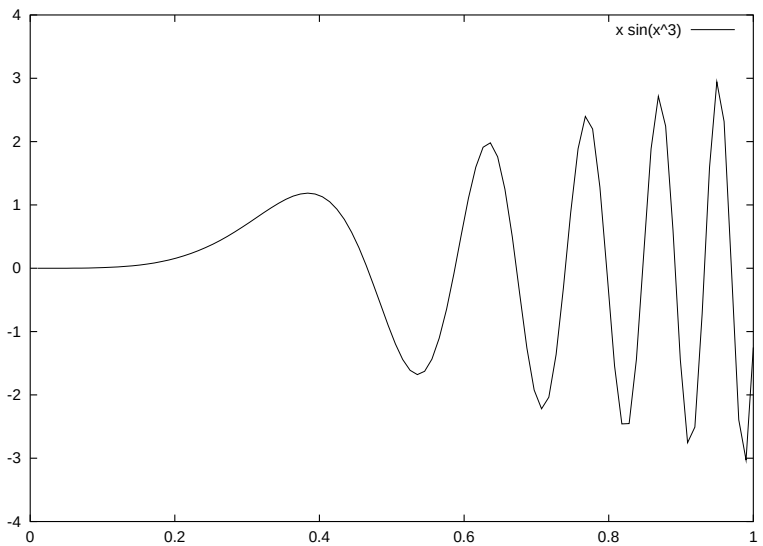
$f^0(x) = x \qquad f^{(n+1)}(x) = f(f^n(x)) \quad n > 0$

Wortproblem - 0-Äquivalenz

3.5 Lemma Jedes Tupel reeller Zahlen kann durch eine reelle Zahl dargestellt werden (bis auf ε). Seien $h(x) = x \sin x, g(x) = x \sin(x^3)$. Dann gibt es für alle $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, 0 < \varepsilon < 1$ ein $b \in \mathbb{R}$ mit $|h(g^{(k+1)}(b)) - a_k| < \varepsilon \quad 1 \leq k \leq n$.

$h(x) = x \sin x \qquad g(x) \qquad = \qquad x \sin(x^3)$





Wortproblem - 0-Äquivalenz

3.6 Definition Eine Funktion (Term) $F(x_1, \ldots, x_n) \in R$ wird von $G(x_1, \ldots, x_n) \in R$ dominiert, wenn für alle $x_i \in \mathbb{R}$

i) $G(x_1, \ldots, x_n) > 1$

ii) $\forall \delta_1, \ldots, \delta_n \in \mathbb{R}, |\delta_i| < 1 : F(x_1 + \delta_1, \ldots, x_n + \delta_n) < G(x_1, \ldots, x_n)$

3.7 Lemma Zu jeder Funktion $F \in R$ gibt es eine Funktion $G \in \mathcal{P}$, die F dominiert.

3.8 Lemma Für alle $P \in \mathcal{P}$ existiert $F \in R$ mit: Es gibt $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ mit $P(a_1, \ldots, a_n) = 0$ gdw es gibt $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ mit $F(b_1, \ldots, b_n) < 0$.

Wortproblem - 0-Äquivalenz: Positive Ergebnisse

3.9 Satz Richardson
Betrachte Funktionenklasse, die durch Termmenge Λ definiert wird mit

1. $\mathbb{Q}, \pi \in \Lambda$
2. Var x Identität
3. $F, G \in \Lambda$, so $(F + G), (F * G), (F/G)$
4. $F \in \Lambda$, so $\log(|F|)$ und $\exp(F)$ in Λ

Interpretiere $F \in \Lambda$ als $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Das Prädikat „$F(x) \equiv 0$“ auf Λ ist entscheidbar.

Wortproblem - 0-Äquivalenz: Positive Ergebnisse

Beweisidee: Komplexität von Ausdrücken + Induktion. Sei etwa y Unterausdruck mit größter Komplexität etwa $y = \log u$

$F = a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_1 y + a_0$

wende Verfahren an:

$a_n = 0 \rightsquigarrow F_1 = a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_0$, $F \equiv 0$ gdw $F_1 \equiv 0$.

$a_n \neq 0 \rightsquigarrow F_2 := \frac{F}{a_n} = y^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} y + \ldots$

$F_3 = F_2' = n y^{n-1} y' + \cdots + \frac{a_n a_0' - a_0 a_n'}{a_n^2}$

$F_2 \equiv 0 \rightsquigarrow F_3 \equiv 0$ $\quad$ $F_3 \equiv 0 \rightsquigarrow F_2$ konstant.

Klasse ist abgeschlossen gegen Ableitungen und die Ableitungen sind weniger komplex.

$y = \log u \rightsquigarrow y' = \frac{u'}{u}$ $\quad$ u', u weniger komplex.

$y = e^u$ ist dies nicht der Fall, unterscheide hier

$$F \equiv a_n y^n + \cdots + a_0 \begin{cases} a_0 \equiv 0 \rightsquigarrow F_1 = a_n y^n + \ldots + a_1 y = Qy \\ a_0 \not\equiv 0 \rightsquigarrow F_2 = F / a_0 \rightsquigarrow F_2' / y \equiv 0 \rightsquigarrow F \equiv c \end{cases}$$

Formalisierung des Simplifikationsbegriffs

Zwei Ziele:

1. „Einfachere“ äquivalente Objekte zu definieren und sie bei Operationen zu verwenden.

2. Wenn möglich kanonische (d. h. eindeutige) Darstellung in (einigen/allen) Äquivalenzklassen festzulegen und wenn möglich effektiv zu bestimmen.

3.10 Definition Sei E Menge syntaktischer Objekte (z. B. Terme über Signatur, Formeln, Wörter, Programme) und sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf E. Sei weiterhin $\preceq$ eine Partialordnung auf E. Eine Simplifikationsfunktion für $[E;\sim]$ bzgl. $\preceq$ ist eine rekursive Funktion $f : E \to E$ mit

$$\text{i) } f(t) \sim t \qquad \text{ii) } f(t) \preceq t$$

i. Allg. $\preceq$ wohlfundierte Partialordnung auf E, d. h. es gibt keine ∞-Ketten $e_1 \succ e_2 \succ e_3 \succ \cdots$,
z. B. $|e|$ Länge des Ausdrucks $e_1 \succ e_2$ gdw $|e_1| \succ |e_2|$.

Formalisierung des Simplifikationsbegriffs

Eine Normalisierungsfunktion bzgl. $\preceq$ ist eine Simplifikationsfunktion f bzgl. $\preceq$ mit $f(f(t)) = f(t)$ für alle t.
D. h. $f(t)$ ist simplifiziert oder in Normalform.
Oft wird verlangt, dass für bestimmte Äquivalenzklassen z. B.
$[0], [1] : t \sim 0$ so $f(t) = f(0) = 0$.
Eindeutige Normalformen für spezielle Äquivalenzklassen in der Regel solche, die ausgewählte Konstanten der Signatur enthalten.

Eine kanonische Funktion ist eine Simplifikationsfunktion f mit

$$s \sim t \text{ so } f(s) = f(t) \text{ für alle } s, t \in E$$

Sie berechnet eindeutige (kanonische) Repräsentanten für jede Äquivalenzklasse.

Formalisierung des Simplifikationsbegriffs

Beachte: Ist f kanonisch, so ist f auch Normalisierungsfunktion und

$$s \sim t \text{ gdw } f(s) = f(t)$$

d. h. das Wortproblem für $\sim$ ist entscheidbar.
f ist idempotent (d. h. $f \circ f = f$) und in jeder Äquivalenzklasse gibt es genau ein Element in kanonischer Form.

3.11 Satz Sei E eine entscheidbare Menge syntaktischer Objekte und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf E. Dann gilt
$\sim$ entscheidbar (WP-entscheidbar) gdw es gibt eine kanonische Funktion f für $[E; \sim]$.

Berechenbare Quotientenstrukturen

3.12 Satz Sei E entscheidbar, R berechenbare Operation auf E, d. h. $R : E^n \to E$ und $\sim$ eine Kongruenz bzgl. R.
Hat E eine kanonische Funktion f bzgl. $\sim$ und ist $\mathrm{rep}(E) = \{t \in E : f(t) = t\}$ die Menge der kanonischen Repräsentanten, so lässt sich die Quotientenstruktur wie folgt darstellen:

$$R'(s_1, \ldots, s_n) := f(R(s_1, \ldots, s_n)) \text{ für } s_1, \ldots, s_n \in \mathrm{rep}(E)$$

und

$$(\mathrm{rep}(E), R') \cong (E/\sim, R/\sim)$$

$\mathrm{rep}(E)$ ist entscheidbar, R' ist berechenbar.

Beispiele: Monoide und Gruppen

3.13 Beispiel

- $(a, b : ba = \lambda)$ Normalformen $a^n b^m \quad n, m \geq 0$

  Wortersetzungssystem: $ba \longrightarrow \lambda$ terminierend (Längenkürz.)

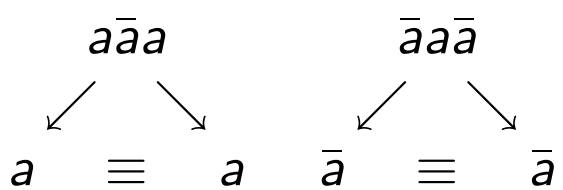
  konfluent (d. h. eindeutige NF)

$$(a^n b^m) \circ (a^{n'} b^{m'}) = \begin{cases} a^{n+(n'-m)} b^{m'} & n' \geq m \\ a^n b^{(m-n')+m'} & m > n' \end{cases}$$

- $(a, b, \bar{a}, \bar{b} : a\bar{a} = \bar{a}a = b\bar{b} = \bar{b}b = \lambda)$

  WES: $a\bar{a} \longrightarrow \lambda \qquad \bar{a}a \longrightarrow \lambda \qquad b\bar{b} \longrightarrow \lambda \qquad \bar{b}b \longrightarrow \lambda$ terminierend.

  Konfluent: Kritische Paare:



Beispiele: Monoide und Gruppen

- Normalformen: Wörter, die keine linke Seite als Teilwort enthalten $\rightsquigarrow$ reguläre Sprache
- $(a, b : aba = bab = \lambda)$

  WES: $aba \to \lambda \quad bab \to \lambda$ terminierend.

  Nicht konfluent $abab$ mit $b \not\equiv a$

  Hinzunahme von Regeln $b \to a \rightsquigarrow$ Knuth Bendix Vervollständigung.
  Länge-Lexikographische Ordnung $b \succ a$

  $(a, b; b \to a, a^3 \to \lambda)$, Repr: λ, a, a^2

  Multiplikation:

	λ	a	a^2
λ	λ	a	a^2
a	a	a^2	λ
a^2	a^2	λ	a

Abstraktionsebenen für algebraische Strukturen

- $\mathbb{Z}_m$ $\quad f(n) = n \bmod m$ positive Reste

  Repr. $0, 1, \ldots, m-1$, Definition von $+, \cdot$ auf $\mathbb{Z}_m$.

I) **Objektebene**: Menge $\quad$ Operationen = Elemente der Mengen

II) **Form-Ebene**

Objekte werden explizit dargestellt „Bezeichner“

mehrere Gleichheiten $\quad \equiv$ syntaktische $\quad =$ semantische

gleiche Bezeichner $\quad$ gleiche Objekte

Typische Bezeichner: Terme $12x^2y - 4xy + 9x - 3 \quad (3x-1)(4xy+3)$
$(12y)x^2 + (-4y+9)x - 3$

Syntaktisch verschieden, aber semantisch gleich.

Abstraktionsebenen für algebraische Strukturen

III) **Datenstrukturebene**

Darstellung der Objekte aus Ebenen I), II) im Rechner:
Speicherorganisation
Listen, Felder, Verbunde usw.
Simplifikation definiert auf Ebene II).
Realisiert in Ebene III).

Wichtige Entscheidungen: Welche Darstellungen erlaubt man in Ebene II), wie werden diese in III) dargestellt.

Oft Unterscheidung nötig: Eingabe, Intern, Ausgabe.

Beispiele

a) $E = \mathbb{Z}[x]$

Formebene

- Jedes Polynom $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathcal{F}$
- $p_1, p_2 \in \mathcal{F}$, so auch $(p_1 * p_2) \in \mathcal{F}$
- $p_1, p_2 \in \mathcal{F}$, so auch $(p_1 + p_2) \in \mathcal{F}$

Normalisierungsfunktionen:

f_2 {
  f_1 {
    Multipliziere Produkte aus (Distributivgesetz) Σ Monom.
    Fasse Monome mit gleichem Grad zusammen.
  }
  Ordne Monome nach aufsteigendem Grad
  (absteigendem)
}

Beispiele (2)

f_1 ist Normalisierungsfunktion, f_2 ist kanonische Funktion.

Normalform bzgl. f_1:

$a_1 x^{e_1} + a_2 x^{e_2} + \cdots + a_m x^{e_m} \quad e_i \neq e_j$ für $i \neq j$

Kanonische Form bzgl. f_2:

$a_1 x^{e_1} + a_2 x^{e_2} + \cdots + a_m x^{e_m} \quad e_i < e_j$ für $i < j$

Oft gilt $s \sim t$ gdw $M(s,t) \sim 0$, $\exists$ Normalisierungsfunktion $\rightsquigarrow$ kanonische Funktion.

Beispiele (3)

b) Abelsche Halbgruppen — Varietät
Erzeugende — Relationen
$\Sigma :: a, b, c, f, s$ — $E :: as = c^2 s, bs = cs, s = f$
$+$ Kommutativität

Faktorhalbgruppe des freien komm. Monoids in a, b, c, f, s

Formebene: $\{a^{n_1} b^{n_2} c^{n_3} f^{n_4} s^{n_5} \mid n_i \in \mathbb{N}\}$

$\circ : M \times M \to M$ Addition der Exponenten.

Kongruenz, die von E erzeugt wird: Ersetzungsregeln

$\underline{s} \to f \quad \underline{c}f \to bf \quad \underline{b^2}f \to af$ „Modulo Kommutativität“

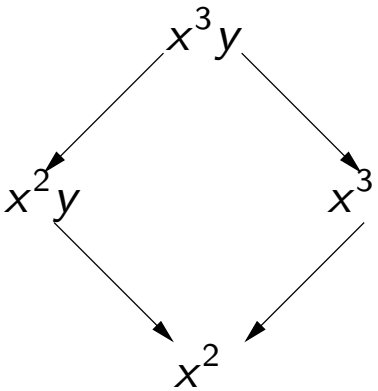
Definiere kanonische Funktion $\xrightarrow{*}$ mit kanonischen Formen
$\subseteq a^{n_1} b^{n_2} c^{n_3} f^{n_4}$

Beispiele (4)

c) $E = \mathbb{Q}[x, y] : x^3 - x^2, x^2y - x^2$

$i = \langle x^3 - x^2, x^2y - x^2 \rangle \qquad E/i$

Regeln: $x^3 \to x^2 \qquad x^2y \to x^2$ Reduktionsfunktion



$x^3 - x^2y \xrightarrow{*} 0$

$\to$ definiert Simplifikationsfunktion $p \xrightarrow{*} NF(p)$, sie ist kanonisch ($\rightsquigarrow$ Gröbner Basen).

Normalformen für Polynomringe und Quotientenkörper, d. h. Normalformen für Polynome und rationale Ausdrücke.

Beispiele (5)

Ringe: Axiome kommutative Ringe mit 1.
Signatur: $0, 1, -, +, *$
Axiome: $+$ Komm., Ass., 0 neutr. El., Gruppe inv. -
$*$ Komm., Ass., Einh. $+$ Distributivgesetz
Gleichheitsaxiome $\rightsquigarrow$ Varietät.
Univariate Polynome: Formebene.
$R[x] : a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,\ n \geq 0, a_i \in R, a_n \neq 0 \cup \{0\}$
System kanonischer Formen für $R[x]$ (**dicht**) oder **dünn** alle Koeffizienten $\neq 0$.
Multivariate Polynome: Formebene.
Rekursive Darstellung: $R[x_1 \ldots x_n] = R[x_1 \ldots x_{n-1}][x_n]$

$$a(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{\text{grad}(a(\bar{x}))} a_i(x_1 \ldots x_{n-1}) x_n^i$$

dicht/dünn

Beispiele (6)

3.14 Beispiel

$a(x,y,z) = (3y^2+(-2z^3)y+5z^2)x^2+4x+((-6z+1)y^3+3y^2+(z^4+1))$

Distributive Darstellung $a(\bar{x}) \in D[x]$

$a(\bar{x}) = \sum_{e\in\mathbb{N}^n} a_e x^e$ mit $a_e \in D$ dicht /dünn $a_e \neq 0$

$x^e \quad e \in \mathbb{N}^n$ werden oft Terme genannt.

$a(x,y,z) = 3x^2y^2 - 2x^2yz^3 + 5x^2z^2 + 4x - 6y^3z + y^3 + 3y^2 + z^4 + 1$

Reihenfolge der Terme? Ordnungen auf Termmengen, die kompatibel mit Termmultiplikation sind, z. B.

Lex $x > y > z$ $x^2y^2 > x^2yz^3 > x^2z^2 > x > y^3z \cdots$

oder

Grad-Lex $x^2yz^2 > x^2y^2 > x^2z^2 > y^3z > z^4 > y^3 > y^2 > x$

Beispiele (7)

3.15 Beispiel

$a(x,y) =$
$((x^2-xy+x)+(x^2+3)(x-y+1))\cdot((y^3-3y^2-9y-5)+x^4(y^2+2y+1))$

Distributive Darstellung:

$$f_1(a(x,y)) = 5x^2y^3+3x^2y^2-13x^2y-10x^2+3x^6y+2x^6-xy^4+7xy^3\cdots$$

Kanonische distributive Darstellung:

$$f_2(a(x,y)) = x^7y^2+2x^7y+x^7-x^6y^3+3x^6y+2x^6-x^5y^3+2x^5y^2+\cdots$$

Faktorisierte Normalform:

$f_3(a(x,y)) =$
$(x^3-x^2y+2x^2-xy+4x-3y+3)(x^4y^2+2x^4y+x^4+y^3-3y^2-9y-5)$

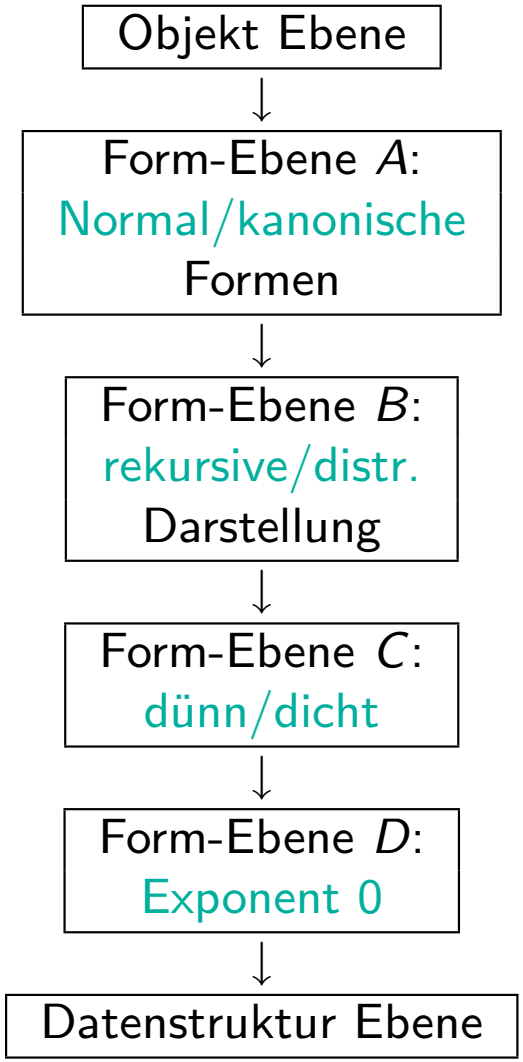
Faktorisierte kanonische Form:

$$f_4(a(x,y)) = (x-y+1)(x^2+x+3)(x^4+y-5)(y+1)^2$$

Beispiele (8)

- Rekursive Darstellung
- Distributive Darstellung
  f_1
- Kanonische distributive Darstellung
  (Ordnung auf Termen) f_2
- Faktorisierte Normalform
  $\prod_{i=1}^{k} p_i \rightarrow \prod_{i=1}^{k} f_2(p_i)$
  f_3
- Faktorisierte kanonische Form (D ZPE)
  $\prod_{i=1}^{k} p_i \rightarrow \prod_{i=1}^{k} f_2(p_i)$

Faktorisiere die $f_2(p_i)$, fasse gleiche Faktoren zusammen.
Einheitsnormale Faktorisierung + Ordnung der Faktoren



Beispiele (9)

- f_1, f_2, f_3 sind „einfach“ zu berechnen.
- f_4 kostspielig!
- f_2, f_3 werden am häufigsten verwendet.
- $(x + y)^{1000} - y^{1000}$ von f_2 und f_3 expandiert!
- Weitere Transformationen erwünscht!

Normalformen für rationale Ausdrücke

D Integritätbereich, Quotientenkörper (D) F_D

Annahme: D ZPE-Ring, d. h. GGT existiert.

$D[x_1, \ldots, x_n]$ $D(x_1 \ldots x_n)$

Formebene: $\frac{a}{b}$ :: GGT $(a, b) = 1$, b EN, a, b kanon.

$(\exp * \exp)$ $(\exp + \exp)$ $\frac{p}{q}$

Normalisierungsfunktion für rationale Ausdrücke

f_5 ::

1. Bringe in Gestalt $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in D[x_1, \ldots, x_n]$

   (Gemeinsamer Nenner, Ausmultiplizieren) $\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} \rightarrow$

2. GGT $(a, b) = 1$ $\qquad \frac{a}{b} \rightarrow \frac{a'}{b'} \qquad a = a' \cdot g,\ b = b' \cdot g$

3. b Einheitsnormal: $\frac{a'}{b'} \rightarrow \frac{a''}{b''},\ a'' = a' \cdot (u(b'))^{-1},\ b'' = b' \cdot (u(b'))^{-1}$

4. $\frac{a''}{b''} \rightarrow \frac{f_2(a'')}{f_2(b'')}$

Andere Formen: a/b
Fakt/Fakt Fakt / erweitert erweitert / Faktor
mit GGT$(a, b) = 1$, b einheitsnormal.

Normalformen Potenzreihen

Potenzreihen Truncated Power Series: Abbruchgrad t

$$a(x) = \sum_{k=0}^{t} a_k x^k + 0(x^{t+1})$$

$\rightsquigarrow$ Problem Normalformen

Explizite Darstellung unendlicher Reihen:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \text{ d. h.}$$

$$a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_a(k) x^k$$

Koeffizientenfunktion $f_a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ rekursiv.

Datenstrukturebene

Darstellung der Objekte der Formebene im Rechner.
Entscheidung:
Alle nur Normalformen nur kanonische Formen
Ziel: Effiziente Unterstützung (Realisierung) der grundlegenden Operationen.
1. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$
Single-Precision $\rightsquigarrow$ Wortlänge z. B. 64 Bits
Multi-Precision $\rightsquigarrow$ Langzahlen
SP-Zahl mit Vorzeichen: $-2^{63}+1 \leq$ SP-Zahl $\leq 2^{63}-1$
Langzahlen als Listen von SP-Zahlen.

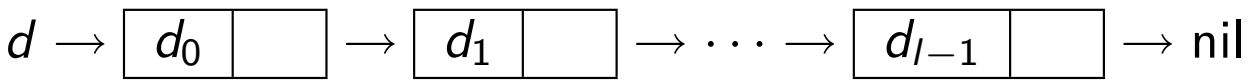
$$(d_0, \ldots, d_{l-1}) \longleftrightarrow \sum_{i=0}^{l-1} d_i \beta^i$$

Wahl von β

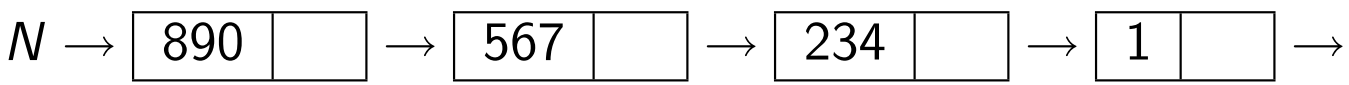
$1 \leq \beta - 1 \leq$ SP-Zahl oder als Feld var. Länge (wie gehabt!)

Datenstrukturebene (Forts.)

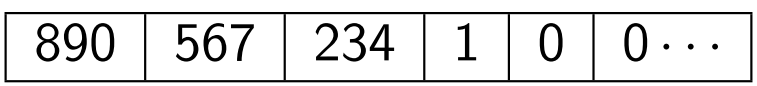
Wahl von β:
i) $\beta - 1$ größte SPZ
ii) $\beta = 10^p$ p so groß wie möglich.
Länge l der Liste: Dynamisch oder statisch.
Implementierung: Zeiger oder Felder.
Referenzierte / sequentielle Zuweisung (-Vorzeichen, -Länge)



$\beta = 10^3$ $N = 1/234/567/890$



Feld



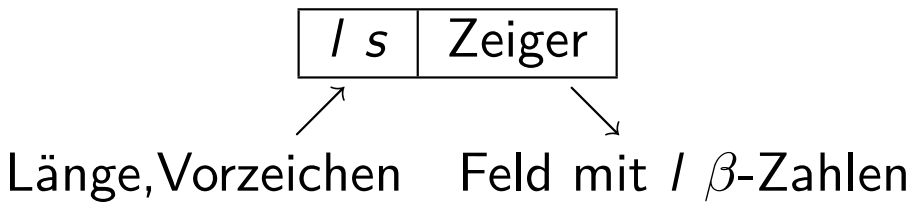
Probleme

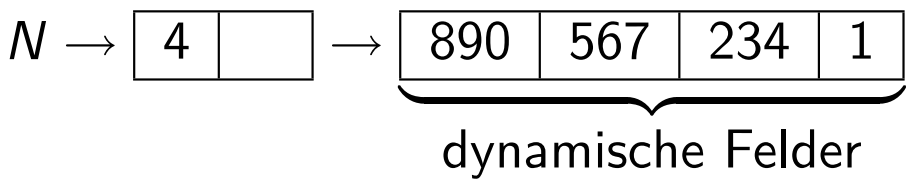
- Feste Länge (Überlauf), auffüllen mit 0 (Platz Verschwendung).
- Listen, Pointer Kosten Platz, Kosten für nächste Stelle.

Descriptor Allocation

Mischung

Beschreibungsblock

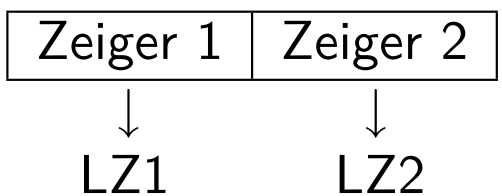




Problem: Speicherverwaltung kostspielig

Garbagecollection

Rationale Zahlen $Q \rightarrow$



Datenstrukturen für Polynome

Datenstrukturen für Polynome / rationale Funktionen.
Hängen von Entscheidungen auf Formebenen $B \mid C \mid D$ ab.

B : Rekursive, dünn $\longrightarrow$ Listen
C : Distributive, dünn $\longrightarrow$ Felder.

Koeff.-Zeiger	Exponent	Next
$\hookrightarrow a_i$	$\hookrightarrow i$	(SP-Zahl)

$a_i x_1^i$
$a_i \in D[x_2, \ldots, x_n]$

Als Headerknoten

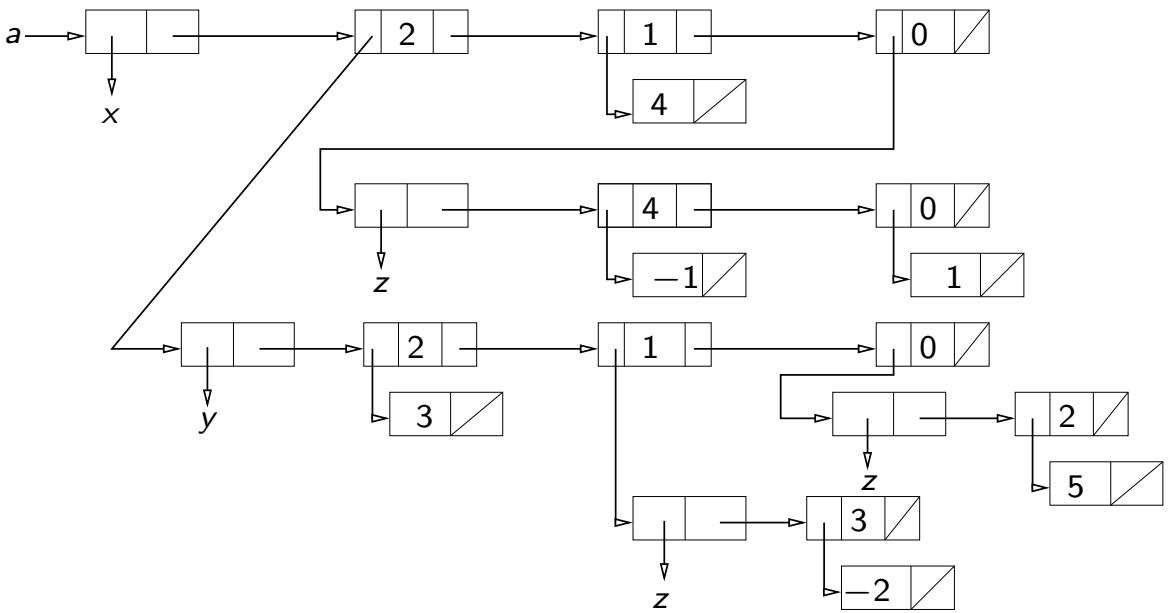
Indet_Zeiger	First_Zeiger
$\hookrightarrow$ Name_Var	$\hookrightarrow$ erstes Monom in Stufe

Beispiel

3.16 Beispiel $a(x,y,z) \in \mathbb{Z}[x,y,z]$ mit

$$\begin{aligned} a(x,y,z) &= 3x^2y^2 - 2x^2yz^3 + 5x^2z^2 + 4x - z^4 + 1 \\ &= (3y^2 + (-2z^3)y + 5z^2)x^2 + 4x + (-z^4 + 1) \end{aligned}$$

DS-Darstellung für rekursive dünn



Beachte hier Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$ als SPZ (können auch als LZ oder rationale Zahlen dargestellt sein!) Erlaubt Unterscheidung (Polynom, Zahl in $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$).

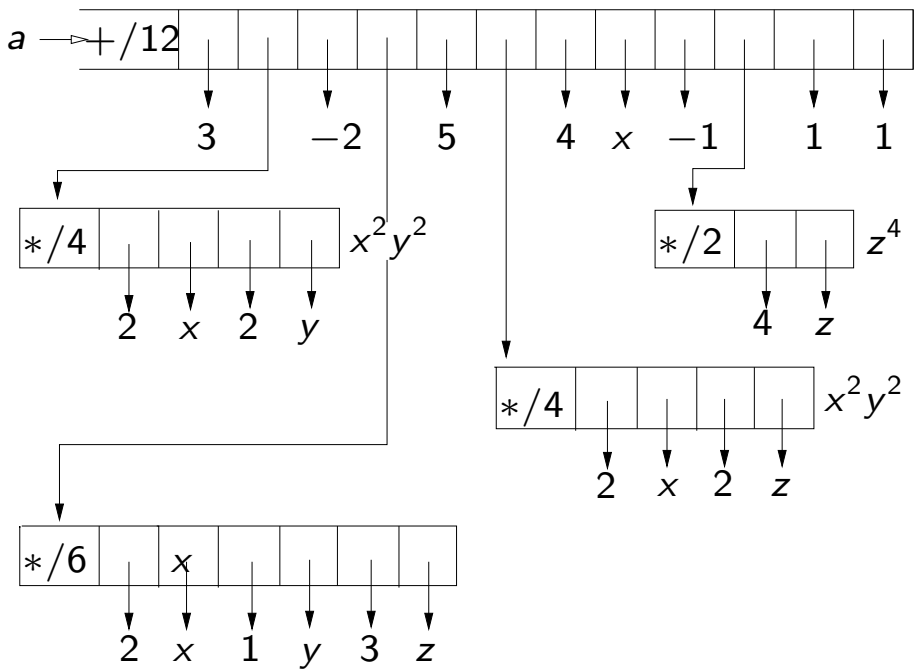
Distributive Form Darstellung
Dynamische Felder als DS für Pol. (Maple)

Type/Length	Coeff	Term	$\cdots$	Coeff	Term

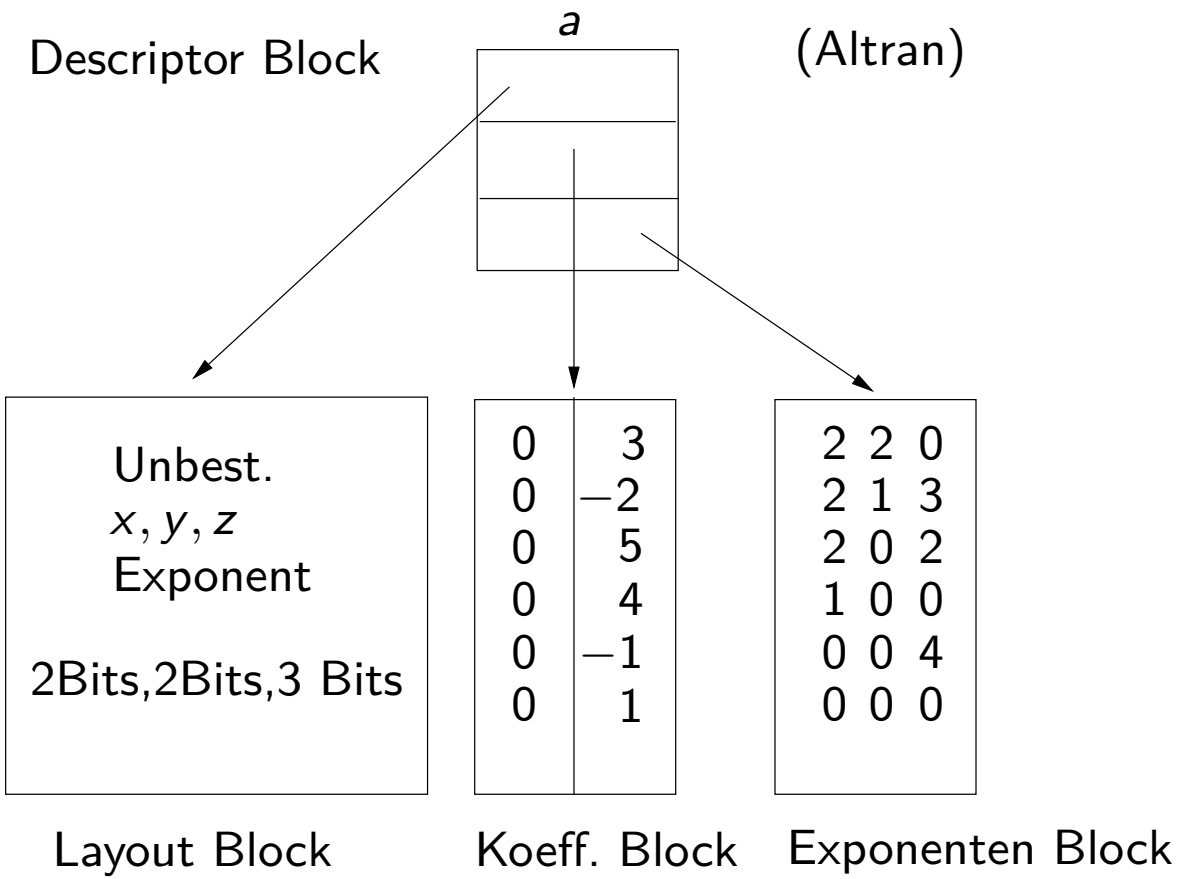
Sum Product in Maple

Type/Length	Exponent	Fact	$\cdots$	Exponent	Fact

3.17 Beispiel



Beispiel (Forts.)



Inhalt Kapitel 4

Arithmetik in Polynomringen - Modulare Arithmetik
- Arithmetik in Polynomringen
- Pseudo-Division mit Rest-Primitiver EA
- Modulare Arithmetik
- Schnelle Arithmetik
- Die schnelle Fourier Transformation (FFT) Anwendung auf Polynommultiplikation
- Anwendung FFT auf Langzahlmultiplikation
- Modulare Methoden
- Chinesische Reste Algorithmen
- Garner & Newton Interpolationsalgorithmen

Arithmetik in Polynomringen

Euklidischer Algorithmus für $D[\bar{x}]$?

Problem: $D[\bar{x}]$ i. Allg. nicht euklidisch, aber ZPE Ring, falls D ZPE-Ring: wie berechnet man GGT?.

4.1 Beispiel $\mathbb{Z}[x]$ seien

$a(x) = 48x^3 - 84x^2 + 42x - 36$
$b(x) = -4x^3 - 10x^2 + 44x - 30$
Eindeutige EN-Faktorisierungen in $\mathbb{Z}[x]$

$a(x) = (2) \cdot (3)(2x - 3)(4x^2 - x + 2)$

$b(x) = (-1)(2)(2x - 3)(x - 1)(x + 5)$

$\rightsquigarrow \mathrm{GGT}(a, b) = 2 \cdot (2x - 3)$
$= 4x - 6$

Beispiel (Forts.)

Berechnung in $\mathbb{Q}[x]$ (euklid. Ring) Zwei Möglichkeiten:

Eindeutige EN-Faktorisierungen in $\mathbb{Q}[x]$

$a(x) = (48)\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)$

$\rightsquigarrow \mathrm{GGT}(a, b) = x - \frac{3}{2}$

$b(x) = (-4)\left(x - \frac{3}{2}\right)(x - 1)(x + 5)$

Euklidischer Algorithmus in $\mathbb{Q}[x]$

$\rightsquigarrow \mathrm{GGT}(a, b) = x - \frac{3}{2}$

Wie hängen die beiden berechneten GGT's voneinander ab? Übung

Beispiel

4.2 Beispiel

$a(x) = 3x^3 + x^2 + x + 5$
$b(x) = 5x^2 - 3x + 1$ in $\mathbb{Q}[x]$

$\rightsquigarrow a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x)$ mit

$$q(x) = \frac{3}{5}x + \frac{14}{25} \qquad r(x) = \frac{52}{25}x + \frac{111}{25}$$

Hauptkoeffizient von $b(x)$ ist 5. Nenner sind Potenzen von 5.

In $\mathbb{Z}[x]$ ist obige Division nicht möglich: $3 = 5q_1, q_1 \in \mathbb{Z}$ ↯

Wählt man $\bar{a}(x) = 5^2 \cdot a(x)$, so gilt
$5^2 \cdot (3x^3 + x^2 + x + 5) = (5x^2 - 3x + 1) \cdot (15x + 14) + (52x + 111)$ in $\mathbb{Z}[x]$, wobei $\text{grad}(52x + 111) < \text{grad}(5x^2 - 3x + 1)$

$\rightsquigarrow$ Pseudo-Divisions-Eigenschaft

Pseudo-Division mit Rest-Primitiver EA

PD-Eigenschaft: D ZPE Ring, $a(x), b(x) \in D[x]$ mit $b(x) \neq 0$, $\text{grad}(a(x)) \geq \text{grad}(b(x))$. Dann gibt es Polynome $q(x), r(x) \in D[x]$ mit
$\beta^l a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x) \qquad \text{grad}(r(x)) < \text{grad}(b(x))$
wobei

- $\beta = \text{Haupt_Koeff}(b(x))$,
- $l = \text{grad}(a(x)) - \text{grad}(b(x)) + 1$
- $q(x)$:: Pseudo_Quotient und
- $r(x)$:: Pseudo_Rest.

Beachte: $q(x)$ und $r(x)$ sind eindeutig und können durch die „übliche“ Division bestimmt werden.

Pseudo-Division mit Rest

4.3 Definition

D ZPE Ring $0 \neq a(x) \in D[x]$ heißt primitiv, falls a EN und die Koeffizienten teilerfremd sind (d. h. $\mathrm{GGT}(a_0, \ldots, a_n) = 1$ für $\mathrm{grad}(a) = n$).

z. B. $a_n x^n$ ist primitiv in $\mathbb{Z}[x]$ gdw $a_n = 1$.

Der Inhalt (Content) von $a(x)$ (Bez. $\mathrm{cont}(a(x))$) ist der eindeutige EN GGT der Koeffizienten von $a(x)$,
d. h. jedes Polynom hat eine eindeutige Darstellung

$$a(x) = u(a(x)) \cdot \mathrm{cont}(a(x)) \cdot PP(a(x))$$

wobei $PP(a(x))$ primitiv ist: Primitiver Anteil von $a(x)$.

Für 0 setze $\mathrm{cont}(0) = 0$ und $PP(0) = 0$.

Pseudo-Division mit Rest-Primitiver EA (Forts.)

Gauss Lemma: Produkt von primitiven Polynomen ist primitiv.
Man erhält:
$\mathrm{GGT}(a(x), b(x)) =$
$\underbrace{\mathrm{GGT}(\mathrm{cont}(a(x)), \mathrm{cont}(b(x)))}$ $\mathrm{GGT}(PP(a(x)), PP(b(x)))$
Berechnung im Koeff. Bereich

Annahme: Berechnung vom GGT im Koeff. Bereich bekannt!

4.4 Satz Sei D ZPE Ring. Sind $a(x), b(x) \in D[x]$ primitiv mit $b(x) \neq 0$ und $\mathrm{grad}(a(x)) \geq \mathrm{grad}(b(x))$.
Seien $q(x), r(x)$ Pseudo_Quotient und Pseudo_rest mit
$\beta^l(a(x)) = b(x) \cdot q(x) + r(x), b(x), r(x) \in D[x], \mathrm{grad}(r(x)) < \mathrm{grad}(b(x))$.
Dann gilt

$$\mathrm{GGT}(a(x), b(x)) = \mathrm{GGT}(b(x), PP(r(x)))$$

Pseudo-Division mit Rest-Primitiver EA (Forts.)

Beweis: $\mathrm{GGT}(\beta^l a(x), b(x)) = \mathrm{GGT}(b(x), r(x))$
und
$\mathrm{GGT}(\beta^l a(x), b(x)) = \mathrm{GGT}(\beta^l, 1)\mathrm{GGT}(a(x), b(x)) = \mathrm{GGT}(a(x), b(x))$
da a, b primitiv. Somit

$$\begin{aligned} \mathrm{GGT}(b(x), r(x)) &= \mathrm{GGT}(1, \mathrm{cont}(r(x)))\mathrm{GGT}(b(x), PP(r(x))) \\ &= \mathrm{GGT}(b(x), PP(r(x))) \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Pseudo polynomiale Restefolge zur Berechnung des GGT
$\rightsquigarrow$ Primitiver EA
Lässt sich verallgemeinern: PP Restefolge für F_1, F_2:
$F_1, F_2, \ldots, F_{k-1}, F_k$ mit $F_i(x) = \alpha_i F_{i-2}(x) - q_i(x)F_{i-1}(x)$ mit
$\mathrm{grad}(F_i) < \mathrm{grad}(F_{i-1})(i > 2)$ $\alpha_i \in D, F_i \in D[x]$.
(Eine Wahl für α_o ist $f_{i-1}^{n_i - n_{i-1}+1}$ f_i HK von $F_{i-1}, n_i = \mathrm{grad}(F_i)$)

Pseudo-Division mit rest-primitiver EA (Forts.)

Primitiver EA $D[x]$ D mit GGT-Berechnung

procedure PEA (a(x),b(x))
begin
$c(x) := PP(a(x)); D(x) := PP(b(x));$
while $D(x) \neq 0$ **do**
begin
$r(x) := \mathrm{Prem}(c(x), D(x));$
$c(x) := D(x);$
$D(x) := PP(r(x));$
end
$\gamma := \mathrm{GGT}(\mathrm{cont}(a(x)), \mathrm{cont}(b(x));$
$g(x) := \gamma \cdot c(x);$ **return** $(g(x));$
end.

Beispiel

4.5 Beispiel in $\mathbb{Z}[x]$

$a(x) = 48x^3 - 84x^2 + 42x - 36$

$b(x) = -4x^3 - 10x^2 + 44x - 30$

Iter.	$r(x)$	$c(x)$	$d(x)$
0	$-$	$8x^3 - 14x^2 + 7x - 6$	$2x^3 + 5x^2 - 22x + 15$
1	$-68x^2 + 190x = 132$	$2x^3 + 5x^2 - 22x + 15$	$34x^2 - 95x + 66$
2	$4280x - 6420$	$34x^2 - 95x + 66$	$2x - 3$
3	0	$2x - 3$	0

$\gamma = \mathrm{GGT}(6, 2) = 2 \quad g(x) = 2 \cdot (2x - 3) = 4x - 6.$

Vorteil: Anwendbar auf $D[\bar{x}]$ für D ZPE mit GGT.

Problem: Wachstum der Koeffizienten bei PD mit Rest!

Beispiel

4.6 Beispiel

$a(x) = x^8 + x^6 - 3x^4 - 3x^3 + 8x^2 + 2x - 5$
$b(x) = 3x^6 + 5x^4 - 4x^2 - 9x + 21$

Koeffizienten der Polynome in der PP-Restefolge

a	1	0	1	0	-3	-3	8	2	-5
b			3	0	5	0	-4	-9	21
r					-15	0	3	0	-9
F_4							15795	30375	-59535
F_5					1254542875143750		-1654608338437500		
F_6					12593338795500743100931141992187500				

d. h. teilerfremd GGT 1

Vergleich mit EEA (oder EA) für $F[x]$!

Modulare Arithmetik

Wie prüft man für große Zahlen a, b, ob $a \cdot b = c$?

„Fingerprinting“ Technik:

Wähle SP-Primzahl p und teste, ob $a \cdot b \equiv c \mod p$,
d. h. $a \cdot b - c$ ist teilbar durch p oder $a \cdot b$ und c haben gleichen Rest nach Teilung durch p.

$a^* = a \mod p$, $b^* = b \mod p$, $c^* = c \mod p$ teste, ob
$a^* \cdot b^* \equiv c^* \mod p$ (Beachte mehr als $2 \cdot 10^{17}$ 64 Bit PZ).

Testen von Polynomgleichungen $f \cdot g = h$ oder Matrizen $A \cdot B = C$ durch Auswertung an einer Stelle.

Spezialfall von Berechnungen via Homomorphismen.
Hier: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$ oder $\mathbb{Z}_n$.

Darstellungen von $\mathbb{Z}_n$

- **Positive Darstellung**: Repräsentanten $\{0, 1, \ldots, n-1\}$
- **Symmetrische Darstellung**: Repräsentanten
  $\{-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ bzw. $\{-\frac{n}{2}+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \frac{n}{2}\}$
  Z.B.:: $\mathbb{Z}_7$ $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ bzw. $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

  $19 \bmod 7$ ist 5 in positiver Darstellung -2 in symmetrischer Darstellung.

  $-8 \bmod 7$ ist 6 in positiver Darstellung -1 in symmetrischer Darstellung.
- Addition, Multiplikation, Substraktion $\rightsquigarrow$ über Repräsentanten.
- $n = p$ Primzahl, so $\mathbb{Z}_p$ Körper: d. h. Inversen
  EEA, GGT$(m, p) = 1$, d. h. $s \cdot m + tp = 1$, $s \cdot m \equiv 1 \bmod p$.
- e arith. Ausdruck Berechnung von $e \bmod n$.

  $a \equiv b \bmod n \rightsquigarrow a * c \equiv b * c \bmod n$, $* \in \{+, -, \cdot\}$

Modulare Arithmetik in $R[x]$

Einfachste Moduli: $x - u$ mit $u \in R$.
Ist $f \in R[x]$, so hat $f(x) - f(u)$ u als Nullstelle, ist also durch $x - u$ teilbar.
Setzt man $q = (f(x) - f(u))/(x - u)$, so $f = q(x - u) + f(u)$ und da $f(u)$ konstant, ist sein Grad $< 1 = \text{grad}(x - u)$ oder
$f \equiv f(u) \bmod (x - u)$. $\rightsquigarrow$ Berechnung modulo $x - u$ ist Auswertung in u.

Auswertungsmorphismus $R[x] \to R[x]/(x - u)$.

- Restklassenring nach Ideal.
- Repräsentanten f rem m.
- $\mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_m[x] \to \mathbb{Z}_m[x]/(f)$

Modulare Arithmetik in $R[x]$ (Forts.)

4.7 Lemma Ist R euklidischer Bereich, a, $m \in R$, $S = R/mR$, $a \bmod m \in S$ Einheit gdw $\text{GGT}(a, m) = 1$.
Modulare Inverse kann mit EEA berechnet werden.

4.8 Beispiel $R = \mathbb{Z}$, $m = 29$, $a = 12$, $\text{GGT}(a, m) = 1$.
EEA: $5 \cdot 29 + (-12) \cdot 12 = 1$, d. h. $(-12) \cdot 12 \equiv 17 \cdot 12 = 1$, d. h. 17 ist Inverse von $12 \bmod 29$.

$R = \mathbb{Q}[x]$, $m = x^3 - x + 2$, $a = x^2$.
EEA: $\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)(x^3 - x + 2) + \left(-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)x^2 = 1$
d. h. $(-x^2 - 2x + 1)/4$ ist Inverse von $x^2 \bmod x^3 - x + 2$.

Beachte: $S = \mathbb{Z}_p$ p Primzahl oder $S = F[x]/(f)$, f irreduzibles Polynom
$\rightsquigarrow$ S ist Körper.
Endliche Körper $\mathbb{F}_p[x]/(f)$ mit $q = p^n$ Element ($\text{grad}(f) = n$).

Modulo irreduzible Polynome f

4.9 Lemma Sei F Körper, $f \in F[x]$ monisch, irreduzibel nicht konstant und $K = F[x]/(f)$. Dann ist K eine Körpererweiterung von F und $f(\alpha) = 0$ für $\alpha = (x \bmod f) \in K$.

Beweis: K ist Körper, da f irreduzibel, $F \subset K$, f nicht konstant.

$$f(\alpha) = f(x \bmod f) = (f(x) \bmod f) = 0$$

Modulo irreduzible Polynome f (Forts.)

4.10 Beispiel $R = \mathbb{F}_5[x]$, $f = x^3 - x + 2$, $a = x^2$.

f hat keine Nullstellen in $R = \mathbb{F}_5$, ist somit irreduzibel, da vom Grad 3.
$\rightsquigarrow F_{125} = F_5[x]/(f)$ ist Körper.

EEA f, a: $(-x-2)(x^3 - x + 2) + (x^2 + 2x - 1)x^2 = 1$

d. h. $x^2 + 2x - 1$ ist Inverse von $x^2 \bmod x^3 - x + 1$.
Setzt man $\alpha = x \bmod f$, so gilt

$$\alpha^2 + 2\alpha - 1 = (\alpha^2)^{-1} \text{ in } F_{125}$$

- Kosten der Operationen in $F[x]/(f)$: Addition, Multiplikation, Division.
  $O(n^2)$ Operationen in F.

Die Euler Funktion

Erinnerung:

Eulersche Funktion: $\varphi : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$

$$\begin{aligned} \varphi(m) &= |\{0 \leq a \leq m : \mathrm{GGT}(a, m) = 1\}| \\ &= |Z_m^x| \end{aligned}$$

wobei Z_m^x die Einheitengruppe von $\mathbb{Z}_m$ ist.
$\varphi(1) = 1$, $\varphi(p) = p - 1$, $\varphi(p^e) = p^e - p^{e-1} = (p-1)p^{e-1}$.

Schnelle Arithmetik

Wie schnell kann multipliziert/dividiert werden? Sind die Schranken für die Multiplikation bzw. Division von Langzahlen und Polynome, die wir abgeleitet haben, gut?

Multiplikation nach Karatsuba (1962 $b = 2$)

- Multiplikation von Langzahlen (oder Polynome).

Idee: Divide&Conquer Ansatz

$$u = (u_{2n-1} \cdots u_0)_b \qquad v = (v_{2n-1} \cdots v_0)_b \qquad \text{Basis } b$$

$$\boxed{\bar{u}_1 \mid \bar{u}_0} \qquad \boxed{\bar{v}_1 \mid \bar{v}_0} \qquad \text{d. h.}$$

$$u = \bar{u}_1 b^n + \bar{u}_0 \qquad v = \bar{v}_1 b^n + \bar{v}_0 \qquad \text{mit}$$

$$\bar{u}_1 = (u_{2n-1} \cdots u_n)_b \qquad \bar{u}_0 = (u_{n-1} \cdots u_0)_b$$

Reduktion:
Multiplikation Zahlen Länge $2n \rightarrow$ Multiplikation Zahlen Länge n

Schnelle Arithmetik (Forts.)

$$
\begin{aligned}
uv &= (\bar{u}_1 b^n + \bar{u}_0)(\bar{v}_1 b^n + \bar{v}_0) \\
&=^{*} \bar{u}_1\bar{v}_1 b^{2n} + (\bar{u}_1\bar{v}_0 + \bar{u}_0\bar{v}_1) b^n + \bar{u}_0\bar{v}_0 \\
&= \bar{u}_1\bar{v}_1 b^{2n} + [(\bar{u}_1 - \bar{u}_0)(\bar{v}_0 - \bar{v}_1) + \bar{u}_1\bar{v}_1 + \bar{u}_0\bar{v}_0] b^n + \bar{u}_0\bar{v}_0 \\
&=^{**} \bar{u}_1\bar{v}_1(b^{2n} + b^n) + (\bar{u}_1 - \bar{u}_0)(\bar{v}_0 - \bar{v}_1) b^n + \bar{u}_0\bar{v}_0(b^n + 1)
\end{aligned}
$$

- Aufwand nach $(*)$: $T(1) = 1 \quad T(2n) = 4T(n) + c \cdot n$

  für $n = 2^m : T(n) = T(2^m) = \hat{c}(2^m)^2 = \hat{c}n^2$

Schnelle Arithmetik (Forts.)

- Aufwand nach $(**)$:

  $T(1) = 1 \quad T(2n) = 3T(n) + c \cdot n$

  für $n = 2^m$:

$$\begin{aligned} T(n) &= 3(3T(2^{m-2}) + c \cdot 2^{m-2}) + c \cdot 2^{m-1} \\ &= 3^m T(1) + c \cdot 2^{m-1}(1 + 3/2 + \cdots + (3/2)^{m-1}) \\ &\approx \hat{c} \cdot 3^m = \hat{c}\ 2^{m \log_2 3} = \hat{c}\ n^{\log_2 3} \\ &\approx \hat{c}\ n^{1.585} \end{aligned}$$

Problem: Konstante größer als bei der Schulmethode, lohnt nur ab Zahlen $(b = 2)$ der Länge ≥ 500.
Zusatzplatz für Zwischenergebnis. Implementierung „in place“ Multiplikation.

Modulare Darstellung großer Zahlen

Grundlage: Chinesicher Reste Satz (CRT)
Sei R euklidischer Bereich $m_0, \ldots, m_n \in R$ paarweise teilerfremd (d. h. $\mathrm{GGT}(m_i, m_j) = 1 \quad i \neq j$) und sei
$m = m_0 \cdots m_n$

$$\begin{aligned} \Phi_i &: R \to R/\langle m_i \rangle \quad \textit{kan.Ring} - \textit{Homomorphismus} \\ & a \to a \bmod m_i \\ \Phi &= \Phi_0 \times \cdots \times \Phi_n : R \to R/\langle m_0 \rangle \times \cdots \times R/\langle m_n \rangle \\ & a \to (a \bmod m_0, \ldots, a \bmod m_n) \end{aligned}$$

Φ ist surjektiv mit Kern $\langle m \rangle$.

Modulare Darstellung großer Zahlen (Forts.)

Zeige:: Jede Zahl $a < m$ kann eindeutig durch Liste $a = (a_0, \ldots, a_n)$ mit $a_i = a \bmod m_i$ dargestellt werden.

Surjektivität: Behauptung:
Es gibt l_i mit $\Phi(l_i) = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots 0)$
$i = 0 : m_1 \ldots m_n = m/m_0$ $\mathrm{GGT}(m/m_0, m_0) = 1$ EEA liefert $s, t \in R$ mit
$s \cdot m/m_0 + t m_0 = 1 = \mathrm{GGT}(m/m_0, m_0)$.
Setze $l_0 = s \cdot m/m_0 \rightsquigarrow l_0 \equiv 0 \bmod m_j \quad 1 \leq j \leq n$

$$l_0 = s\frac{m}{m_0} \equiv s\frac{m}{m_0} + t m_0 = 1 \bmod m_0$$

d. h. $\Phi(l_0) = (1, 0 \cdots 0)$

$\rightsquigarrow$ Algorithmus zur Berechnung von a bei Vorgabe $a_0, \ldots, a_n$
(Lagrange, Garner).

Operationen via mod. Darstellungen

$a = (a_0, \ldots, a_n)$ $\qquad b = (b_0, \ldots, a_n)$ $\qquad a, b < m$

- $a + b < m \rightsquigarrow a + b = (c_0, \ldots, c_n)$ mit $c_i = a_i + b_i \mod m_i$
- $a \cdot b < m \rightsquigarrow a \cdot b = (c_0, \ldots, c_n)$ mit $c_i = a_i b_i \mod m_i$.

  Aufwand $O(n)$ Operationen (Hier $a_i + b_i \mod m_i$, bzw. $a_i \cdot b_i \mod m_i$) als Elementaroperation.

Operationen via mod. Darstellungen (Forts.)

Für $K[x]$ K Körper geht dies genauso!

$a_0, \ldots, a_n \in K$ verschiedene Elemente aus K.
$m_i(x) = (x - a_i) \quad m(x) = m_0(x) \cdots m_n(x)$

$$\Phi : K[x]/\langle m(x)\rangle \stackrel{\cong}{\to} K[x]/\langle m_0(x)\rangle \times \cdots \times K[x]/\langle m_n(x)\rangle$$

- Ist $a(x)$ Polynom von Grad höchstens n, so gilt
  $a(x) \bmod m(x) = a(x)$, $a(x) \bmod m_i(x) = a(a_i)$
- $\text{grad}(a(x)) \leq n \qquad \Phi(a(x)) = (a(a_0), \ldots, a(a_n))$

Operationen via mod. Darstellungen (Forts.)

Darstellung von Polynom a in **Koeffizientendarstellung**:

$a(x) \leftarrow (a_0, \ldots, a_n)$ mit $a(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

Auswertungsdarstellung:

$a(x) \leftarrow (\hat{a}_0, \ldots, \hat{a}_n)$ mit $\hat{a}_i = a(a_i)$

Multiplikation und Addition, Polynom $O(n)$ Operationen
Polynomgrad $\leq (n+1)/2$

$a(x) \cdot b(x) \leftarrow (\hat{a}_0 \cdot \hat{b}_0, \ldots, \hat{a}_n \cdot \hat{b}_n)$

Wie sieht es mit der Division aus?

4.11 **Beispiel** Lagrange Methode

a) $R = \mathbb{Z}$, $m_i = p_i^{e_i}$, $0 \leq i \leq n$, $p_i \in \mathbb{N}$ verschiedene Primzahlen, $e_i \in \mathbb{N}^+$

$m = \prod_{0 \leq i \leq n} = p_i^{e_i}$ ist Primfaktorzerlegung von $m \in \mathbb{Z}$.

(CRT) $\mathbb{Z}/\langle m \rangle \cong \mathbb{Z}/\langle p_0^{e_0} \rangle \times \cdots \times \mathbb{Z}/\langle p_n^{e_n} \rangle$

Für $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ beliebig berechnet ein (CRA) eine Lösung $a \in \mathbb{Z}$ der Kongruenzen $a \equiv a_i \bmod p_i^{e_i}$, $0 \leq i \leq n$

z. B. $n = 1$, $m_0 = 11$, $m_1 = 13$, $m = 11 \cdot 13 = 143$, finde $a \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq a < 143$ und $a \equiv 2 \bmod 11$, $a \equiv 7 \bmod 13$. Langrange Interpolanden.

EEA für $11, 13 : s_0 \cdot 13 + s_1 \cdot 11 = 6 \cdot 13 + (-7) \cdot 11 = 1$, d. h.

$l_0, l_1 : l_0 = 6 \cdot 13 = 78$, $l_1 = (-7) \cdot 11 = -77$.

$l_0 \equiv 1 \bmod 11$, $l_0 \equiv 0 \bmod 13$, $l_1 \equiv 0 \bmod 11$, $l_1 \equiv 1 \bmod 13$.

$c_0 = a_0 s_0 \bmod 11 = 2 \cdot 6 \bmod 11 = 1$, $c_1 \equiv 7 \cdot (-7) \bmod 13 = 3$ und somit $a = c_0 \frac{m}{m_0} + c_1 \frac{m}{m_1} = 1 \cdot 13 + 3 \cdot 11 = 46 = 4 \cdot 11 + 2 = 3 \cdot 13 + 7$.

Beispiel (Forts.)

b) $R = F[x]$, $m_i = x - a_i$, $0 \leq i \leq n$, $a_0, \ldots, a_n \in F$ (pv).

$f \equiv f(a_i) \bmod (x - a_i)$, $0 \leq i \leq n$, $f \to (f(a_0), \ldots, f(a_n))$

d. h. Auswertungshom. in $a_0, \ldots, a_n$, F^{n+1} koordinatenweise Operationen.

$l_i \equiv 1 \bmod (x - a_i)$ $\quad$ $l_i \equiv 0 \bmod (x - a_j), j \neq i$

$\text{grad}(l_i) \leq n$ sind die Lagrange Interpolanden

$$l_i = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}$$

Für $b_0, \ldots, b_r \in F$, so $f = \sum_{0 \leq i \leq n} b_i l_i$ Lagrange Interpolationspolynom mit $f(a_i) = b_i$ für $0 \leq i \leq n$.

d. h. Chinesische Reste Algorithmus für $n+1$ Lin Polynome ist Interpolation in $n+1$ Werte. Polynom ist eindeutig: Grad$\leq n$.

Die schnelle Fourier Transformation (FFT) Anwendung auf Polynommultiplikation

Koeffizientendarstellung $\overset{\text{Auswertung}}{\underset{\text{Interpolation}}{\longleftrightarrow}}$ Wertedarstellung.

Cooley, Tukey: An algorithm for machine calculation of complex fourier series, Math. Comp. 19 (1965) 297-301.

Idee: Fourier Transformierte: Reduktion auf einfachere Operationen

$$\text{trans}(f * g) = \text{trans}(f) \oplus \text{trans}(g)$$

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$

Um $a \cdot b$ zu berechnen: $\log(a), \log(b) \rightsquigarrow \log(a) + \log(b)$
$\rightsquigarrow \text{trans}^{-1}(\quad) = a \cdot b$.

Die allgemeine Fourier Transformation

Die Variablen t unf f stehen für Zeit und Frequenz

$$\mathcal{F}(a) :: A(f) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t) e^{2\pi i f t} dt$$

$$\mathcal{F}^{-1}(A) :: a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(f) e^{-2\pi i f t} df$$

Diskrete Fourier Transformation

$a_0, \ldots, a_{n-1}$ reelle Zahlen, i komplexe Zahl mit $i^2 = -1$, seien

$$A_j := \sum_{k=0}^{n-1} a_k e^{2\pi ijk/n} \qquad 0 \leq j < n$$

$$a_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} A_j e^{-2\pi ijk/n} \qquad 0 \leq k < n$$

Interpretation: Auswertung eines Polynoms $a(x)$ an n-Stellen.
D.h.:: $a(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$
$A_j = a(\omega^j)$, wobei $\omega = e^{2\pi i/n}$, $\omega^n = 1$ n -te Einheitswurzel
d. h.
$\omega^j = e^{2\pi ij/n}$, $(\omega^j)^k = e^{2\pi ijk/n}$.

Diskrete Fourier Transformation

Koeffizienten Darstellung zur modularen Darstellung (d. h. Wertedarstellung an speziellen Stellen)

$x_0, \ldots, x_{n-1}$ (hier $x_j = \omega^j$ ω nte-Einheitswurzel.)

$T_{(x_0,\ldots,x_{n-1})}(a_0, \ldots, a_{n-1}) = (\hat{a}_0, \ldots, \hat{a}_{n-1})$, wobei
$\hat{a}_i = a_0 + a_1 x_i + \cdots + a_{n-1} x_i^{n-1}$.
Setzt man $a(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$
$\rightsquigarrow$ Auswertung von Polynomen vom Grad höchstens $n-1$ an den Stellen $\{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$.

Auswertung eines Polynoms vom Grad $n-1$ (Horner's Regel) an einer Stelle kostet $O(n)$ Operationen (in R). Übliche Kosten an n Stellen $\rightsquigarrow O(n^2)$.

Ziel: Reduktion dieser Kosten auf $O(n \log n)$ durch geeignete Wahl der Auswertungsstellen x_i: prim. E.W.

Diskrete Fourier Transformation: Die Auswertung

Angenommen n gerade, dann $a(x) = b(x^2) + x \cdot c(x^2)$, wobei

$b(y) = a_0 + a_2 y + \cdots + a_{n-2} y^{n/2-1}$, $c(y) = a_1 + a_3 y + \cdots + a_{n-1} y^{n/2-1}$.

Hierbei haben $b(y)$ und $d(y)$ grad $\leq$ grad$(a(x))/2$.

4.12 Lemma Sei $\{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ Punktmenge in R, die die Symmetriebedingung
(*) $x_{(n/2)+i} = -x_i$, $i \in \{0, 1, \ldots, n/2 - 1\}$ erfüllt.

Es gibt ein Auswertungsverfahren, so das für die Kosten $T(n)$ für die Auswertung eines Polynoms vom Grad $n-1$ an dieser Punktmenge, gilt

$T(1) = 0$ und $T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + c \cdot \frac{n}{2}$

für geeignete Konstante c.

Diskrete Fourier Transformation: Die Auswertung

Beweis: Wegen (*) gilt
$x_0^2 = x_{n/2}^2$, $x_1^2 = x_{n/2+1}^2 \cdots x_{n/2-1}^2 = x_{n-1}^2$,
d. h. es gibt nur $n/2$ verschiedene Quadrate, d. h.

- a vom Grad höchstens $n-1$ kann an den Stellen $\{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ ausgewertet werden, durch Auswertung der Polynome b und c an den Stellen $\{x_0^2, \ldots, x_{n/2-1}^2\}$, diese sind vom Grad höchstens $\frac{n}{2} - 1$.
- Hinzukommen $n/2$ Multiplikationen (Berechnung von x_j^2) und $\frac{n}{2}$ Multiplikationen, Additionen und Substraktionen, um die Werte zu kombinieren. $\rightsquigarrow$ Behauptung.

Die schnelle Fourier Transformation verwendet dieses Lemma rekursiv, d. h. Symmetrie-Eigenschaft muss für die $n/2$ Punkte gelten usw.

Symmetriebedingung: Primitive Einheitswurzeln

4.13 Definition Primitive Einheitswurzeln
Sei R kommutativer Ring, $\omega \in R$ ist prim. n-te EW gdw

1. $\omega^n = 1$
2. $\omega^i \neq 1$ für $0 < i < n$ (insb. $\omega \neq 1$)
3. $\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{jp} = 0$ für $1 \leq p < n$

Die Menge $\{1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}\}$ ist die Menge der Fourier Punkte zur n-ten EW ω.

Diskrete Fourier Transformation bzgl. Primitiven Einheitswurzeln

Voraussetzung:
n besitze eine multiplikative Inverse in R (z. B. wenn R Körper)

Seien
$A = (A_{ij})_{n\times n}$ mit $A_{ij} = \omega^{ij}$, $0 \leq i, j \leq n$, $\mathfrak{a} = [a_0, \ldots, a_{n-1}]^T$, dann

$$F(\mathfrak{a}) := A\mathfrak{a}, \text{ wobei } F(\mathfrak{a})_i = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{ik}$$

heißt diskrete Fourier Transformierte von $\mathfrak{a}$ (bzgl. ω).

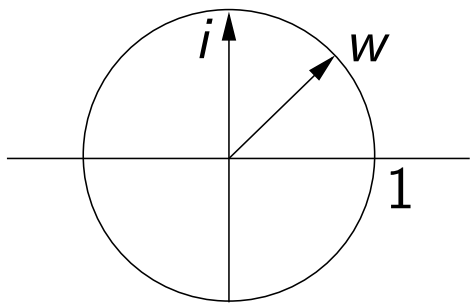
Beispiel

4.14 Beispiel

a) Sei $R = \mathbb{C}$ komplexe Zahlen, $n = 8$

$\omega = e^{2\pi i/8} = e^{\pi i/4} = \frac{(1+i)}{\sqrt{2}}$ ist primitive 8-EW.

$\omega^2 = e^{\pi i/2} = i$ erfüllt auch
$(\omega^2)^8 = 1$, aber $(\omega^2)^4 = 1$,
d. h. ω^2 ist 8-Wurzel von 1,
aber nicht primitiv.



$$\sum_{j=0}^{8-1} e^{\pi ij/4} = 1 + e^{\pi i/4} + e^{\pi i/2} + e^{3\pi i/4} + \cdots + e^{7\pi i/4} = 0$$

(heben sich paarweise auf!)

Beispiel (Forts.)

b) $R = \mathbb{Z}_{17}$, $n = 4$. 4 ist eine 4 EW, da $4^4 = 256 \equiv 1 \mod 17$.
Sie ist auch primitiv, da $4^2 = 16$ und $4^3 = 13$ und $\sum_{j=0}^{3} 4^j = 0$ $(\mathbb{Z}_{17})$.

Fourier Punkte: $\{1, 4, 4^2, 4^3\} = \{1, 4, 16, 13\}$

Diskrete Fourier Transformation:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 16 & 13 \\ 1 & 16 & 1 & 16 \\ 1 & 13 & 16 & 4 \end{bmatrix} : (\mathbb{Z}_{17})^4 \to (\mathbb{Z}_{17})^4$$

Symmetriebedingung für PEW

4.15 Lemma
Ist ω eine primitive n-te EW, so erfüllen die n Fourier Punkte die Symmetriebedingung *

Beweis:
Da ω primitive n-te EW ist, gilt

$(\omega^{n/2+j})^2 = \omega^n(\omega^j)^2 = (\omega^j)^2$, d. h.

$(\omega^{n/2+j} - \omega^j)(\omega^{n/2+j} + \omega^j) = ((\omega^{n/2+j})^2 - (\omega^j)^2) = 0$

Ist $\omega^{n/2+j} - \omega^j = 0$ so $\omega^{n/2} = 1$ ↯.

Also $\omega^{n/2+j} + \omega^j = 0$, d. h. $\omega^{n/2+j} = -\omega^j$.

(R muss wohl Integerbereich sein?).

Symmetriebedingung: Rekursiv

4.16 Lemma
Sei ω primitive n-te EW, n gerade. Dann

a) ω^2 ist primitive $n/2$-EW.

b) Die $n/2$ Quadrate $\{1, \omega^2, \omega^4, \ldots, \omega^n\}$ erfüllen die Symmetriebedingung *.

Beweis:
Wegen $(\omega^2)^{n/2} = \omega^n = 1$ ist ω^2 $n/2$-EW.
Sie ist auch primitiv, da für $k < n/2$ mit $(\omega^2)^k = 1$ folgt $\omega^{2k} = 1$ mit $2k < n$.
Die zweite Behauptung folgt aus vorherigem Lemma.

Grundlage für die rekursive Auswertung der Fouriertransformation ist für primitive 2^m-EW gegeben.

Beispiel: PEW

4.17 Beispiel $\mathbb{Z}_{41}, n = 8$ symmetrische Darstellung von $\mathbb{Z}_{41}$

14 primitive 8-EW mit Fourier Punkte $\{1, 14, -9, -3, -1, -14, 9, 3\}$

$14^2 = -9$ ist primitive 4-EW mit Fourier Punkte $\{1, -9, -1, 9\}$.

$(-9)^2 = -1$ ist primitive 2-EW mit Fourier Punkte $\{1, -1\}$.

Sei $a(x) = 5x^6 + x^5 + 3x^3 + x^2 - 4x + 1 \in \mathbb{Z}_{41}[x]$.

$a(x) = b(y) + xc(y)$ für $y = x^2$ und $b(y) = 5y^3 + y + 1$,
$c(y) = y^2 + 3y - 4$.
Auswertung von $a(x)$ an den 8 Punkten $\{1, 14, -9, -3, -1, -14, 9, 3\}$:
Werte $b(y)$ und $c(y)$ an $\{1, -9, -1, -9\}$
$b(y) = d(z) + ye(z)$, wobei $z = y^2$, $d(z) = 1$, $e(z) = 5z + 1$.
Werte $d(z)$ und $e(z)$ an $\{1, -1\}$.
$d(1) = 1, e(1) = 6 \rightsquigarrow b(1) = 7, b(-1) = -5$.
$d(-1) = 1, e(-1) = -4 \rightsquigarrow b(-9) = -4, b(9) = 6$.
Analog $c(1) = 0$, $c(-1) = -2$, $c(-9) = 9$, $c(9) = -19$ und
$a(3) = b(9) + 3c(9) = -10$ und $a(-3) = b(9) - 3c(9) = -19$.
Ergebnis: $A \leftarrow \mathrm{FFT}(8, 14, a(x)) = (7, -1, 8, -19, 7, -7, -18, -10)$

Schnelle Fourier Transformation (FFT)

procedure $FFT(N, \omega, a(x))$
begin $\{N$ Potenz von $2, \omega$ primitive n-te EW, $a(x)$ Polynom$\}$
$\{$mit Grad $(a(x)) \leq N-1$. Ausgabe N Komponenten der FFT$\}$
if N=1 **then**
$A_0 := a_0$
else
begin
$b(x) := \sum_{i=0}^{N/2-1} a_{2i} \cdot x^i; c(x) := \sum_{i=0}^{N/2-1} a_{2i+1} \cdot x^i;$
$B := FFT(N/2, \omega^2, b(x)); C := FFT(N/2, \omega^2, c(x));$
for i from 0 **to** $N/2-1$ **do**
begin
$A_i := B_i + \omega^i C_i; A_{N/2+i} := B_i - \omega^i C_i;$
end
end
return $((A_0, A_1, \ldots, A_{N-1}))$;
end.

Schnelle Fourier Transformation (FFT): Analyse

Aufwand: $O(n \log n)$ Operationen: Sei $n = 2^m$ dann

$$T(1) = 0,\ T(2^k) = 2T(2^{k-1}) + c2^{k-1} \quad k \geq 1$$

$$\begin{aligned} T(n) &= T(2^m) = 2T(2^{m-1}) + c2^{m-1} = 2^2 T(2^{m-2}) + c2^{m-1}2 \\ &= 2^3 T(2^{m-3}) + c2^{m-1}3 \cdots = 2^m T(1) + c2^{m-1}m \\ &= c2^{m-1}m = c\frac{n}{2}\log n \end{aligned}$$

Beachte: Eignet sich gut für Parallelisierung: Rekurrenzgleichung:

$$T^p(2^k) = T^p(2^{k-1}) + c2^{k-1}$$

(FFT):: Ergebniss

Modulare Darstellung eines Polynoms vom Grad $N-1$ an N-Fourierpunkte kann mit $O(N \log N)$ Grundoperationen in R (K) berechnet werden.

$$\underset{\text{grad} \leq N-1}{R[x]} \longrightarrow R[x]/(x-\omega^0) \times \cdots \times R[x]/(x-\omega^{N-1})$$

Wie sieht es mit der Umkehrung aus

$$T_{(x_0,\ldots,x_{N-1})} \leftrightarrow V(x_0,\ldots,x_{N-1}) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 \cdots (x_0)^{N-1} \\ 1 & x_1 \cdots (x_1)^{N-1} \\ \vdots & \\ 1 & x_{N-1} \cdots (x_{N-1})^{N-1} \end{vmatrix}$$

Vandermonde Matrix

Inverse für Vandermonde Matrix

Finde Inverse der Vandermonde Matrix: Gauss Elimination $O(N^3)$

Polynominterpolation:
Gegeben N Punkte $(q_0, \ldots, q_{N-1}) \in R$, finde Polynom vom Grad höchstens $N-1$ mit

$$\hat{a}_i = a(x_i) = q_i \text{ für } i = 0, 1, \ldots, N-1$$

Lagrange Interpolation oder **Newton Interpolation**
Kosten $O(N^2)$ Operationen.

Inverse Fourier Transformation

4.18 Definition
Die Inverse diskrete Fourier Transformation (IDFT) für eine Menge Fourier Punkte ist definiert durch

$$S_{(1,\omega\cdots\omega^{N-1})}(q_0,\ldots,q_{N-1}) = (\bar{q}_0,\ldots,\bar{q}_{N-1})$$

wobei

$$\bar{q}_j = N^{-1}\sum_{k=0}^{N-1} q_k(\omega^{-j})^k$$

Hierbei ist ω primitive n-te EW.

4.19 Satz DFT und IDFT sind inverse Transformationen, d. h.

$$T_{(1,\omega,\ldots,\omega^{N-1})}\ \ S_{(1,\omega,\ldots,\omega^{N-1})} = ID,\ S_{(1,\omega,\ldots,\omega^{N-1})}\ \ T_{(1,\omega,\ldots,\omega^{N-1})} = ID$$

Inverse Fourier Transformation

Beweis: Sei $0 < p < N$. Dann
$(\omega^p)^N = (\omega^N)^p = 1$ und $(\omega^p) \neq 1$. Da ω PEW
$(x^N - 1) = (x-1)(x^{N-1} + x^{N-2} + \cdots + x + 1)$, d. h. ω^p ist Nullstelle
von $x^{N-1} + \ldots + x + 1 \rightsquigarrow 0 = (\omega^p)^{N-1} + (\omega^p)^{N-2} + \cdots + (\omega^p) + 1$.
Für $0 < p < N$ und $-N < p < 0$ (Mult. $\omega^{-p(N-1)}$).
Für $p = 0$ ist der Ausdruck N.
Sei $T_{(1,\omega,\ldots,\omega^{N-1})}(a_0, \ldots, a_{N-1}) = (\hat{a}_0, \ldots, \hat{a}_{N-1})$ mit

$$\hat{a}_i = \sum_{j=0}^{N-1} a_j (\omega^i)^j,\ i = 0, \ldots, N-1$$

$$N^{-1} \sum_{i=0}^{N-1} \hat{a}_i \omega^{-ki} = N^{-1} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} a_j \omega^{ij} \omega^{-ki}$$

$$= N^{-1} \sum_{j=0}^{N-1} a_j \sum_{i=0}^{N-1} \omega^{ij} \omega^{-ki} = N^{-1} \sum_{j=0}^{N-1} a_j \left(\sum_{i=0}^{N-1} \omega^{(j-k)i} \right) = a_k$$

Inverse Fourier Transformation

$$
\begin{aligned}
V(1,\omega,\ldots,\omega^{N-1})^{-1} &= N^{-1}\begin{vmatrix} 1 & 1\cdots 1 \\ 1 & \omega^{-1}\cdots\omega^{-(N-1)} \\ \vdots & \\ 1 & \omega^{-(N-1)}\cdots\omega^{-(N-1)^2} \end{vmatrix} \\
&= N^{-1}V(1,\omega^{-1},\ldots,\omega^{-(N-1)})
\end{aligned}
$$

Beispiel

4.20 Beispiel In $\mathbb{Z}_{17}$, $\omega = 4$ primitive 4-te EW.
Inverse $S_{(1,4,16,13)} : (\mathbb{Z}_{17})^4 \to (\mathbb{Z}_{17})^4$

$$(4^{-1}) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 13 & 16 & 4 \\ 1 & 16 & 1 & 16 \\ 1 & 4 & 16 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 16 & 4 & 1 \\ 13 & 4 & 13 & 4 \\ 13 & 1 & 4 & 16 \end{vmatrix}$$

Sowohl T als auch S sind Fourier Transformationen.

- $T_{(1,\omega,\ldots,\omega^{N-1})}\vec{p} = \vec{q}$
- $N^{-1}\, T_{(1,\omega^{-1},\ldots,\omega^{-(N-1)})}\vec{q} = \vec{p}$. Da ω^{-1} primitive n-te EW.

Die inverse Fourier Transformation kann mit $O(N \log N)$ Operationen berechnet werden.

Schnelle Polynommultiplikation

$a(x)$ grad m $\qquad$ $a(x) \cdot b(x)$ $\qquad$ grad $m+n$
$b(x)$ grad n

- Sei $N = 2^k > m+n$ $\qquad$ ω prim. N-te EW
- $T_{(1,\omega,\ldots,\omega^{N-1})}(a_0,\ldots,a_m,0,\ldots,0) = (\hat{a}_0,\ldots,\hat{a}_m,\ldots,\hat{a}_{N-1})$
- $T_{(1,\omega,\ldots,\omega^{N-1})}(b_0,\ldots,b_n,0,\ldots,0) = (\hat{b}_0,\ldots,\hat{b}_n,\ldots,\hat{b}_{N-1})$
- $a(x) \cdot b(x) = (c_0, c_1, \ldots, c_{m+n})$
- $T_{(1,\omega,\ldots,\omega^{N-1})}(c_0,\ldots,c_{m+n},0,\ldots,0) = (\hat{a}_0\hat{b}_0,\ldots,\hat{a}_{N-1}\hat{b}_{N-1})$

Schnelle Fourier Polynommultiplikation

procedure FFT_Multiplikation(a(x),b(x),m,n)
begin {Eingabe: Polynome a, b vom Grad m, n}
{Berechne $c(x) = a(x) \cdot b(x)$ mit FFT's}
$N :=$ erste Zweierpotenz größer als $m+n$; $\omega :=$ primitive N-te EW;
$A := FFT(N, \omega, a(x))$; $B := FFT(N, \omega, b(x))$;
for i from 0 **to** $N-1$ **do**
begin
$C_i := A_i B_i$;
end

$$C := N^{-1} FFT(N, \omega^{-1}, C(x)); c(x) := \sum_{i=0}^{N-1} C_i x^i;$$

return (c(x))
end.

Aufwand (ohne Berechnungskosten für ω) $(O((m+n)\log(m+n))$
Grundoperationen in R.
Kommt zum Tragen erst für $m+n \geq 600$ (Moenck)

Beispiel

4.21 Beispiel

$a(x) = 3x^3 + x^2 - 4x + 1$
$b(x) = x^3 + 2x^2 + 5x - 3$ $(\mathbb{Z}_{41})$
14 primitive 8-te EW (wie eben).

$$\begin{aligned}
A &= FFT(8, 14, a(x)) = (1, 9, -19, -18, 3, 16, 19, -3) \\
B &= FFT(8, 14, b(x)) = (5, 5, 0, 14, -7, -6, -10, 16) \\
C &= (5, 4, 0, -6, 20, -14, 15, -7) \\
&= FFT(8, 14, a(x)b(x)) \\
c &= 8^{-1} FFT(8, 3, -7x^7 + 15x^6 - 14x^5 + 20x^4 - 6x^3 \\
&\quad +4x + 5) \\
&= (-3, 17, 20, -11, 13, 7, 3, 0) \\
c(x) &= 3x^6 + 7x^5 + 13x^4 - 11x^3 + 20x^2 + 17x - 3
\end{aligned}$$

Berechnung primitiver n-ter EW

- $F = \mathbb{C}$ einfach $\omega = e^{2\pi i/n}$

  z. B. $e^{\pi i/6} = (\sqrt{3} + i)/2$ ist primitive 12-te EW in $\mathbb{C}$

- $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}_p$

4.22 Satz $\mathbb{Z}_p$ hat primitive n-te EW gdw $n \mid p-1$.

Beweis: Ist w primitive n-te EW in $\mathbb{Z}_p$, so bildet die Menge der Fourier Punkte $\{1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}\}$ eine zyklische Untergruppe der multiplikativen Gruppe von $\mathbb{Z}_p$. Diese hat $p-1$ Elemente $\rightsquigarrow n \mid p-1$ (Lagrange).

Die multiplikative Gruppe endlicher Körper ist zyklisch. Sei α erzeugendes Element der multiplikativen Gruppe von $\mathbb{Z}_p$: $\mathbb{Z}_p^x = \{1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{p-2}\}$ mit $\alpha^{p-1} = 1$
Sei $n \mid p-1$. Setzt man $\omega = \alpha^{p-1/n}$, so gilt $\omega^n = \alpha^{p-1} = 1$, d. h. ω ist n-te EW. Für $0 < k < n$, gilt $(p-1) \cdot k/n < (p-1)$,
$\omega^k = \alpha^{(p-1)k/n} \neq 1$, also ist ω primitive n-te EW.

Berechnung primitiver n-ter EW

4.23 Beispiel In $\mathbb{Z}_{41}$ gilt $8 \mid (41-1)$, d. h. es gibt primitive 8-te EW in $\mathbb{Z}_{41}$, z. B. 14 ist primitive 8-te EW in $\mathbb{Z}_{41}$.
Wie bestimmt man eine primitive n-te EW, wenn $n \mid p-1$ testen ! oder finde erzeugende für $\mathbb{Z}_p^x$.

Anwendung $\boldsymbol{n = 2^r}$ für Fourier-Transformation $2^r \mid p-1$ oder $p = 2^r k + 1$ für ein k ungerade.
Solche Primzahlen heißen Fourier Primzahlen zu 2^r.
Vorteil: Es gibt viele primitive Elemente.
Hilfsatz: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{GGT}(a,b) = 1$. Die Anzahl der Primzahlen $\leq x$ der Form $ak + b$, $k = 1, 2, \ldots$ ist in etwa

$$\frac{x}{\log x \cdot \Phi(a)} \ (\Phi \text{ Euler Funktion}).$$

Da alle ungeraden Zahlen $< 2^r$ teilerfremd zu 2^r sind und dies die Hälfte der ganzen Zahlen ist, gilt $\Phi(2^r) = 2^{r-1}$, d. h. es gibt etwa $\dfrac{x}{\log x \cdot 2^{r-1}}$ Fourier Primzahlen $\leq x$.

Berechnung primitiver n-ter EW

4.24 Beispiel Sei $x = 2^{31}$ SP-Zahlen 32 Bit Wörter. Für $r = 20$
$\rightsquigarrow \frac{2^{31}}{\log(2^{31}) \cdot \Phi(2^{19})} \approx 130$ Primzahlen der Form $2^e \cdot k + 1$, $e \geq 20$ im Intervall $2^{20} << 2^{31}$.

Jede solche Fourier Primzahl kann zur Berechnung von FFT's der Größe 2^{20} verwendet werden.

4.25 Satz a ist erzeugendes Element für $\mathbb{Z}_p^x$ gdw $a^{(p-1)/q} \neq 1 \bmod p$ für jeden Primfaktor von $p-1$.

Beweis folgt aus Lagrange ($H \leq G \rightsquigarrow |H| \mid |G|$)

$\rightsquigarrow$ Probabilistischer Algorithmus um erzeugendes Element für $\mathbb{Z}_p^x$:
Faktorisiere $p-1$ (möglich für $p \approx 2^{31}, 2^{63}$?) vorprozess. Wähle zufällig $a \in \{2, \ldots, p-1\}$, berechne $a^{p-1/q}$ für alle Teiler q von $p-1$.

Beispiel

4.26 Beispiel

Wegen $41 - 1 = 40 = 2^3 \cdot 5$, Primfaktoren $2, 5$,
d. h. ein Element a erzeugt $\mathbb{Z}_{41}^*$, falls $a^8 \neq 1 \neq a^{20}$, z. B.

$$15: \quad \underbrace{15^8 = 18 \bmod 41}_{\neq 1} \quad \underbrace{15^{20} \equiv -1 \bmod 41}_{\neq 1}$$

Also ist 15 ein erzeugendes Element für $\mathbb{Z}_{41}^x$, ist insbesondere eine primitive 40 EW in $\mathbb{Z}_{41}$, da $15^{40} = 1 \bmod 41$ und $\alpha^P \neq 1 \bmod 41$ für $0 < p < 40$.

Die Anzahl der Erzeugenden für $\mathbb{Z}_p^x$ ist $\Phi(p-1)$, d. h. Anteil $\Phi(p-1)/(p-1) \approx 3/\pi^2$, 0.3 Wahrscheinlichkeit.

Beispiel (Forts.)

$\mathbb{Z}_m$ N gegeben, bestimme m und ω, $N = 2^k$

- N invertierbar in $\mathbb{Z}_m \rightsquigarrow \mathrm{GGT}(N, m) = 1$.
- $$a \in R, N = 2^k \rightsquigarrow \sum_{i=0}^{N-1} a^i = \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 + a^{2^i}\right) \text{ Ind. nach } k$$
$$= (1 + a) \sum_{i=0}^{N/2-1} \left(a^2\right)^i$$
- Sei $m = \omega^{N/2} + 1$ mit $\omega \in R$, $\omega \neq 0$. Dann
$$\sum_{i=0}^{N-1} \omega^{ip} \equiv 0 \bmod m \text{ für } 1 \leq p < N$$

Beispiel (Forts.)

Beweis: Zeige $1 + \omega^{2^j p} \equiv 0 \bmod m$ für ein j $0 \leq j < k$. Sei $p = 2^s p'$ mit p' ungerade, dann $0 \leq s < k$. Wähle j mit $j + s = k - 1 \rightsquigarrow 1 + \omega^{2^j p} = 1 + \omega^{2^{k-1} p'} = 1 + (m-1)^{p'}$ wegen $(m-1) \equiv -1 \bmod m$, p' ungerade $\rightsquigarrow (m-1)^{p'} \equiv -1 \bmod m$, $\rightsquigarrow$ Behauptung.

4.27 Satz

Seien n, ω positive Potenzen von 2 und $m = \omega^{n/2} + 1$, dann besitzt n Inverse in $\mathbb{Z}_m$ und ω ist in $\mathbb{Z}_m$ primitive n-te EW.

Beweis: $\omega \neq 1 \quad \omega^n = \omega^{n/2} \cdot \omega^{n/2} \equiv (-1)(-1) \bmod (\omega^{n/2} + 1)$.

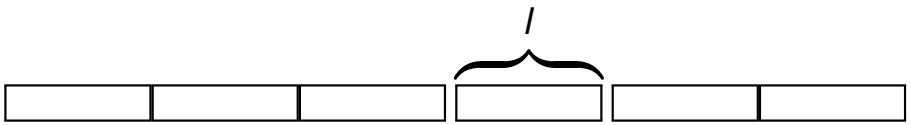
Problem: primitive EW $R[x]/\langle x^n + 1 \rangle$

$$x^n \equiv -1 \bmod (x^n + 1) \qquad x^{2n} = (x^n)^2 \equiv 1 \bmod (x^n + 1)$$

$\omega = (x \bmod (x^n + 1))$ ist $2n$-te EW.

Anwendung FFT auf Langzahlmultiplikation

Multiplikation nach Schönhage-Strassen:: $\mathrm{div}\ \ \&\ \ \mathrm{conq} + \mathrm{FFTA}$
Idee: Partitionierung der Zahlen in b-Blöcke der Länge l, d. h. $n = b \cdot l$, falls n Länge der Eingabezahlen.



b-Blöcke

Die b-Blöcke werden als Koeffizienten eines Polynoms (vom Grad $b-1$) mit Koeffizienten $< 2^l$ aufgefasst.
Wertet man diese Polynome an geeigneten Stellen aus, multipliziert diese Werte und interpoliert, so lässt sich das Produkt bestimmen.
FFT + Faltungssätze.

Aufwand: $O(n \log n \log\log n)$ für die Multiplikation von Langzahlen der Länge n. Siehe von zur Gathen/Gerhard pp.225.

Modulare Algorithmen: Allgemeine Methoden

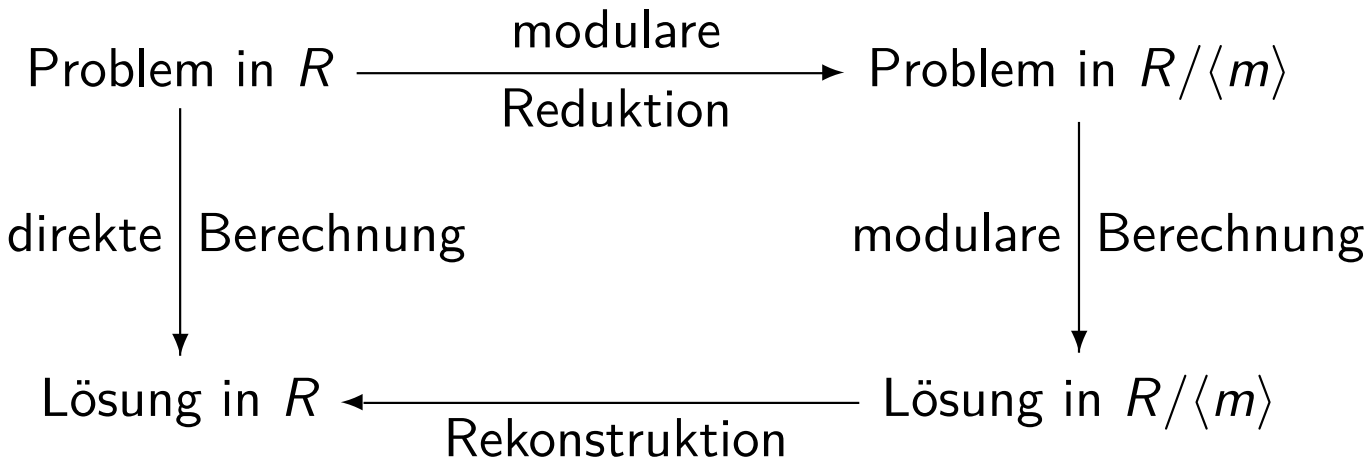
Anwendungsfälle

- FFT-Anwendung zur Multiplikation von Polynomen.
- GGT-Berechnung in $\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{m_0} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_k}$ um Koeffizientenwachstum zu vermeiden.
- $\mathbb{Z}[x] \quad \rightarrow \quad \mathbb{Z}_p[x]$
  nicht euklid euklidisch
- Faktorisierung, Wurzelberechnung,...

3 Varianten:
Big-Prime, Small-Primes, Prime-Power

Modulare Methoden: Big-Prime

Big-Prime: R euklidisch $m = p$

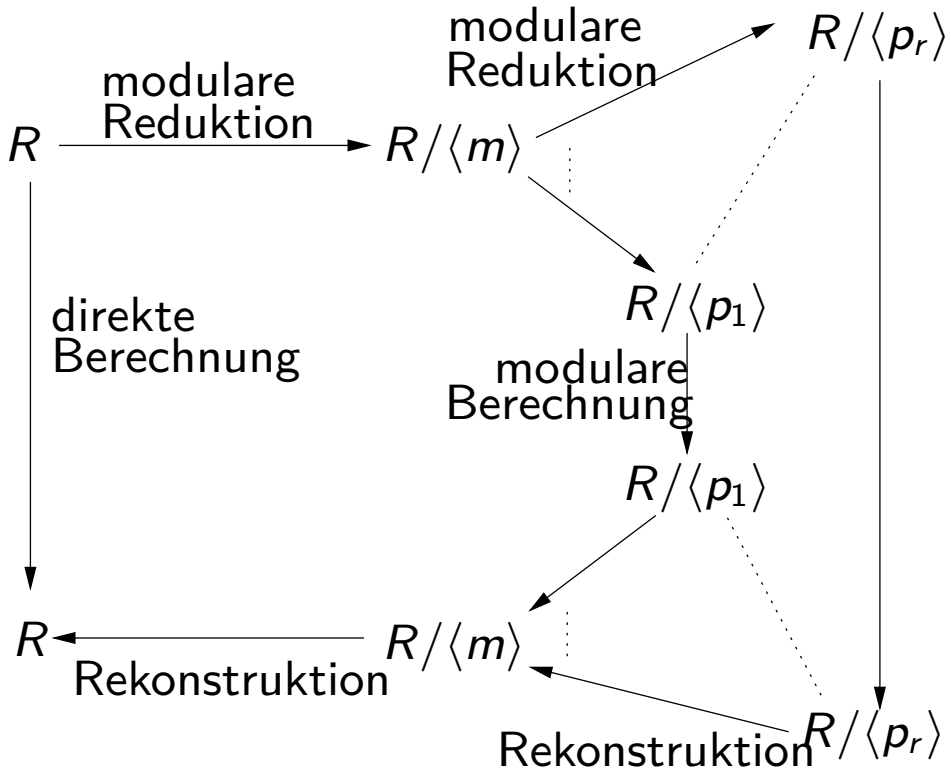


Benötigt werden:

- Schranke für die Lösung in R.
- Finde geeignete Moduli.

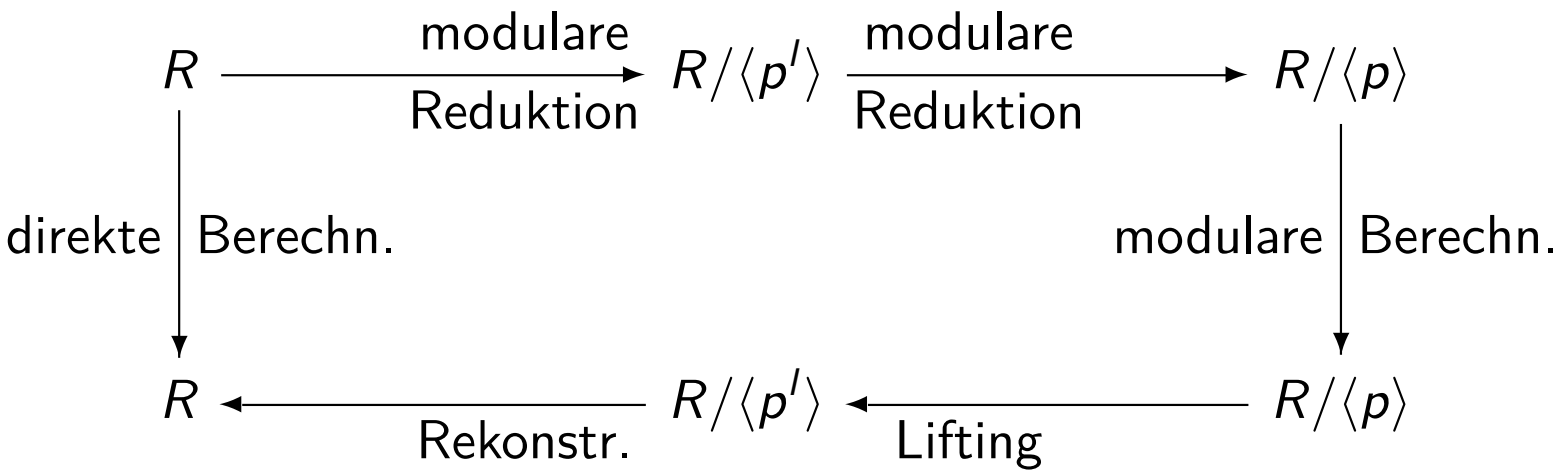
Modulare Methoden: Small-Primes

- **Small Primes**:: $m = p_1 \dots p_r \qquad p_i \neq p_j (i \neq j)$



Modulare Methoden: Prime Power

- **Prime-Power**:: $m = p^l$ p Primzahl



- Wahl der p_i steht frei, z. B. Fourier Primzahlen (schnelle Polynomarithmetik)
- Verteilung (Parallelisierung)

Chinesische Reste Algorithmen

Die Algorithmen von Garner und Newton:
Umkehrung modularer- und Auswertungshomomorphismen.

4.28 Beispiel Wachstum der Zwischenergebnisse.
Systeme linearer Gleichungen. Gauss Methode::

$$\begin{array}{rcl} 22x+44y+74z=1 & \text{Gauss} & 22x+44y+74z=1 \\ 15x+14y-10z=-2 & \rightsquigarrow & -352y-1330z=-59 \\ -25x-28y+20z=34 & \text{Elimin.} & 484y+2290z=773 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} \overset{*}{\rightsquigarrow} & 1257315840x & = & 7543895040 \\ & -57150720y & = & 314328960 \\ & 162360z & = & 243540 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \quad x=6 \quad y=-11/2 \quad z=3/2$$

n-Gleichungen, n unb, Koeffizientenlänge w.
$\rightsquigarrow$ Reduziertes System mit Koeffizienten $\approx 2^{n-1}w$ Länge

Beispiel (Fort.)

Cramers Regel::

$x = \frac{\text{Det}[\ \ ]}{\text{Det}[\ \ ]} \quad y = \ldots \quad z = \ldots$

wobei Länge Det$[\ \ ] \approx n \cdot w$, d. h. Ergebnis (Länge) ist nicht Ursache der Komplexität.

Beachte Methode ist anwendbar auf lineare Gleichungssysteme mit Koeffizienten in Polynomringen. Dann tritt exponentielles Wachstum der Grade der Polynome (als Koeffizienten) auf.
Normierung durch Rechnung im Quotientenkörper. Kosten!

Ringmorphismen

$\Phi : R \to R'$ Homomorphismus, falls

i) $\Phi(a+b) = \Phi(a) + \Phi(b) \qquad (a, b \in R)$

ii) $\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b) \qquad (a, b \in R)$

iii) $\Phi(1) = 1$

iv) $(\Phi(0) = 0 \qquad \Phi(-a) = -\Phi(a))$

Ringmorphismen: Beispiele

4.29 Beispiel

a) Modulare Homomorphismen: $m \in \mathbb{Z}$

$$\Phi_m \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{Z}_m[x_1, \ldots, x_n]$$

mit $\Phi_m(x_i) = x_i \qquad \Phi_m(a) = (a \bmod m) \quad a \in \mathbb{Z}.$

b) Auswertungshomomorphismen: $\alpha \in D$

$$\Phi_{x_i - \alpha} : D[x_1, \ldots, x_n] \to D[x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n]$$

$$\Phi_{x_i - \alpha}(a(x_1, \ldots, x_n)) = a(x_1, \ldots, x_{i-1}, \alpha, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

c) Komposition Homomorphismen:

$$\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n] \underset{\Phi_p}{\to} \mathbb{Z}_p[x_1, \ldots, x_n] \underset{x_n - \alpha_n \in \mathbb{Z}_p}{\to} \cdots \underset{x_2 - \alpha_2 \in \mathbb{Z}_p}{\to} \mathbb{Z}_p[x_1]$$

Ringmorphismen: Beispiel

$a(x) = 7x + 5 \qquad b(x) = 2x - 3 \qquad c(x) = a(x)b(x)$

$\varphi_1 := \Phi_{x-0}\Phi_5 : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_5 \quad \varphi_1(a) = 0$

$\varphi_1(b) = 2 \quad \varphi_1(c) = 0$

$\varphi_2 := \Phi_{x-1}\Phi_5 : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_5 \quad \varphi_2(a) = 2$

$\varphi_2(b) = 4 \quad \varphi_2(c) = 3$

$c(0) \equiv 0 \mod 5,\ c(1) \equiv 3 \mod 5,\ c(2) \equiv 4 \mod 5$

Analog mit $m = 7$

$c(0) \equiv 6 \mod 7,\ c(1) \equiv 2 \mod 7,\ c(2) \equiv 5 \mod 7.$

Rekonstruktion von $c(x)$ in $\mathbb{Z}[x]$?

Ideale und Homomorphismen (Erinnerung)

R kommutativer Ring $\emptyset \neq I \subset R$ ist Ideal, falls

i) $a - b \in I$ für $a, b \in I$.

ii) $ar \in I$ für $a \in I, r \in R$.

Insbesondere $0 \in I : \{0\}$ ist Ideal, R ist Ideal, I ist abgeschlossen bzgl. $+, \cdot, -$.

- $\Phi : R \to R'$ Homomorphismus

  $\mathrm{Kern}(\Phi) = \{r \in R : \Phi(r) = 0\}$ ist Ideal.

- $\Phi_1 : R \to R'$, $\Phi_2 : R \to R''$, $\mathrm{Kern}(\Phi_1) = \mathrm{Kern}(\Phi_2)$, so ist $\Phi_1(R) \cong \Phi_2(R) \cong R/\mathrm{Kern}(\Phi_1)$

Ideale und Homomorphismen (Erinnerung)

- $I = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \{a_1 r_1 + \cdots + a_n r_n : r_i \in R\}$. Das von $\{a_1, \ldots, a_n\}$ erzeugte Ideal.
- I heißt endlich erzeugt (ee), falls $I = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$
  Hauptideal, falls $I = \langle a \rangle \quad a \in R$.
- R noethersch, falls jedes Ideal ee.
  R Hauptidealring, falls jedes Ideal HI ist. (z. B. R euklidisch $\rightsquigarrow$ R HIR).

  D noethersch, so ist $D[x]$ noethersch.
- Summen, Produkte, Potenzen von Idealen.

$$\begin{aligned} \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle &= \langle ab \rangle \qquad \langle a \rangle^i = \langle a^i \rangle \quad i \geq 1 \\ \langle a \rangle + \langle b \rangle &\neq \langle a + b \rangle \\ &= \langle \mathrm{GCD}(a, b) \rangle \text{ in HIR.} \end{aligned}$$

Chinesischer Restesatz Algorithmen

R euklidisch, $m_0, \ldots, m_n \in R$ paarweise teilerfremd.
$m = m_0, \ldots, m_n \qquad \langle m \rangle = \langle m_0 \rangle \cdots \langle m_n \rangle$

$\Phi_i := \Phi_{m_i} : R \to R/\langle m_i \rangle :: a \to a \bmod m_i$

$\Phi : \Phi_0 \times \cdots \times \Phi_n : R \to R/\langle m_0 \rangle \times \cdots \times R/\langle m_n \rangle$
ist surjektiv mit Kern $\langle m \rangle$.

$$R/\langle m \rangle \cong R/\langle m_0 \rangle \times \cdots \times R/\langle m_n \rangle$$

Problem: Gegeben $(a_0, \ldots, a_n) \in R/\langle m_0 \rangle \times \cdots \times R/\langle m_n \rangle$.
Berechne $a \in R/\langle m \rangle$ mit $\Phi_i(a) = a_i$.

Interpolationsproblem

1. Lösung Lagrange: l_i mit $\Phi_i(l_i) = 1$ sonst $0 \quad (i \neq j)$ über EEA.

Interpolationsproblem: Anwendungsfälle

2 Anwendungsfälle:

Rekonstruktion von a aus $\Phi_{m_i}(a), i = 0, \ldots, n$

- $\mathbb{Z}$: Finde $\mathfrak{a} \in \mathbb{Z}$ mit $u \leq \mathfrak{a} < u + m$, $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{a}_i \mod m_i$
  für festes u (z. B. $u = 0$ oder $u = -m/2$).
- $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_\nu] : \Phi_p : \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_\nu] \to \mathbb{Z}_p[x_1, \ldots, x_\nu]$
  $\Phi_I : \mathbb{Z}_p[x_1, \ldots, x_\nu] \to \mathbb{Z}_p[x_1]$ (oder $\mathbb{Z}_p$).

  I Komposition von Auswertungshomomorphismen $x_i - \alpha_i$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_p$.

  $\Phi_{x-\alpha_i} : D[x] \to D$ D Polynomring über $\mathbb{Z}_p$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_p$, $i = 0, \ldots, n$.

  Es gibt ein eindeutiges Polynom $\mathfrak{a}(x) \in F_D[x]$ mit

  $\text{grad}_x(\mathfrak{a}(x)) \leq n$ $\mathfrak{a}(x_i) = \mathfrak{a}_i \in D$ $0 \leq i \leq n$.

Garner & Newton Interpolationsalgorithmen

Mixed Radix Darstellung: $\mathfrak{a} \in R/\langle m \rangle$ lässt sich darstellen als

$$(*) \quad \mathfrak{a} = \nu_0 + \nu_1(m_0) + \nu_2(m_0 m_1) + \cdots + \nu_n \left(\prod_{i=0}^{n-1} m_i \right)$$

wobei $\nu_k \in R/\langle m_k \rangle \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$
Beachte: Ausdruck $(*)$ muss richtig interpretiert werden.

- Summe und Produkte sind in $R/\langle m \rangle$ zu rechnen.
- Die $\nu_k \in R/\langle m_k \rangle \hookrightarrow R/\langle m \rangle$. Diese Einbettung ist möglich, da $\langle m \rangle \subseteq \langle m_k \rangle$ für $k = 0, 1, \ldots, n$, d. h. die Repräsentanten $\bmod m_k$ können als Repräsentanten $\bmod m$ gewählt werden.
- Existenz und Eindeutigkeit als Verallgemeinerung der Standarddarstellung einer Zahl zur basis β:: $a = \sum_{i=0}^{n} \nu_i \beta^i \qquad 0 \leq a < \beta^{n+1}, 0 \leq \nu_i < \beta$

Garner & Newton Interpolationsalgorithmen

- Fall $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z}_{m_k}, \mathbb{Z}_m$ in positiver Darstellung oder $\mathbb{Z}_{m_k}, \mathbb{Z}_m$ in symmetrischer Darstellung. Nicht gemischt!.
- Fall $D[x]$ D Polynomring über $\mathbb{Z}_p$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_p \quad (D)$, $\nu_k \in F_D$, $0 \leq k \leq n$.

$$a(x) = \nu_0 + \nu_1(x - \alpha_0) + \nu_2(x - \alpha_0)(x - \alpha_1) + \cdots + \nu_n \prod_{i=0}^{n-1}(x - \alpha_i)$$

Darstellung ist eindeutig unter diesen Bedingungen Existenz!

Jede Menge von Polynomen $m_k(x) \in F_D[x]$, $k = 0, \ldots, n$ mit $\text{grad}(m_k(x)) = k$ ist Basis für Polynome mit grad $\leq n$ über F_D.

Newton Koeffizienten

Berechnung der ν_i, $i = 0, \ldots, n$, $\nu_i \in R/\langle m_k \rangle$

$$a = \nu_0 + \nu_1(m_0) + \nu_2(m_0 m_1) + \cdots + \nu_n \left(\prod_{i=0}^{n-1} m_i \right)$$

$$\Phi_i(a) = a_i \qquad i = 0, \ldots, n \qquad a_i \in R/\langle m_i \rangle$$

- $a \equiv \nu_0 \bmod m_0$ (oder $a(\alpha_0) = \nu_0 = a_0$), d. h. $\nu_0 = a_0$.
- Sind die Koeffizienten $\nu_0, \ldots, \nu_{k-1}$ bestimmt, so folgt

$$a \equiv \nu_0 + \nu_1(m_0) + \cdots + \nu_k \left(\prod_{i=0}^{k-1} m_i \right) (\bmod\ m_k)$$

Newton Koeffizienten (Fort.)

Wähle ν_k, so dass

$$\nu_0 + \nu_1(m_0) + \cdots + \nu_k \left(\prod_{i=0}^{k-1} m_i \right) \equiv a_k \pmod{m_k}$$

Da GGT $\left(\prod_{i=0}^{k-1} m_i, m_k \right) = 1$, ist $\prod_{i=0}^{k-1} m_i$ invertierbar $\bmod m_k$

(Beachte im Polynomfall

$$a(\alpha_k) = \nu_0 + \nu_1(\alpha_k - \alpha_0) + \cdots + \nu_k \prod_{i=0}^{k-1} (\alpha_k - \alpha_i) = a_k \in D$$

Da die $\alpha_i \in \mathbb{Z}_p, \alpha_i \neq \alpha_j$, $i \neq j$, folgt $\prod_{i=0}^{k-1} (\alpha_k - \alpha_i) \in \mathbb{Z}_p$ invertierbar).

Newton Koeffizienten (Forts.)

Also gilt

$$\nu_k \equiv \left[a_k - \left[\nu_0 + \nu_1(m_0) + \cdots + \nu_{k-1} \left(\prod_{i=0}^{k-2} m_i \right) \right] \right] \cdot \left(\prod_{i=0}^{k-1} m_i \right)^{-1} \mod m_k$$

oder

$$\nu_k = \left[a_k - \left[\nu_0 + \nu_1(\alpha_k - \alpha_0) + \cdots + \nu_{k-1} \left(\prod_{i=0}^{k-2} (\alpha_k - \alpha_i) \right) \right] \right] \cdot \left(\prod_{i=0}^{k-1} (\alpha_k - \alpha_i) \right)^{-1}$$

d. h. $\nu_k \in \mathbb{Z}/\langle m_i \rangle = \mathbb{Z}_{m_i}$ bzw. $\nu_k \in D$.

Garner's Algorithmus/Newton Interpol. Algorithmus Gemischte Basisdarstellung

procedure INTEGERCRA $((m_0, \ldots, m_n), (a_0, \ldots, a_n))$

$\{m_i \in \mathbb{Z}, \mathrm{GGT}(m_i, m_j) = 1 \ (i \neq j), a_i \in \mathbb{Z}_{m_i}\}$

$\{$Ausgabe $a \in \mathbb{Z}_m$ mit $m = \Pi m_i \quad a \equiv a_i \bmod m_i, i = 1, \ldots, n\}$

{ Schritt 1: Berechne die benötigten Inversen }

$\{\mathrm{Inverse}(a, q) = a^{-1} \bmod q\}$

for k from 1 **to** n **do**

begin

product $:= \Phi_{m_k}(m_0)$;

for i from 1 **to** $k-1$ **do**

product $:= \Phi_{m_k}(\mathrm{product} \cdot m_i)$;

$\gamma_k :=$ inverse(product, m_k);

end

Garner's Algorithmus (Forts.)

{ Schritt 2: Berechne die $\{\nu_k\}$}
$\nu_0 := a_0$;
for k from 1 **to** n **do**
    begin
    temp $:= \nu_{k-1}$;
    for j from $k-2$ **to** 0 **do**
        temp $:= \Phi_{m_k}(\text{temp} \cdot m_j + \nu_j)$;
    $\nu_k := \Phi_{m_k}((a_k - \text{temp})\gamma_k)$;
    end
{ Schritt 3: Transformiere gemischte Radixdarstellung in Standard Darstellung }
$a := \nu_n$;
for k from $n-1$ **to** 0 **do**
    $a := am_k + \nu_k$;
return (a)

Bemerkungen zu Garner's Algorithmus

Üblicherweise m_i SP-Zahlen oder $\alpha_i \in \mathbb{Z}_p$ mit p SP-Zahl.

Die Reste a_i sind im Fall $\mathbb{Z}$ auch SPZ. a ist dann Langzahl (die Liste $(a_0, \ldots, a_n)$ kann als Langzahldarstellung interpretiert werden).
Bis auf Schritt 3 nur Operationen mit SPZ.

Beachte Schreibweise:
Φ_{m_k}(Ausdruck) $\equiv$ Werte-Ausdruck in $\mathbb{Z}_{m_k}(R/\langle m_k \rangle)$.

Alle Operationen werden mit SP-Zahlen bzw. $\mathbb{Z}_p$ Zahlen gemacht.

Inverse mit EEA (in $\mathbb{Z}$).
GGT$(a, q) = 1 \rightsquigarrow sa + tq = 1$, $\Phi_q(s) = (s \bmod q) =$ inverse(a, q).

Schritt 3: Operationen in $\mathbb{Z}$. Warum kommt Element aus $\mathbb{Z}_m$ als Ergebnis heraus?

Bemerkungen zu Garner's Algorithmus

Symmetrische Darstellung: $|\nu_k| \leq (m_k - 1)/2$
$k = 0, \ldots, n$

$$|a| \leq \frac{m_0 - 1}{2} + \frac{m_1 - 1}{2} m_0 + \cdots + \frac{m_n - 1}{2} \left(\prod_{i=0}^{n-1} m_i \right)$$

$$\leq \frac{1}{2} \left[\left(\prod_{i=0}^{n} m_i \right) - 1 \right]$$

Auch für $0 \leq \nu_k \leq m_k - 1 \qquad k = 0, \ldots, n$

$$a \leq \left(\prod_{i=0}^{n-1} m_i \right) - 1$$

Berechnet wird

$$a = \nu_0 + m_0(\nu_1 + m_1(\nu_2 + \cdots + m_{n-2}(\nu_{n-1} + m_{n-1}(\nu_n)) \cdots))$$

Newton Interpolationsalgorithmus

- Im Fall $D[x]$ sind die Homomorphismen Auswertungshomomorphismen an Stellen α_i d.h $\Phi_{x-\alpha_i} : D[x] \rightarrow D$
  D Polynomring über $\mathbb{Z}_p$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_p$, $i = 0, \ldots, n$.
  Zu bestimmen ist eind. Polynom $a(x) \in F_D[x]$ mit $grad(a(x)) \leq n$ mit $a(\alpha_i) = a_i \in D \quad (0 \leq i \leq n)$.
- Man beachte, dass in den Anwendungen die a_i und somit die berechneten ν_i polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}_p$ sind und bei der Bestimmung von ν_i nur Koeffizientenoperationen durchzuführen sind.
- Beide Algorithmen sehen identisch aus. Im NIA steht an Stelle der m_i stets $(\alpha_k - \alpha_i)$ und für Φ_{m_k} steht stets Φ_p und die Inverse ist in $\mathbb{Z}_p$ zu berechnen.
- In beiden Algorithmen haben die Objekte stets drei Darstellungen.

Beispiel Garner's Algorithmus

4.30 Beispiel

Angenommen SP-Zahlen beschränkt $-100 < a < 100$ (2 Bit). Modulii:
$m_0 = 99, m_1 = 97, m_2 = 95$, $m = m_0 m_1 m_2 = 919985$.
Symmetrische konsistente Darstellung: $-456142 \leq a \leq 456142$

- Bestimme $a \in \mathbb{Z}_m$ mit $a \equiv 49 \bmod 99 \equiv -21 \bmod 97 \equiv -30 \bmod 95$

  $a_0 = 49, a_1 = -21, a_2 = -30$.

  Garner:

- Schritt 1:

  $\gamma_1 = m_0^{-1} \bmod m_1 = 99^{-1} \bmod 97 = 2^{-1} \bmod 97 = -48$

  $\gamma_2 = (m_0 m_1)^{-1} \bmod m_2 = 8^{-1} \bmod 95 = 12$

- Schritt 2: Gemischte Basiskoeffizienten für a

  $\nu_0 = 49$, $\nu_1 = -35$, $\nu_2 = -28$

- $a = 49 - 35(99) - 28(99)(97) = -272300$

Beispiel (Forts.)

4.31 Beispiel Eingangsproblem : System linearer Gleichungen.
Schwierigkeit: Muss keine Lösung in $\mathbb{Z}$ haben!

$$x_1 = \det\begin{vmatrix} 1 & 44 & 74 \\ -2 & 14 & -10 \\ 34 & -28 & 20 \end{vmatrix} \quad y_1 = \det\begin{vmatrix} 22 & 1 & 74 \\ 15 & -2 & 10 \\ -25 & 34 & 20 \end{vmatrix}$$

$$z_1 = \det\begin{vmatrix} 22 & 44 & 1 \\ 15 & 14 & -2 \\ -25 & -28 & 34 \end{vmatrix} \quad d = \det\begin{vmatrix} 22 & 44 & 74 \\ 15 & 14 & -10 \\ -25 & -28 & 20 \end{vmatrix}$$

$$x = x_1/d \quad y = y_1/d \quad z = z_1/d \quad \in \mathbb{Q}$$

- In $\mathbb{Z}_p$ berechne $x \bmod p, y \bmod p, z \bmod p, d \bmod p$ via Gauss $\rightsquigarrow$ aus $x_1 \equiv xd \bmod p$, $y_1 \equiv yd \bmod p$, $z_1 \equiv zd \bmod p \underset{CRA}{\rightsquigarrow} x_1, y_1, z_1, d$ aus $\mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathbb{Q}$ Lösung.

Beispiel (Forts.)

In $\mathbb{Z}_7$:

$$\begin{array}{llll} x+2y-3z=1 & \text{Gauss} & x \equiv -1 \bmod 7 \\ x \quad -3z=-2 & \rightsquigarrow & y \equiv -2 \bmod 7 \\ 3x \quad -z=-1 & & z \equiv -2 \bmod 7 \\ & & d \equiv -2 \bmod 7 \end{array}$$

In $\mathbb{Z}_{11}$,$\mathbb{Z}_{13}$, $\mathbb{Z}_{17}$, $\mathbb{Z}_{19}$ liefert

$$\begin{array}{llll} x_1 \equiv -5 \bmod 11 & y_1 \equiv 0 \bmod 11 & z_1 \equiv -4 \bmod 11 & d \equiv 1 \bmod 11 \\ -2 & 4 & 6 & 4 \bmod 13 \\ 5 & -6 & -3 & -2 \bmod 17 \\ 9 & 6 & 7 & -8 \bmod 19 \end{array}$$

Beispiel (Forts.)

Modulare Darstellungen für x_1 und d
$x_1 = (2, -5, -2, 5, 9)$, $d = (-2, 1, 4, -2, -8)$
$m_0 = 7, m_1 = 11, m_2 = 13, m_3 = 17, m_4 = 19$

Garner $\rightsquigarrow$ $x_1 = -44280$,..., $d = -7380$
Vergleiche diese mit den Zahlen die über Gauss Elimination in $\mathbb{Z}$ auftreten!

$$\rightsquigarrow x = \frac{-44280}{-7380} = 6 \qquad y = \frac{40590}{-7380} = -\frac{11}{2} \quad z = \frac{-11070}{-7380} = \frac{3}{2}$$

Problem hier: Lösung ist nicht ganzzahlig, sondern in $\mathbb{Q}$.
Rekonstruktion rationaler Lösungen bei Koeffizienten in $\mathbb{Z}$.

Newton Interpolationsalgorithmus

4.32 Beispiel Polynombeispiel

Bestimme Polynom $a(x, y) \in \mathbb{Z}_{97}[x, y]$ vom Max. Grad 2 in x und Max. Grad 1 in y mit

$$a(0,0) = -21 \quad a(0,1) = -30$$
$$a(1,0) = 20 \quad a(1,1) = 17$$
$$a(2,0) = -36 \quad a(2,1) = -31$$

- Rekonstruktion von $a(x, y)$ in $\mathbb{Z}_{97}[x, y]/\langle x - 0\rangle$

  $D = \mathbb{Z}_{97}$, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $a_0 = -21$, $a_1 = -30$

  Berechne Polynom $a(0, y) \in \mathbb{Z}_{97}[y]$:

  Schritt 1:

  $\gamma_1 = (\alpha_1 - \alpha_0)^{-1} \bmod 97 = 1^{-1} \bmod 97 = 1.$

  Schritt 2:

  Newton Koeff: $\nu_0 = -21, \nu_1 = -9$

Polynombeispiel (Forts.)

Schritt 3:
$a(0, y) = -21 - 9(y - 0) = -9y - 21$

- **Analog**: $\mathbb{Z}_{97}[x, y]/\langle x - 1\rangle$ und $\mathbb{Z}_{97}[x, y]/\langle x - 2\rangle$ liefert
  $a(1, y) = -3y + 20$
  $a(2, y) = 5y - 36$
- Multivariater Schritt: Garner mit $D = \mathbb{Z}_{97}[y]$
  $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $a_0 = a(0, y)$, $a_1 = a(1, y)$, $a_3 = a(2, y)$
- Gesucht $a(x, y) \in D[x] = \mathbb{Z}_{97}[y][x]$.

Polynombeispiel: Berechnung von $a(x, y)$

- **Schritt 1**:

  $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = [(\alpha_2 - \alpha_0)(\alpha_2 - \alpha_1)]^{-1} \bmod 97 = -48$

- **Schritt 2**:

  $\nu_0 = -9y - 21,\ \nu_1 = 6y + 41,\ \nu_2 = y$

- **Schritt 3**:

  $a(x, y) = (-9y - 21) + (6y + 41)(x - 0) + y(x - 0)(x - 1)$

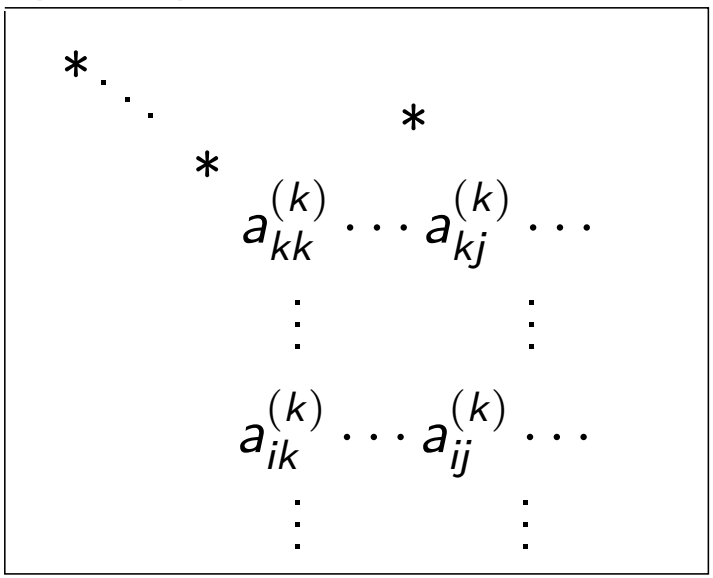
Beispiel: Modulare Determinantenberechnung

4.33 Beispiel Modulare Determinantenberechnung (vzGG S101)

Sei $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathbb{Z}^{n \times n}$. Berechne $\det A$

Gauss Elimination über $\mathbb{Q}$, $2n^3$ Operationen in $\mathbb{Q}$. Ist dies "pol Zeit"?

Die Anzahl der Wortoperationen hängt von den Zähler und Nenner der Zwischenergebnissen ab. Wie ist ihr Wachstum? Betrachte Stufe k bei der Elimination. A nichtsingulär und keine Zeilen oder Spaltenpermutationen notwendig.



$k-1$ Pivoting-Schritte

$a_{kk}^{(k)} \neq 0$ für
$k < i \le n,\ k \le j \le n$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)}.$$

Sei b_k obere Schranke für Zähler und Nenner der $a_{ij}^{(k)}$ $(1 \le i,j \le n)$.

Beispiel: Modulare Determinantenberechnung (Forts.)

Insbesondere: $|a_{ij}| \leq b_0$ für $1 \leq i, j \leq n$. Es folgt

$b_k \leq 2b_{k-1}^4 \leq 4b_{k-2}^{4^2} \leq \cdots \leq 2^k b_0^{4^k}$,
d. h. exponentiell in der Länge der Eingabe $n^2 \lambda(b_0) \approx n^2 \log b_0$

Ist Gauss Elimination überhaupt polynomial in Eingabelänge?
Ja, aber nichttrivialer Beweis.

2 Alternativen: Big-Prime, Small-Primes

Modulare Determinantenberechnung (Forts.)

Sei $d = \det A$. Wähle Primzahl $p > 2|d|$. Wende Gauss Elimination auf $A \bmod p \in \mathbb{Z}_p^{n\times n}$ an. Sei r Ergebnis in symmetrischer Darstellung von $\mathbb{Z}_p$, d. h. $r \equiv d \bmod p \quad -\frac{p}{2} < r < \frac{p}{2}$.
Da $p \mid d - r$ und $|d - r| \leq |d| + |r| < \frac{p}{2} + \frac{p}{2} = p$ folgt $d = r$.
Schranken für det A: Hadamard Ungleichung

$$|\det A| \leq n^{n/2} B^n \text{ mit } B = \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|$$

Wortlänge $\lambda(C) = \lambda(n^{n/2}B^n)$ ist $\frac{1}{64}\log_2 C = \frac{1}{64} n \left(\frac{1}{2}\log_2 n + \log_2 B\right)$
Polynomial in Eingabelänge $n^2\lambda(B)$.

- Primzahl p zwischen $2C$ und $4C$. Finden (prob. Algorithmus). Arithmetik modulo $p \quad O(\log^2 C)$ Wortoperationen.
- $O(n^3 n^2 (\log n + \log B)^2)$ Wortoperationen.

Modulare Determinantenberechnung (Forts.)

Small Primes:

$C = n^{n/2}B^n$, $r = \lceil \log_2(2C+1) \rceil$.

- Wähle r verschiedene Primzahlen $m_0, \ldots, m_{r-1} \in \mathbb{N}$.
- Für $0 \leq i < r$ berechne $d_i \equiv \det A \bmod m_i$ (Gauss) in $\mathbb{Z}_{m_i}$.
- Chinesischer R.A $d \equiv d_i \bmod m_i \quad 0 \leq i < r$.

Dann $\det A \equiv d \bmod m_i$ und somit $\det A \equiv d \bmod m$ für $m = m_0 \ldots m_{r-1}$.

Wegen $m \geq 2^r > 2^{n/2} n B^n \geq 2|d|$ gilt $d = \det A$.

Modulare Determinantenberechnung (Forts.)

Kosten: Berechnung der r Primzahlen (ersten r PZ),

- $O(r \log^2 r \log\log r)$ Wort-Operationen, $\log m_i \in O(\log r)$.
  $\log m = \sum_{0 \le i < r} \log m_i \in O(r \log r)$.
- Operationen $\bmod m_i \leftrightarrow O(\log^2 m_i)$, d. h. $O(\log^2 r)$ Operationen.
  $O(n^3 r \log^2 r)$ Wortoperationen, $A \bmod m_i \to O(n^2 r \log^2 r)$.
- r Werte $O(n^2 r^2 \log^2 r)$.

$$O(n^4 \log^2(nB)(\log^2 n + (\log\log B)^2))$$

Praxis: Vorberechnung von Primzahlen mit Wortlänge.

Inhalt Kapitel 5

Newton's Iteration und Hensel's Konstruktion
- Motivation
- P-adische und ideal-adische Darstellungen
- Ideal-adische Darstellung und Approximation
- Iteration nach Newton für $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$
- Ideal-adische Newton Iteration
- Hensel's Lemma
- Hensel Lifting
- Multifaktor Hensel Lifting. Algorithmus nach Zassenhaus
- Multivariate Verallgemeinerung von Hensel's Lemma
- Lösung diophantischer Polynomgleichungen in $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{p}^l}[\boldsymbol{x_1}]$

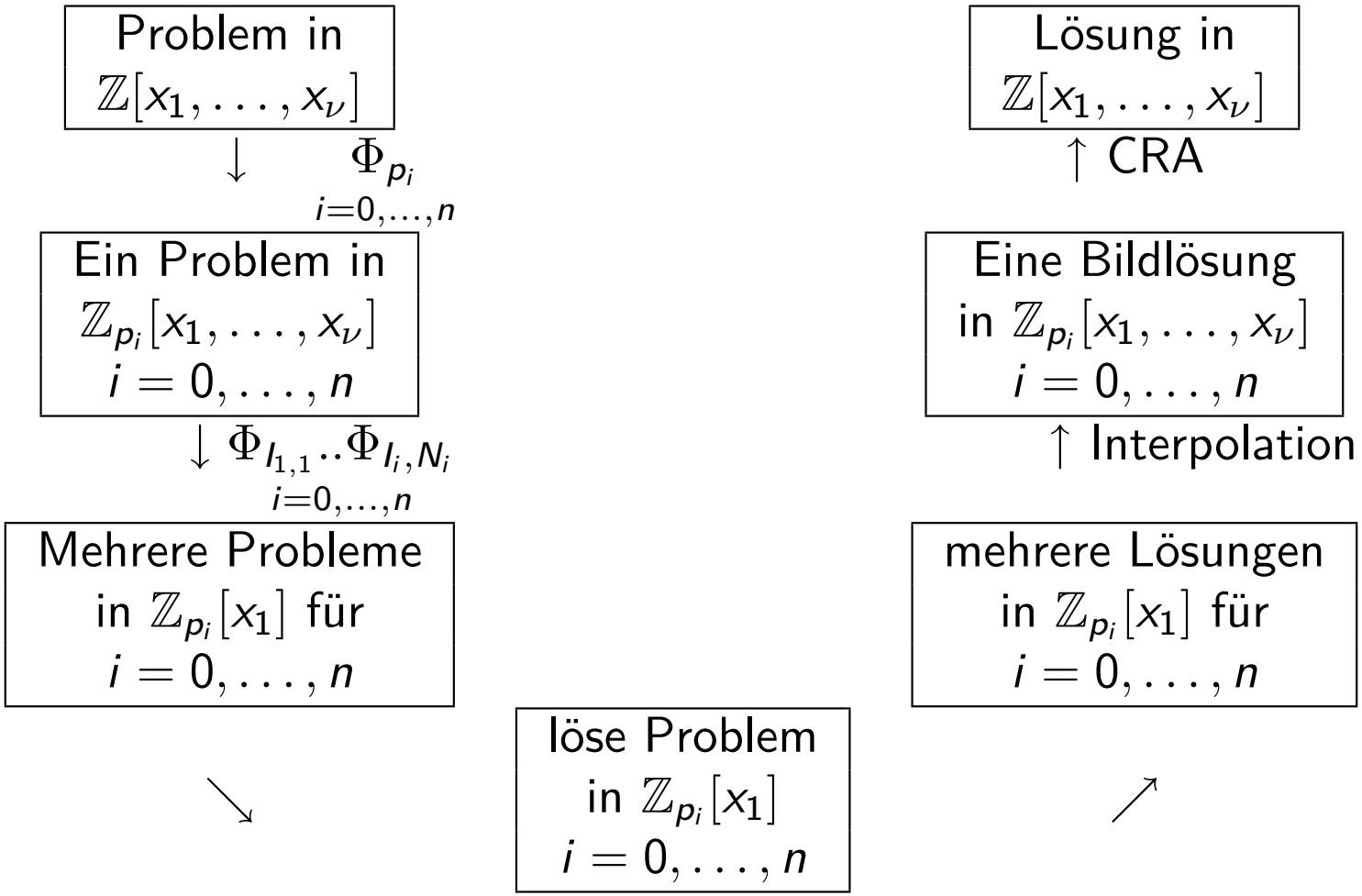
Newton's Iteration und Hensel's Konstruktion

- Umkehrung modularer & Auswertungs-Homomorphismen.
- Anwendung von Newton's Iterationsmethoden zur Lösung von Polynomgleichungen.

$$\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_\nu] \to \mathbb{Z}_p[x_1, \ldots, x_\nu] \to \mathbb{Z}_p[x_1]$$

- Im Gegensatz zur Interpolation, benötigt man nur einen Bildwert in $\mathbb{Z}_p[x_1]$.
- **Problem bei Small-Primes Methode**: Die Anzahl der Bildprobleme die gelöst werden müssen kann exponentiell in der Größe der Lösung wachsen.

Problem bei Small-Primes Methode



P-adische und ideal-adische Darstellungen

Problem: Inversion von $\Phi_p : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_p[x]$.
Startpunkt: Andere Darstellung für ganze Zahlen und Polynomen.

- p-ungerade Primzahl, $u \in \mathbb{Z}$, p-adische Darstellung

$$u = u_0 + u_1 p + u_2 p^2 + \cdots + u_n p^n$$

mit $p^{n+1} > 2|u| \quad u_i \in \mathbb{Z}_p \quad (0 \le i \le n)$.

Hierbei kann man entweder die positive oder die symmetrische Darstellung von $\mathbb{Z}_p$ verwenden.

- Verfahren zur Bestimmung der p-adischen Darstellung:
  - $u \equiv u_0 \bmod p$, d. h. $\quad (*) \quad u_0 = \Phi_p(u)$.

    $u_1 : u - u_0$ muss durch p teilbar sein, d. h.
    $\frac{u-u_0}{p} = u_1 + u_2 p + \cdots + u_n p^{n-1} \quad \rightsquigarrow u_1 = \Phi_p\left(\frac{u-u_0}{p}\right)$
  - Allgemein

    $(**) \quad u_i = \Phi_p\left(\frac{u-(u_0+u_1 p+u_2 p^2+\cdots+u_{i-1}p^{i-1})}{p^i}\right) \; i = 1, 2, \ldots, n$

Beispiel: p-adische Zahlendarstellung

5.1 Beispiel

$u = -272300 \qquad p = 97$

$$u_0 = \Phi_p(u) = -21$$
$$u_1 = \Phi_p\left(\frac{u-u_0}{p}\right) = \Phi_p\left(\frac{-272279}{97}\right) = \Phi_p(-2807) = 6$$
$$u_2 = \Phi_p\left(\frac{u-[u_0+u_1 p]}{p^2}\right) = -29$$
$$u_3 = 0$$

d.h. $-272300 = -21 + 6(97) - 29(97)^2$

Verallgemeinerung für Polynomen

$$u(x) = \sum_e u_e x^e \in \mathbb{Z}[x]$$

Seien p und n so gewählt, dass $p^{n+1} > 2u_{\max} = 2\max_e |u_e|$.

- Werden die u_e in ihrer p-adischen Darstellung $u_e = \sum_{i=0}^{n} u_{e,i} p^i$ mit $u_{e,i} \in \mathbb{Z}_p$ ausgedrückt, so

$$u(x) = \sum_e \left(\sum_{i=0}^{n} u_{e,i} p^i \right) x^e = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\left(\sum_e u_{e,i} x^e \right)}_{\in \mathbb{Z}_p[x]} p^i$$

p-adische Polynomdarstellung von u.

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x)p + \cdots + u_n(x)p^n$$

mit $u_i(x) \in \mathbb{Z}_p[x] \quad i = 0, \ldots, n$. **Verfahren**: (*) (**) bleiben gültig.

Beispiel: p-adische Polynomdarstellung

5.2 Beispiel $u(x) = 14x^2 - 11x - 15 \in \mathbb{Z}[x] \quad p = 5$

- $u_0(x) = \Phi_p(u(x)) = -x^2 - x$
- $u_1(x) = \Phi_p\left(\frac{u(x)-u_0(x)}{p}\right) = -2x^2 - 2x + 2$
- $u_2(x) = \Phi_p\left(\frac{u(x)-[u_0(x)+u_1(x)p]}{p^2}\right) = x^2 - 1$

Da $u_3(x) = 0$

$$u(x) = (-x^2 - x) + (-2x^2 - 2x + 2)5 + (x^2 - 1)5^2$$

Approximation und p-adische Darstellung

$a(x) \equiv b(x) \bmod q(x)$ gdw $a(x) - b(x) \in \langle q(x) \rangle$

$u(x) \equiv u_0(x) \bmod p$ und

$u(x) \equiv u_0(x) + u_1(x)p + \cdots + u_{k-1}(x)p^{k-1} \bmod p^k$

- $(p) > (p^2) > \cdots > (p^k) > \cdots$ Idealkette.

5.3 Definition Sei $a(x) \in \mathbb{Z}[x]$.
Ein Polynom $b(x) \in \mathbb{Z}[x]$ heißt eine p-adische Approximation n-ter Ordnung von $a(x)$, falls

$$a(x) \equiv b(x) \bmod p^n$$

Der Fehler bei der Approximation von $a(x)$ durch $b(x)$ ist $a(x) - b(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

Multivariate Taylor-Reihendarstellung

- Verallgemeinerung der p-adischen Darstellung

  Sei

  $$\Phi_I : \mathbb{Z}_p[x_1, \ldots, x_\nu] \to \mathbb{Z}_p[x_1]$$

  mit Kern $I = \langle x_2 - \alpha_2, \ldots, x_\nu - \alpha_\nu \rangle$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_p (2 \leq i \leq \nu)$.

  Gesucht: Urbilder von Φ_I.

  Lösung: Geeignete Wahl der Darstellung einer Lösung.

  $\tilde{u} = u(x_1, \ldots, x_\nu) \in \mathbb{Z}_p[x_1, \ldots, x_\nu]$ mit vorgegebenen „ersten Term“ $u^{(1)} \in \mathbb{Z}_p[x_1]$, wobei

  $$u^{(1)} = \Phi_I(\tilde{u})$$

  .

  Beachte $u^{(1)} = u(x_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)$.

Multivariate Taylor-Reihendarstellung (Forts.)

- Korrespondierend zur p-adischen Darstellung, wähle für die Lösung $\tilde{u}$ eine Darstellung

$$\tilde{u} = u^{(1)} + \Delta u^{(1)} + \Delta u^{(2)} + \Delta u^{(3)} + \cdots$$

um die restlichen Terme zu bestimmen, betrachte den Fehler

$$e^{(1)} = \tilde{u} - u^{(1)}$$

Es gilt $\Phi_I(e^{(1)}) = 0$, d.h. $e^{(1)} \in I$. Da I von $(x_i - \alpha_i)$ erzeugt wird gilt

$$\text{(x)} \qquad e^{(1)} = \sum_{i=2}^{\nu} c_i(x_i - \alpha_i) \text{ mit } c_i \in \mathbb{Z}_p[x_1, \ldots, x_\nu]$$

Für $\Delta u^{(1)}$ wähle man die linearen Terme aus (x), d. h.

$$\Delta u^{(1)} = \sum_{i=2}^{\nu} u_i(x_1)(x_i - \alpha_i) \text{ mit } u_i(x_1) = \Phi_I(c_i) \quad 2 \le i \le \nu.$$

Multivariate Taylor-Reihendarstellung (Forts.)

- Wir erhalten als Approximation von $\tilde{u}$

  $u^{(2)} = u^{(1)} + \Delta u^{(1)}$ mit $\Delta u^{(1)} \in I$.

  Neuer Fehlerterm

$$e^{(2)} = \tilde{u} - u^{(2)} = e^{(1)} - \Delta u^{(1)}$$

  Wiederum

$$e^{(2)} = \sum_{i=2}^{\nu} (c_i - u_i(x_1))(x_i - \alpha_i)$$

  wobei

$$c_i - u_i(x_1) \in I \quad 2 \leq i \leq \nu$$

  d. h. $e^{(2)} \in I^2$

Multivariate Taylor-Reihendarstellung (Forts.)

- Potenzen von $I = \langle x_2 - \alpha_2, x_3 - \alpha_3, \ldots \rangle$

  $I^2 = \langle (x_2 - \alpha_2)^2, (x_2 - \alpha_2)(x_3 - \alpha_3), (x_3 - \alpha_3)^2, \ldots \rangle$

  $I^3 = \langle (x_2 - \alpha_2)^3, (x_2 - \alpha_2)^2(x_3 - \alpha_3), (x_2 - \alpha_2)(x_3 - \alpha_3)^2, (x_3 - \alpha_3)^3 \ldots \rangle$

- Drückt man $e^{(2)}$ in Basis von I^2 aus, so

  $$e^{(2)} = \sum_{i=2}^{\nu} \sum_{j=i}^{\nu} c_{ij}(x_i - \alpha_i)(x_j - \alpha_j) \text{ mit } c_{ij} \in \mathbb{Z}_p[x_1, \ldots, x_\nu]$$

  Dann

  $$\Delta u^{(2)} = \sum_{i=2}^{\nu} \sum_{j=i}^{\nu} u_{ij}(x_1)(x_i - \alpha_i)(x_j - \alpha_j)$$

  wobei

  $$u_{ij}(x_1) = \Phi_I(c_{ij}), 2 \leq i \leq j \leq \nu$$

  .

Multivariate Taylor-Reihendarstellung (Forts.)

- Damit hat man die Approximation für $\tilde{u}$

$$u^{(3)} = u^{(2)} + \Delta u^{(2)} = u^{(1)} + \Delta u^{(1)} + \Delta u^{(2)}$$

- Mit $e^{(3)} = \tilde{u} - u^{(3)}$ folgt $e^{(3)} \in I^3$ und als Korrekturterm $\Delta u^{(3)} \in I^3$ der Form

$$\Delta u^{(3)} = \sum_{i=2}^{\nu} \sum_{j=i}^{\nu} \sum_{k=j}^{\nu} u_{ijk}(x_1)(x_i - \alpha_i)(x_j - \alpha_j)(x_k - \alpha_k)$$

mit $u_{ijk}(x_1) \in \mathbb{Z}_p[x_1]$

- Prozess terminiert, da $\tilde{u}$ Polynom, der letzte Term enthält d (=Totalgrad von $\tilde{u}$) geschachtelte Summationen.

Multivariate Taylor-Reihendarstellung (Forts.)

Multivariate Taylor-Reihendarstellung bzgl. Ideal $I = \langle x_2 - \alpha_2, \ldots, x_\nu - \alpha_\nu \rangle$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_p$ für Polynom $\tilde{u} = u(x_1, \ldots, x_\nu) \in \mathbb{Z}_p[x_1, \ldots, x_\nu]$ ist

$$\begin{aligned} u(x_1, \ldots, x_\nu) &= u(x_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu) + \sum_{i=2}^{\nu} u_i(x_1)(x_i - \alpha_i) \\ &+ \sum_{i=2}^{\nu} \sum_{j=i}^{\nu} u_{ij}(x_1)(x_i - \alpha_i)(x_j - \alpha_j) \\ &+ \sum_{i=2}^{\nu} \sum_{j=i}^{\nu} \sum_{k=j}^{\nu} u_{ijk}(x_1)(x_i - \alpha_i)(x_j - \alpha_j)(x_k - \alpha_k) \\ &+ \cdots \end{aligned}$$

- d totaler Grad von $u(x_1, \ldots, x_\nu)$ bzgl. $x_2, \ldots, x_\nu$, gibt Anzahl der geschachtelten Summationen.

Ideal-adische Darstellung und Approximation

- Analogie zur P-adischen Darstellung:
  $\tilde{u} = u^{(1)} + \Delta u^{(1)} + \Delta u^{(2)} + \cdots + \Delta u^{(n)}$
  Mit $u^{(1)} = u_0(\vec{x}) \in \mathbb{Z}[\vec{x}]/\langle p \rangle$.

$$\Delta u^{(k)} = u_k(\vec{x}) p^k \in \langle p \rangle^k \text{ für } k = 1, 2, \ldots, n$$

- Beachte $\mathbb{Z}[\vec{x}]/\langle p \rangle = \mathbb{Z}_p[\vec{x}]$ und $\langle p \rangle^k = \langle p^k \rangle$.
  Der Koeffizient $u_k(\vec{x})$ im Ausdruck für $\Delta u^{(k)}$ erfüllt als ein Vielfaches des Basiselementes des Ideals in dem es liegt:

$$u_k(\vec{x}) \in \mathbb{Z}[\vec{x}]/\langle p \rangle \qquad 1 \leq k \leq n$$

- Im p-adischen Falle kann man eine Folge p-adischer Approximationen der Ordnung $k+1$ definieren::

$$u^{(k+1)} \in \mathbb{Z}[\vec{x}]/\langle p \rangle^{k+1} \text{ für } k = 1, 2, \ldots, n, \text{ wobei}$$
$$u^{(k+1)} = u^{(1)} + \Delta u^{(1)} + \Delta u^{(2)} + \cdots + \Delta u^{(k)}.$$

Ideal-adische Darstellung und Approximation (Forts.)

Beim definieren des k-ten Elements der Folge aus der Approximation $u^{(k)} \in \mathbb{Z}[x]/\langle p \rangle^k$, erhält die neue Approximation $u^{(k+1)} \in \mathbb{Z}[x]/\langle p \rangle^{k+1}$ durch addieren des Terms $\Delta u^{(k)} \in \langle p \rangle^k$. Diese Addition

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} + \Delta u^{(k)}$$

ist eine Addition in dem größeren Ring $\mathbb{Z}[\vec{x}]/\langle p \rangle^{k+1}$. Sie ist erlaubt durch sie natürliche Einbettung des Ringes $\mathbb{Z}[\vec{x}]/\langle p \rangle^k$ in den größeren Ring $\mathbb{Z}[\vec{x}]/\langle p \rangle^{k+1}$

- Daher liegen die sukzessiven p-adischen Approximationen $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, \ldots$ von $\tilde{u} \in \mathbb{Z}[\vec{x}]$ in einer Folge von Unterringen wachsender Größe von $\mathbb{Z}[\vec{x}]$

$$\mathbb{Z}[\vec{x}]/\langle p \rangle \subset \mathbb{Z}[\vec{x}]/\langle p \rangle^2 \subseteq \mathbb{Z}[\vec{x}]/\langle p \rangle^3 \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{Z}[\vec{x}]$$

Ideal-adische Darstellung und Approximation (Forts.)

- Da $u \in \mathbb{Z}[\vec{x}]$ gibt es ein n mit:: $\mathbb{Z}[\vec{x}]/\langle p \rangle^{n+1}$ groß genug um u zu enthalten.
- Die multivariate Taylor-Reihendarstellung kann als analoge Darstellung aufgefasst werden, wobei I an Stelle von $\langle p \rangle$ tritt. Es gilt

$$\mathbb{Z}_p[\vec{x}]/I \subset \mathbb{Z}_p[\vec{x}]/I^2 \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{Z}_p[\vec{x}]$$

5.4 Definition Sei D noetherscher Integritätsbereich und I ideal in D. Zu $a \in D$ heißt $b \in D$ eine ideal-adische Approximation n-ter Ordnung für a bezüglich des Ideales I, falls

$$a \equiv b \bmod I^n$$

Der Fehler bei der Approximation von a durch b ist das Element $a - b \in D$. Mit $\Phi_{I^n} : D \to D/I^n$ gilt $\Phi_{I^n}(a - b) = 0$.

Iteration nach Newton für $F(u) = 0$

Lineare p-adische Iteration

- Inversion von $\Phi_p : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_p[x]$. Nur eine Primzahl p, als bekannt $u_0(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$: Bild der gesuchten Lösung $u(x) \in \mathbb{Z}[x]$, d.h. $u_0(x)$ ist p-adische Approximation erster Ordnung.

  Gesucht: Methode zur Berechnung der Approximation der Ordnung k, d. h.

$$u_0(x) + u_1(x)p + \cdots + u_{k-1}(x)p^{k-1} \in \mathbb{Z}_{p^k}[x] \quad k = 1, \ldots, n+1$$

  Lifting von Bild $u_0(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$.

- Offenbar benötigt man zusätzliche Information, um $u(x)$ festzulegen. Üblicherweise ist diese Information in Form von Gleichungen gegeben, die $u(x)$ erfüllen muss

  z. B. $F(u) = 0$ wobei $F(u) \in \mathbb{Z}[x][u]$. Z.B. $u^2 - a(x) = 0$.

Klassisches Newton-Verfahren zur Lösung einer nichtlinearen Gleichung $F(u) = 0$

- Entwicklung von F als Taylor-Reihe um Punkt $u^{(k)}$:

$$F(u) = F(u^{(k)}) + F'(u^{(k)})(u - u^{(k)}) + \frac{1}{2}F''(u^{(k)})(u - u^{(k)})^2 + \cdots$$

- Setzt man $u = \tilde{u}$ und betrachtet man nur lineare Terme, so $0 = F(u^{(k)}) + F'(u^{(k)})(\tilde{u} - u^{(k)})$, d.h.

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} - \frac{F(u^{(k)})}{F'(u^{(k)})} \quad (F'((u^{(k)}) \neq 0)$$

- Startpunkt $u^{(1)} \rightsquigarrow$ Quadratische Konvergenz.

Newton-Verfahren zur Lösung einer nichtlinearen Gleichung $F(u) = 0$

Annahme: Es gibt eine Lösung $\tilde{u} = u(x) \in \mathbb{Z}[x]$.
Gegeben: Approximation erster Ordnung $u_0(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ von $\tilde{u}$

- Schreibt man die Lösung in ihrer p-adischen Pol-Darstellung

$$\tilde{u} = u_0(x) + u_1(x)p + \cdots + u_n(x)p^n$$

- Aufgabe: Bestimme die $u_i(x) \in \mathbb{Z}_p[x] \qquad i = 1, 2, \ldots, n$ wobei $u^{(k)} = u_0(x) + u_1(x)p + \cdots + u_{k-1}(x)p^{k-1} \quad 1 \leq k \leq n+1$ die p-adische Approximation k-ter Ordnung von $\tilde{u}$ ist.

- Gesucht Iterationsformel, die im Schritt k aus $u^{(k)}$ den p-adischen Polynomkoeffizienten $u_k(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ berechnet und somit zu $u^{(k+1)} = u^{(k)} + u_k(x)p^k \quad 1 \leq k \leq n$ führt.

Newton-Verfahren:: Gleichung $F(u) = 0$ (Forts.)

5.5 Lemma Sei $a(x) \in D[x]$. Dann gilt in $D[x][y]$

$$a(x+y) = a(x) + a'(x)y + b(x,y)y^2$$

für ein geeignetes Polynom $b(x,y) \in D[x,y]$.

5.6 Lemma Sei $a(x,y) \in D[x,y]$ bivariates Polynom. Dann gilt im Polynomring $D[x,y][\xi,\eta]$.

$$\begin{aligned} a(x+\xi, y+\eta) &= a(x,y) + a_x(x,y)\xi + a_y(x,y)\eta \\ &\quad + b_1(x,y,\xi,\eta)\xi^2 + b_2(x,y,\xi,\eta)\xi\eta \\ &\quad + b_3(x,y,\xi,\eta)\eta^2 \end{aligned}$$

Für geeignete Polynome $b_i(x,y,\xi,\eta) \in D[x,y,\xi,\eta]$.

Newton-Verfahren:: Gleichung $F(u) = 0$ (Forts.)

- Das Polynom $F(u) \in \mathbb{Z}[x][u]$ hat dann folgende Darstellung

$$\begin{aligned} F(u^{(k)} + u_k(x)p^k) &= F(u^{(k)}) + F'(u^{(k)})u_k(x)p^k \\ &\quad + g(u^{(k)}, u_k(x)p^k)[u_k(x)]^2 p^{2k} \end{aligned}$$

  für ein $g(u, w) \in D[u, w]$.

- Wegen $u^{(k)} \equiv \tilde{u} \bmod p^k$ und $F(\tilde{u}) = 0$ folgt $F(u^{(k)}) \equiv 0 \bmod p^k$.
- Analog gilt
  $F(u^{(k)} + u_k(x)p^k) \equiv 0 \bmod p^{k+1}$ falls $u^{(k+1)} = u^{(k)} + u_k(x)p^{(k)}$.

Newton-Verfahren:: Gleichung $F(u) = 0$ (Forts.)

- D. h.

$$\frac{F(u^{(k)} + u_k(x)p^k)}{p^k} = \frac{F(u^{(k)})}{p^k} + F'(u^{(k)})u_k(x) + g(u^{(k)}, u_k(x)p^k)[u_k(x)]^2 p^k$$

- Wende Φ_p an, so erfüllt $u_k(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ die Gleichung

$$0 = \Phi_p\left(\frac{F(u^{(k)})}{p^k}\right) + \Phi_p(F'(u^{(k)}))u_k(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$$

Wegen $u^{(k)} \equiv u^{(1)} \bmod p$ für $k \geq 1$ gilt

$$F'(u^{(k)}) \equiv F'(u^{(1)}) \bmod p$$

Newton-Verfahren:: Gleichung $F(u) = 0$ (Forts.)

Genügt die gegebene Approximation erster Ordnung $u^{(1)}$ der Bedingung

$$F'(u^{(1)}) \not\equiv 0 \bmod p$$

so ist der gesuchte p-adische Polynomkoeffizient

$$(\#) \qquad u_k(x) = -\frac{\Phi_p\left(\frac{F(u^{(k)})}{p^k}\right)}{\Phi_p(F'(u^{(1)}))} \in \mathbb{Z}_p[x]$$

Diese Division ist exakt im Polynomring $\mathbb{Z}_p[x]$, falls eine Polynomlösung existiert.
Die Gleichung $(\#)$ ist die lineare Aktualisierungsformel zusammen mit $u^{(k+1)} = u^{(k)} + u_k(x)p^k \rightsquigarrow$ lineare p-adische Newtonverfahren.
Beachte: $F(u^{(k)})$ wird in $\mathbb{Z}[x]$ durchgeführt, sowie auch Division durch p^k erst dann Φ_p anwenden!

Beispiel: Iteration nach Newton für Quadratwurzel

5.7 Beispiel Bestimme Polynom $u(x) \in \mathbb{Z}[x]$, das die Quadratwurzel des Polynoms

$$a(x) = 36x^4 - 180x^3 + 93x^2 + 330x + 121 \in \mathbb{Z}[x]$$

(unter der Annahme, dass $a(x)$ quadratisch ist).

$u(x)$ als Lösung von $F(u) = a(x) - u^2 = 0$.

Wähle $p = 5$ $\quad \Phi_5(a(x)) = x^4 - 2x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$.

Approximation 1 Ordnung muss Quadratwurzel von $\Phi_5(a(x))$ sein, d. h. $u^{(1)} = u_0(x) = x^2 - 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$.

$F'(u) = -2u$ und $\Phi_5(F'(u^{(1)})) = \Phi_5(-2u^{(1)}) = -2x^2 + 2$

Beispiel: Quadratwurzel

Dann

$$\begin{aligned} u_1(x) &= -\frac{\Phi_5\left(\frac{F(u^{(1)})}{5}\right)}{(-2x^2+2)} = -\frac{\Phi_5\left(\frac{35x^4-180x^3+95x^2+330x+120}{5}\right)}{(-2x^2+2)} \\ &= -\frac{(2x^4-x^3-x^2+x-1)}{(-2x^2+2)} = x^2+2x-2 \in \mathbb{Z}_5[x] \end{aligned}$$

und $u^{(2)} = (x^2-1)+(x^2+2x-2)5 \in \mathbb{Z}_{25}[x]$
Analog

$$u_2(x) = -\frac{(-2x^3+2x)}{(-2x^2+2)} = -x \in \mathbb{Z}_5[x]$$

d. h. $u^{(3)} = (x^2-1)+(x^2+2x-2)5+(-x)5^2 \in \mathbb{Z}_{125}[x]$
$F(u^{(3)}) = 0 \rightsquigarrow$ Terminierung, d. h.
Quadratwurzel ist $u(x) = u^{(3)} = 6x^2-15x-11 \in \mathbb{Z}[x]$.

Beispiel: Division mit Rest

5.8 Beispiel Division mit Rest über Newton Iteration

$\mathbb{Z}, F[x]$ sind Euklidische Bereiche $\rightsquigarrow$ Division mit Rest.
Komplexität $O(n^2)$ (Wort- oder Körperoperationen)

- Kann verbessert werden auf $O(M(n))$ wobei M die Multiplikationsschranke ist.
- Polynomfall: Sei D Ring $a, b \in D[x]$ Grade n, m mit $m \leq n$, b monisch. Finde $q, r \in D[x]$ mit $a = qb + r \quad Grad(r) < Grad(b)$.

  [Da b monisch ist, ist die Existenz sicher].
- Es gilt:

$$(*) \qquad x^n a\left(\frac{1}{x}\right) = \left(x^{n-m} q\left(\frac{1}{x}\right)\right) . \left(x^m b\left(\frac{1}{x}\right)\right) + x^{n-m+1}\left(x^{m-1} r\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Beispiel: Division mit Rest

Setze $rev_k(a) := x^k a(1/x)$. Für $k = n$ erhält man

$$a = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$rev_n(a) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

$$(*') \quad rev_n(a) = rev_{n-m}(q) \cdot rev_m(b) + x^{n-m+1} \cdot rev_{m-1}(r)$$

d.h.

$$rev_n(a) \equiv rev_{n-m}(q) \cdot rev_m(b) \bmod x^{n-m+1}$$

- Da $rev_m(b)$ 1 als Konstanten Koeffizienten hat, ist es invertierbar mod x^{n-m+1} also

$$rev_{n-m}(q) \equiv rev_n(a) rev_m(b)^{-1} \bmod x^{n-m+1}$$

hieraus lassen sich q und r berechnen:

$$q = rev_{n-m}(rev_{n-m}(q)) \text{ und } r = a - qb$$

Beispiele (Forts.)

z.B. $a = 5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x$ $\quad b = x^2 + 2x + 3$ $\quad \mathbb{F}_7[x]$

$rev_5(a) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$
$rev_2(b) = 3x^2 + 2x + 1$

Wie berechnet man $rev_2(b)^{-1} \bmod x^4$?

$$rev_2(b)^{-1} \equiv 4x^3 + x^2 + 5x + 1 \bmod x^4 \text{ in } \mathbb{F}_7[x]$$

$$\rightsquigarrow rev_3(q) \equiv 6x^3 + x + 5 \bmod x^4$$

$$\rightsquigarrow q = 5x^3 + x^2 + 6 \text{ und } r = a - qb = 3x + 3$$

Inversion modulo x^l in $D[x]$

Problem:
Gegeben $f \in \mathbb{D}[x]$, $l \in \mathbb{N}$ mit $f(0) = 1$
Finde $g \in \mathbb{D}[x]$ mit $fg \equiv 1 \bmod x^l$

- $\rightsquigarrow$ Newton Iteration Lösungen von $\Phi(g) = 0$ aus Anfangsnäherung g_0:

$$g_{i+1} = g_i - \frac{\Phi(g_i)}{\Phi'(g_i)}$$

- $\Phi(g) = \frac{1}{g} - f = 0$

$$\rightsquigarrow g_{i+1} = g_i - \frac{1/g_i - f}{-1/g_i^2} = 2g_i - fg_i^2$$

Inversion modulo x^l in $D[x]$

Seien $f(0) = 1$, $g_0 = 1$, $g_{i+1} \equiv 2g_i - fg_i^2 \bmod x^{2^{i+1}}$.
Dann $fg_i \equiv 1 \bmod x^{2^i}$ für $i \geq 0$
Beweis: Ind. $i = 0$ $\quad f \cdot g_0 \equiv f(0)g_0 \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1 \bmod x^{2^0}$
Ind. Schritt:

$$\begin{aligned} 1 - fg_{i+1} &\equiv 1 - f(2g_i - fg_i^2) \\ &\equiv 1 - 2fg_i + f^2g_i^2 \\ &\equiv (1 - fg_i)^2 \\ &\equiv 0 \bmod x^{2^{i+1}} \end{aligned}$$

- Beachte: Ist $f(0)$ Einheit ungleich 1, so verwende für g_o $f(0)^{-1}$.
  Ist $f(0)$ keine Einheit, so gibt es keine Inverse von f mod x^l da aus
  $fg \equiv 1 \bmod x^l \rightsquigarrow f(0)g(0) = 1$

Inversion modulo x^l in $D[x]$: Beispiel

5.9 Beispiel $f = 3x^2 + 2x + 1$ in $\mathbb{F}_7[x]$, $l = 4$
Alg. berechnet mit $g_0 = 1 \quad r = 2 = \lceil \log(l) \rceil$

$$g_1 \equiv 2g_0 - fg_0^2 = 2 - (3x^2 + 2x + 1) \equiv 5x + 1 \bmod x^2$$

$$g = g_2 \equiv 2g_1 - fg_1^2 = 2x^4 + 4x^3 + x^2 + 5x + 1 \equiv 4x^3 + x^2 + 5x + 1 \bmod x^4$$

- Aufwand: $l = 2^r \qquad 3M(l) + l \in O(M(l))$ Arithm. Operationen
(siehe auch von zur Gathen/Gerhard s.246)
- Division mit Rest nach diesem Verfahren kostet

$$4M(n) + M(n) + O(n)$$

Ringoperationen

$$M(n) \in O(n \log n \log \log n)$$

P-adische Inversion mit Newton Iteration

5.10 Beispiel Sei R beliebiger Ring $0 \neq p \in R$. p-adische Darstellung ist auch hier sinnvoll.
Problem: Berechnung eines Inversen von a mod p^l $l > 1$, aus Inverse von a mod p.
Gegeben: b_0 mit $ab_0 \equiv 1 \bmod p$
Gesucht: b mit $ab \equiv 1 \bmod p^l$ ::Liften von Inversen.

procedure InvLift (a, b_0, l) $\{ab_0 \equiv 1 \bmod p \quad l \in \mathbb{N}\}$
$r := \lceil \log l \rceil$
for $i = 1$ **to** r **do**
berechne $b_i := (2b_{i-1} - ab_{i-1}^2) \bmod p^{2^i}$
return b_r

Behauptung: $ab_i \equiv 1 \bmod p^{2^i}$ Induktion: $i = 0$
$1 - ab_{i+1} \equiv 1 - a(2b_i - ab_i^2) \equiv 1 - 2ab_i + a^2 b_i^2 \equiv (1 - ab_i)^2 \equiv 0 \bmod p^{2^{i+1}}$
Bsp:: $R = \mathbb{Z}, p > 1$ oder $R = D[x]$ p monisch, grad $b <$ grad p etwa $p = x$.

P-adische Inversion mit Newton Iteration (Forts.)

5.11 Folgerung Sei R Ring, $p \in R$, $l \in \mathbb{N}^+$::

$$a \text{ ist invertierbar } \mod p^l \text{ gdw } a \text{ invertierbar } \mod p.$$

Aufwand: $O(M(l \log p))$ Wortoperationen, M multipl. Kosten bzw. $O(M(l \text{ grad } p))$ Operationen in D.

Newton Iteration mit quadratischer Konvergenz

5.12 Lemma Sei $F \in R[u]$, $a, b \in R$ mit $F(a) \equiv 0 \mod p^k$ für ein $k \in \mathbb{N}^+$, $F'(a)$ invertierbar modulo p. Weiterhin gelte

$$(*) \qquad b \equiv a - F(a)F'(a)^{-1} \mod p^{2k}$$

Dann gilt $F(b) \equiv 0 \mod p^{2k}$, $b \equiv a \mod p^k$ und $F'(b)$ ist invertierbar mod p.
„Ist a eine gute Approximation einer Nullstelle von F, so ist b eine bessere Approximation, mindestens doppelt so gut".

Quadratische Konvergenz der Newton Iteration

Beweis: $F'(a)$ ist invertierbar mod p^k, d. h. rechte Seite von $(*)$ ist wohldefiniert. $F'(a)^{-1}$ mod p^{2k} lässt sich aus $F'(a)^{-1}$ mod p berechnen.

Da $p^k \mid p^{2k}$ gilt $(*)$ auch mod $p^k \rightsquigarrow b \equiv a - F(a)F'(a)^{-1} \equiv a \bmod p^k$.

$$\begin{aligned} F(b) &\equiv F(a) + F'(a)(b-a) + \rightsquigarrow (b-a)^2 \\ &\equiv F(a) + F'(a)(b-a) \equiv F(a) + F'(a)(-F(a)F'(a)^{-1}) \\ &\equiv 0 \bmod p^{2k} \end{aligned}$$

Da $p^{2k} \mid (a-b)^2$ und $F(a) \equiv 0 \bmod p^k$.

Wegen $a \equiv b \bmod p^k$ gilt $a \equiv b \bmod p$. $F(a) \equiv F(b) \bmod p$ für alle $F \in R[u]$. Insbesondere für F'.

Für p Primelement im euklidischem Bereich ist die Bedingung $F'(a)$ invertierbar mod p gdw $F'(a) \not\equiv 0 \bmod p$.

Algorithmus p-adische Newton Iteration

begin

$\{$Eingabe : $F \in R[u], R$ Ring, $p \in R, l \in \mathbb{N}^+, a_0 \in R,\}$

$\{$Startlösung mit $F(a_0) \equiv 0 \bmod p$,$F'(a_0)$ invertierbar mod $p,\}$

$\{s_0$ modulare Inverse für $F'(a_0) \bmod p\}$

$\{$Ausgabe : $a \in R$ mit $F(a) \equiv 0 \bmod p^l$ und $a \equiv a_0 \bmod p\}$

$r := \lceil \log l \rceil$

for $i := 1$ **to** $r - 1$ **do**

begin

berechne $a_i, s_i \in R$ mit

$a_i \equiv a_{i-1} - F(a_{i-1})s_{i-1} \bmod p^{2^i}$

$s_i \equiv 2s_{i-1} - F'(a_i)s_{i-1}^2 \bmod p^{2^i}$

end

Berechne $a \in R$ mit $a \equiv a_{r-1} - F(a_{r-1})s_{r-1} \bmod p^l$

return a

end

Algorithmus p-adische Newton Iteration

Korrektheit: Sei $a_r \equiv a_{r-1} - F(a_{r-1})s_{r-1} \bmod p^{2^r}$.

- Dann $a \equiv a_r \bmod p^l$ und es genügt die Invarianten.
  $a_i \equiv a_0 \bmod p$, $F(a_i) \equiv 0 \bmod p^{2^i}$ $s_i \equiv F'(a_i)^{-1} \bmod p^{2^i}$

  Für $0 \leq i \leq r$. Per Induktion zu zeigen.
  (Anwendung Lemma+Inversionsalg.).

  Ist $R = \mathbb{Z}$ oder $R = F[x]$, F Körper, und $p \in R$ prim oder irreduzibel, so ist der Startwert als Lösung für Polynom in $K = R/\langle p \rangle$.

  Aufwand:
  $R = D[x], F \in R[u], p = x, l = 2^k$, $\mathrm{grad}_u F = n$,
  $\mathrm{grad}_x F < l \rightsquigarrow O(nM(l)) + O(nl)$ Operationen in D.

  $R = \mathbb{Z}$, $0 \leq a_0 < p$, F grad n, mit Koeffizienten $< p^l$

  $\rightsquigarrow O(nM(l \log p))$ Wortoperationen.

Beispiel

5.13 Beispiel

i) $R = \mathbb{Z}$, $p = 5$ bestimme nicht-triviale Lösung von $u^4 \equiv 1 \bmod 625$, d. h. $F(u) = u^4 - 1$.

Startlösung $a_0 = 2$, da $F(2) \equiv 0 \bmod 5$.

$F'(2) = 4 \cdot 2^3 \equiv 2 \not\equiv 0 \bmod 5$, d. h. $s_0 \equiv 2^{-1} \equiv 3 \bmod 5$.

$$\begin{aligned} a_1 &\equiv a_0 - F(a_0)s_0 = 2 - 15 \cdot 3 \equiv 7 \bmod 25 \\ s_1 &\equiv 2s_0 - F'(a_1)s_0^2 = 2 \cdot 3 - 1372 \cdot 3^2 \equiv 8 \bmod 25 \\ a &\equiv a_1 - F(a_1)s_1 = 7 - 2400 \cdot 8 \equiv 182 \bmod 625 \end{aligned}$$

In der Tat gilt $182^4 = 1 + 1755519 \cdot 625$.

Beispiel

ii) $R = \mathbb{F}_3[x]$ $p = x$. Bestimme Quadratwurzel a von $f = x + 1$ modulo x^4 mit $a(0) = -1$. $F = u^2 - f \in \mathbb{F}_3[x][u]$ $a_0 = -1$ als Startlösung, da $a_0(0) = -1$, $F(a_0) = -x \equiv 0 \bmod x$ sowie $F'(a_0) = 2a_0 \equiv 1 \not\equiv 0 \bmod x$, d h. $s_0 = 1$.

$$\begin{aligned} a_1 &\equiv a_0 - F(a_0)s_0 = -1 - (-x)1 = x - 1 \bmod x^2 \\ s_1 &\equiv 2s_0 - F'(a_1)s_0^2 = 2 \cdot 1 - 2(x-1) \cdot 1^2 \\ &\qquad = x + 1 \bmod x^2 \\ a &\equiv a_1 - F(a_1)s_1 = x - 1 - x^2(x+1) \\ &\qquad = -x^3 - x^2 + x - 1 \bmod x^4 \end{aligned}$$

Offenbar

$$(-x^3 - x^2 + x - 1)^2 = (x + 1) + x^4(x^2 - x - 1)$$

Ideal-adische Newton Iteration

- Inversion eines multivariaten Auswertungshomomorphismus

$$\Phi_I : \mathbb{Z}_p[x_1, \ldots, x_\nu] \to \mathbb{Z}_p[x_1]$$

mit Kern $I = \langle x_2 - \alpha_2, \ldots, x_\nu - \alpha_\nu \rangle \quad \alpha_i \in \mathbb{Z}_p \quad 2 \leq i \leq \nu$.

- Startpunkt: Approximation erster Ordnung zur gesuchten Lösung $\tilde{u} \in \mathbb{Z}_p[\vec{x}]$.

$$u^{(1)} = \Phi_I(\tilde{u}) \in \mathbb{Z}_p[x_1] = \mathbb{Z}_p[\vec{x}]/I$$

- Zusatzinformation: $\tilde{u}$ Lösung der Polynomgleichung $F(u) = 0$, wobei $F(u) \in \mathbb{Z}_p[\vec{x}][u]$.
- Ziel: Definition einer Iterationsformel $u^{(k+1)} = u^{(k)} + \Delta u^{(k)}$, wobei $u^{(i)}$ ideal-adische Approximation i-ter Ordnung und $\Delta u^{(k)} \in I^k$.

Ideal-adische Newton Iteration (Forts.)

Durch Anwendung von Hilfssatz erhält man als Taylorentwicklung
$F(\underbrace{u^{(k)} + \Delta u^{(k)}}) = F(u^{(k)}) + F'(u^{(k)})\Delta u^{(k)} + G(u^{(k)}, \Delta u^{(k)})[\Delta u^{(k)}]^2$

Ideal-adische Approximation der Ordnung $k+1$, d. h. $u^{(k+1)}$ so $F(u^{(k)} + \Delta u^{(k)}) \in I^{k+1}$ und wegen $\Delta u^{(k)} \in I^k$ folgt $[\Delta u^{(k)}]^2 \in I^{2k}$, d. h. wendet man $\Phi_{I^{k+1}}$ an, so gilt

$$(*) \quad 0 = \Phi_{I^{k+1}}(F(u^{(k)})) + \Phi_{I^{k+1}}(F'(u^{(k)}))\Delta u^{(k)} \in \mathbb{Z}_p[\vec{x}]/I^{k+1}$$

und $\Delta u^{(k)}$ muss diese Gleichung erfüllen für $k = 1$ so $\Delta u^{(1)} \in I$ und

$$\Delta u^{(1)} = \sum_{i=2}^{\nu} u_i(x_1)(x_i - \alpha_i) \text{ mit } u_i(x_1) \in \mathbb{Z}_p[x_1]$$

Ideal-adische Newton Iteration–Erster Schritt

Da $u^{(1)} \equiv \tilde{u} \bmod I$, gilt auch $F(u^{(1)}) \in I$, d. h.

$$(**) \quad F(u^{(1)}) = \sum_{i=2}^{\nu} c_i(x_i - \alpha_i) \text{ für } c_i \in \mathbb{Z}_p[\vec{x}] \quad 2 \leq i \leq \nu$$

Nun wird der Homomorphismus Φ_{I^2} für $k = 1$ angewandt und da alle ideal-adischen Terme vom Totalgrad ≥ 2 unterdrückt werden, folgt

$$\Phi_{I^2}(F(u^{(1)})) = \sum_{i=2}^{\nu} c_i(x_1)(x_i - \alpha_i)$$

wobei die Koeffizienten $c_i(x_1) \in \mathbb{Z}_p[x_1]$ definiert sind, durch die Koeffizienten $c_i \in \mathbb{Z}_p[\vec{x}]$ in $(**)$ d. h.

$$c_i(x_1) = \Phi_I(c_i) \quad 2 \leq i \leq \nu$$

$$0 = \sum_{i=2}^{\nu} c_i(x_1)(x_i - \alpha_i) + \Phi_{I^2}(F'(u^{(1)})) \left[\sum_{i=2}^{\nu} u_i(x_1)(x_i - \alpha_i) \right] \in \mathbb{Z}_p[\vec{x}]/I^2$$

gilt nach Gleichung $(*)$. Die ideal-adische Darstellung von $\Phi_{I^2}(F'(u^{(1)}))$ hat für geeignete Koeffizienten $d_i(x_1) \in \mathbb{Z}_p[x_1] \quad 2 \leq i \leq \nu$ die Form:

$$\Phi_{I^2}(F'(u^{(1)})) = \Phi_I(F'(u^{(1)})) + \sum_{i=2}^{\nu} d_i(x_1)(x_i - \alpha_i)$$

Setzt man dies ein, so bleibt

$$0 = \sum_{i=2}^{\nu} c_i(x_1)(x_i - \alpha_i) + \Phi_I(F'(u^{(1)})) \left[\sum_{i=2}^{\nu} u_i(x_1)(x_i - \alpha_i) \right] \in \mathbb{Z}_p[\vec{x}]/I^2$$

$$u_i(x_1) = -\frac{c_i(x_1)}{\Phi_I(F'(u^{(1)}))} \in \mathbb{Z}_p[x_1] \quad 2 \leq i \leq \nu$$

Aktualisierungsformel, die den Korrekturterm $\Delta u^{(1)}$ festlegt.

Ideal-adische Newton Iteration–Folgeschritte

Im allgemeinen Iterationsschritt ist der k-te Korrekturterm $\Delta u^{(k)} \in I^k$ der Term mit Totalgrad k in der ideal-adischen Darstellung der Lösung $\tilde{u} = u(x_1, \ldots, x_\nu)$.
Analog zum ersten Schritt erhält man, falls $F'(u^{(1)}) \not\equiv 0 \bmod I$, die lineare ideal-adische Newton Iteration:

$$u^{(n+1)} = u^{(k)} + \Delta u^{(k)}, \text{ wobei}$$

$$\Delta u^{(k)} = \sum_{i_1=2}^{\nu} \cdots \sum_{i_k=i_{k-1}}^{\nu} u_{\mathbf{i}}(x_1) \prod_{j=1}^{k} (x_{i_j} - \alpha_{i_j})$$

wobei $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_k)$ bezeichnet und

Ideal-adische Newton Iteration–Folgeschritte (Forts.)

$$(\#) \quad u_{\mathbf{i}}(x_1) = -\frac{c_{\mathbf{i}}(x_1)}{\Phi_I(F'(u^{(1)}))} \in \mathbb{Z}_p[x_1]$$

Hierbei gilt

$$\Phi_{I^{k+1}}(F(u^{(k)})) = \sum_{i_1=2}^{\nu} \cdots \sum_{i_k=i_{k-1}}^{\nu} c_{\mathbf{i}}(x_1) \prod_{j=1}^{k} (x_{i_j} - x_{i_j})$$

Die Division in $(\#)$ muss exakt sein (in $\mathbb{Z}_p[x_1]$), wenn die Gleichung $F(u) = 0$ eine Lösung besitzt.
Die $c_{\mathbf{i}}(x_1)$ sind die Koeffizienten der Terme mit Totalgrad k in der ideal-adischen Darstellung von $F(u^{(k)})$ und weiterhin hat $F(u^{(k)})$ keine Terme vom Totalgrad kleiner k (bezüglich I).
Es werden im Iterationsschritt k alle ideal-adischen Terme der Lösung $\tilde{u}$ mit Totalgrad k (bezüglich I) bestimmt.

Beispiel

5.14 Beispiel Bestimme Polynom $u(x,y,z) \in \mathbb{Z}_5[x,y,z]$, das die Quadratwurzel des folgenden Polynoms ist:

$$a(x,y,z) = x^4 + x^3y^2 - x^2y^4 + x^2yz + 2x^2z - 2x^2 - 2xy^3z + xy^2z$$
$$-xy^2 - y^2 + z^2 + yz^2 - yz + z^2 - 2z + 1 \in \mathbb{Z}_5[x,y,z]$$

Dann ist u Lösung der Polynomgleichung

$$F(u) = a(x,y,z) - u^2 = 0$$

Wähle Auswertungspunkte $y = 0$, $z = 0$, d. h. $I = \langle y, z \rangle$. Die ideal-adische Approximation erster Ordnung $u^{(1)} = u(x,0,0) \in \mathbb{Z}_5[x]$ muss eine Quadratwurzel von $a(x,0,0)$ in $\mathbb{Z}_5[x]$ sein. Es ist $a(x,0,0) = x^4 - 2x^2 + 1$, d. h. $u^{(1)} = u(x,0,0) = x^2 - 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$.
Um die lineare ideal-adische Newton Iteration anzuwenden, beachte dass

$$\Phi_I(F'(u^{(1)})) = \Phi_I(-2u^{(1)}) = -2x^2 + 2$$

Beispiel (Forts.)

Es ist nützlich $a(x, y, z)$ in seiner ideal-adischen Darstellung bezüglich I auszudrücken: d. h.

$$\begin{aligned} a(x,y,z) =& [(x^4 - 2x^2 + 1)] + [(2x^2 - 2)z] + [(x^3 - x)y^2 \\ &+ (x^2 - 1)yz + z^2] + [(x)y^2z + yz^2] \\ &+ [(-x^2)y^4 + (-2x)y^3z - y^2z^2] \end{aligned}$$

Nun ist

$$\Phi_{I^2}(F(u^{(1)})) = \Phi_{I^2}(a(x,y,z) - (x^2-1)^2) = (2x^2-2)z \in \mathbb{Z}_5[x,y,z]/I^2$$

Der erste Korrekturterm ist $\Delta u^{(1)} = u_2(x)y + u_3(x)z$, wobei $u_2(x) = 0$, da in $\Phi_{I^2}(F(u^{(1)}))$ auch 0 und

$$u_3(x) = -\frac{c_3(x)}{(-2x^2+2)} = -\frac{(2x^2-2)}{(-2x^2+2)} = 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$$

d. h.

$$u^{(2)} = u^{(1)} + \Delta u^{(1)} = (x^2 - 1) + z \in \mathbb{Z}_5[x,y,z]/I^2$$

Beispiel (Forts.)

Für die nächste Iteration gilt

$$\Phi_{I^3}(F(u^{(2)})) = \Phi_{I^3}(a(x,y,z) - [(x^2-1)+z]^2) =$$
$$= (x^3 - x)y^2 + (x^2-1)yz \in \mathbb{Z}_5[x,y,z]/I^3$$

Neuer Korrekturterm ist $\Delta u^{(2)} = u_{22}(x)y^2 + u_{23}(x)yz + u_{33}(x)z^2$, wobei $u_{33}(x) = 0$, da in $\Phi_{I^3}(F(u^{(2)}))$ auch null und

$$u_{22}(x) = -\frac{c_{22}(x)}{(-2x^2+2)} = -\frac{(x^3-x)}{(-2x^2+2)} = -2x \in \mathbb{Z}_5[x]$$
$$u_{23}(x) = -\frac{c_{23}(x)}{(-2x^2+2)} = -\frac{(x^2-1)}{(-2x^2+2)} = -2 \in \mathbb{Z}_5[x]$$

Beispiel (Forts.)

Also

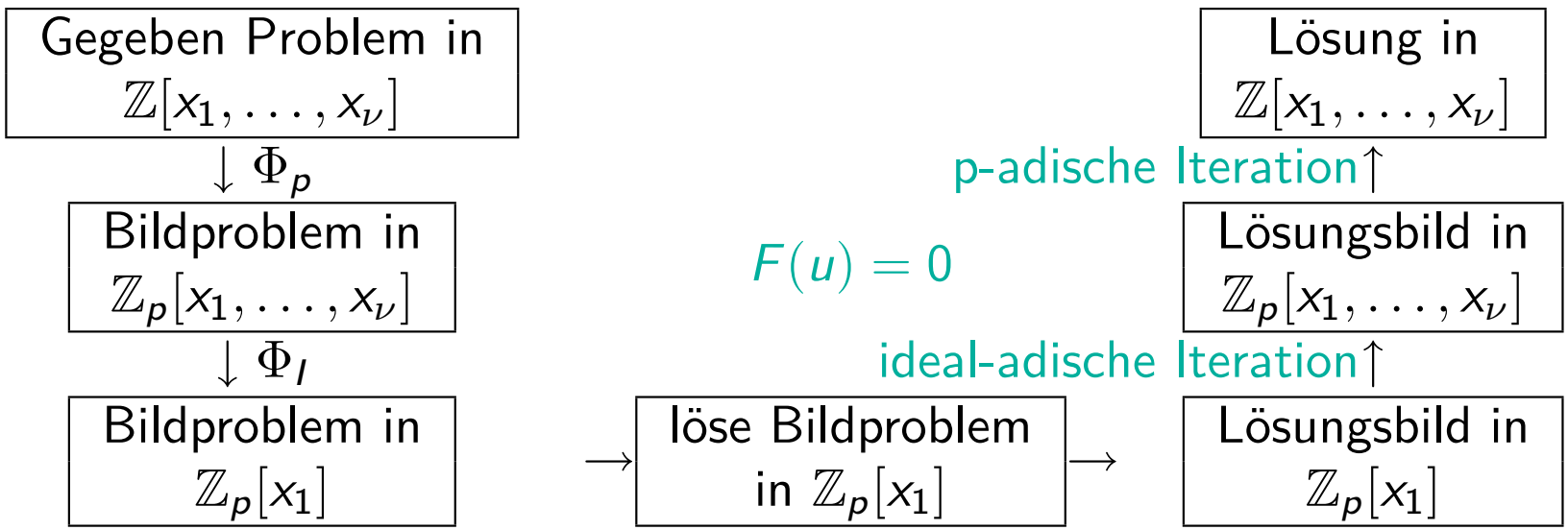
$$u^{(3)} = u^{(2)} + \Delta u^{(2)} = (x^2 - 1) + z + (-2x)y^2 + (-2)yz \in \mathbb{Z}_5[x, y, z]/I^3$$

Als nächstes stellt man fest: $F(u^{(3)}) = 0$, d. h. die gesuchte Quadratwurzel von $a(x, y, z)$ ist

$$u(x, y, z) = u^{(3)} = x^2 - 2xy^2 - 2yz + z - 1 \in \mathbb{Z}_5[x, y, z]$$

Homomorphismus Diagramm

zur Lösung multivariater Polynomprobleme mit der p-adischen und der ideal-adischen Newton-Iterationen



Inversion von Homomorphismen der Form $\Phi_{I,p} : \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_\nu] \to \mathbb{Z}_p[x_1]$ unter der Annahme, dass u sich als Lösung von $F(u) = 0$ darstellen lässt.

$F(u) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_\nu][u]$: eine Variable wird „geliftet“, reicht oft nicht aus!

Einführung zu Hensel's Lemma

- Liften von Lösungen für $F(u, w) = 0$ mit $F(u, w) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_\nu][u, w]$.
- z.B. Faktorisierung von $a(x_1, \ldots, x_\nu)$: $F(u, w) = a(x_1, \ldots, x_\nu) - uw = 0$

  $\Phi_{I,p} : \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_\nu] \to \mathbb{Z}_p[x_1]$, d. h. Problem der Faktorisierung in $\mathbb{Z}_p[x_1]$ (relativ einfach).
- Sei etwa $u_0(x_1)$ Faktor von $\Phi_{I,p}(a) = a_0(x_1)$, dann $a_0(x_1) = u_0(x_1)w_0(x_1)$, wobei $w_0(x_1) = \frac{a_0(x_1)}{u_0(x_1)} \in \mathbb{Z}_p[x_1]$
- Liften von u_0 und w_o m pol. $u, w \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_\nu]$ mit $F(u, w) = a(x_1, \ldots, x_\nu) - uw = 0$ und

$$u(x_1, \ldots, x_\nu) \equiv u_0(x_1) \bmod \langle I, p \rangle$$
$$w(x_1, \ldots, x_\nu) \equiv w_0(x_1) \bmod \langle I, p \rangle$$

Einführung zu Hensel's Lemma (Forts.)

Newton Iteration für nichtlineare Gleichung in 2 Variablen

- Berechnung von GCD für $a(x_1, \ldots, x_\nu), b(x_1, \ldots, x_\nu) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_\nu]$

  $\rightsquigarrow$ berechne GCD $(a_0(x_1), b_0(x_1))$ in $\mathbb{Z}_p[x_1]$ (Euklidisch).

- Ist $u_0(x_1) = GGT(a_0(x_1), b_0(x_1))$, so sei Cofaktor $w_0(x_1) = \dfrac{a_0(x_1)}{u_0(x_1)}$.

  Lifte $u_0(x_1)$ und $w_0(x_1)$ zu $u(x_1, \ldots, x_\nu)$ $w(x_1, \ldots, x_\nu)$ mit $F(u, w) = 0$.
  (Auch b kann verwendet werden).

  $\rightsquigarrow$ $u(x_1, \cdots, x_\nu)$ ist Teiler von $a(x_1, \cdots, x_\nu)$ auch von $b(x_1, \cdots, x_\nu)$? GGT?

Allgemeine Form der Newton Iteration für $F(u, w) = 0$

- Korrekturterme $\Delta u^{(k)}, \Delta w^{(k)}$ mit Hilfe von

$$F(u^{(k)} + \Delta u^{(k)}, w^{(k)} + \Delta w^{(k)}) = F(u^{(k)}, w^{(k)}) + F_u(u^{(k)}, w^{(k)})\Delta u^{(k)} + F_w(u^{(k)}, w^{(k)})\Delta w^{(k)} + E$$

  wobei E Ausdruck mit nicht-linearen $\Delta u^{(k)}, \Delta w^{(k)}$

- Linearisierung, linke Seite auf 0 $\rightsquigarrow$

$$(*) \quad F_u(u^{(k)}, w^{(k)})\Delta u^{(k)} + F_w(u^{(k)}, w^{(k)})\Delta w^{(k)} = -F(u^{(k)}, w^{(k)})$$

- $\rightsquigarrow$ Problem del Lösung Diophantischer Polynomgleichungen.

Allgemeine Form der Newton Iteration für $F(u, w) = 0$ (Forts.)

- Lösung diophantischer Polynomgleichung der Form

$$A^{(k)}\Delta u^{(k)} + B^{(k)}\Delta w^{(k)} = C^{(k)}$$

  mit Polynomen $A^{(k)}, B^{(k)}, C^{(k)}$ und umb. Polynomen $\Delta u^{(k)}, \Delta w^{(k)}$.

- Möglichkeiten: Keine Lösung, viele Lösungen. Lösbar, falls $C^{(k)}$ vielfaches vom $\mathrm{GGT}(A^{(k)}, B^{(k)})$.

- Wir beschränken uns nun auf die Gleichung $F(u, w) = a(x_1, \ldots, x_\nu) - uw = 0$.

- Lösbarkeit hängt wesentlich von $F(u, w)$ ab.

Hensel's Lemma

Seien $a(x) \in \mathbb{Z}[x]$ und $u_0(x), w_0(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ mit

$$a(x) \equiv u_0(x) w_0(x) \bmod p$$

„Lifte" nach $\mathbb{Z}[x]$, d. h. Inversion von $\Phi_p : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_p[x]$.
Berechne $\bar{u} = u(x), \bar{w} = w(x)$ in $\mathbb{Z}[x]$ mit

$$F(\bar{u}, \bar{w}) = a(x) - u(x)w(x) = 0$$

so dass

$$u(x) \equiv u_0(x) \bmod p \qquad w(x) \equiv w_0(x) \bmod p$$

Betrachte $\bar{u}, \bar{w}$ in ihren p-adischen Darstellungen.

$$\bar{u} = u_0(x) + u_1(x)p + \cdots + u_n(x)p^n$$

$$\bar{w} = w_0(x) + w_1(x)p + \cdots + w_n(x)p^n$$

Hensel's Lemma (1)

- Hierbei ist n groß genug, d. h. ist $\frac{1}{2}p^{n+1}$ beschränkt alle Beträge der ganzzahligen Koeffizienten in $a(x)$ und $\bar{u}, \bar{w}$.
- Wie bestimmt man die pol. p-adischen Koeffizienten $u_i(x), w_i(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ für $i = 1, 2, \ldots, n$?
- Seien $u^{(k)}, w^{(k)}$ die p-adische Approximation der Ordnung k für $\bar{u}, \bar{w}$, d. h. bis p^{k-1} und sei

$$\Delta u^{(k)} = u_k(x)p^k \qquad \Delta w^{(k)} = w_k(x)p^k$$

  Beachte dabei $u^{(1)} = u_0(x)$ und $w^{(1)} = w_0(x)$.
- Korrekturterme müssen die diophantische Polynomgleichung $*$ modulo p^{k+1}erfüllen $F_u = -w, F_w = -u$, d. h.

$$-w^{(k)}\Delta u^{(k)} - u^{(k)}\Delta w^{(k)} \equiv -[a(x) - u^{(k)}w^{(k)}] \bmod p^{k+1}$$

Hensel's Lemma (2)

- Da $u^{(k)}w^{(k)}$ eine p-adische Approximation von $a(x)$ der Ordnung k sein muss, kann man durch p^k dividieren, d. h.

$$w^{(k)}u_k(x) + u^{(k)}w_k(x) \equiv \frac{a(x) - u^{(k)}w^{(k)}}{p^k} \bmod p$$

- Wendet man nun Φ_p an, unter Verwendung von $\Phi_p(w^{(k)}) = w_0(x)$ und $\Phi_p(u^{(k)}) = u_0(x)$, so erhält man

$$w_0(x)u_k(x) + u_0(x)w_k(x) = \Phi_p\left[\frac{a(x) - u^{(k)}w^{(k)}}{p^k}\right]$$

die in $\mathbb{Z}_p[x]$ zu lösen ist.

Hensel's Lemma (3)

- p prim, so $\mathbb{Z}_p[x]$ euklidisch.

  d.h. Sind $u_0(x)$, $w_0(x)$ teilerfremd $\rightsquigarrow$ eindeutige Lösung $\sigma(x), \tau(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ mit

$$\sigma(x)u_0(x) + \tau(x)w_0(x) = \Phi_p\left[\frac{a(x) - u^{(k)}w^{(k)}}{p^k}\right]$$

  wobei $\text{grad}(\sigma(x)) < \text{grad}(w_0(x))$.

- Man setze

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} + \tau(x)p^k \qquad w^{(k+1)} = w^{(k)} + \sigma(x)p^k$$

  Behauptung Dies sind die richtigen p-adischen Approximationen der Ordnung $k+1$ für $\bar{u}$ bzw. $\bar{w}$.

Hensel's Lemma (4)

5.15 Satz Hensel's Lemma 1900
Sei p prim in $\mathbb{Z}$ und sei $a(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Seien $u^{(1)}(x), w^{(1)}(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ teilerfremd mit $a(x) \equiv u^{(1)}(x)w^{(1)}(x) \bmod p$.
Dann gibt es für $k \geq 1$ Polynome $u^{(k)}(x), w^{(k)}(x) \in \mathbb{Z}_{p^k}[x]$, so dass

$$a(x) \equiv u^{(k)}(x)w^{(k)}(x) \bmod p^k$$

und

$$u^{(k)}(x) \equiv u^{(1)}(x) \bmod p \quad w^{(k)}(x) \equiv w^{(1)}(x) \bmod p$$

Beweis: Induktion nach k: $k = 1$ Voraussetzung.
Angenommen richtig für $k \geq 1$, d. h. $u^{(k)}(x), w^{(k)}(x) \in \mathbb{Z}_{p^k}[x]$ mit Behauptung.

Hensel's Lemma (5)

Definiere

$$c^{(k)}(x) = \Phi_p \left[\underbrace{\frac{a(x) - u^{(k)}(x)w^{(k)}(x)}{p^k}}_{\text{alle Oper. in } \mathbb{Z}_{p^{k+1}}[x]} \right] \tag{1}$$

Es gibt Polynome $\sigma^{(k)}(x), \tau^{(k)}(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ mit

$$\sigma^{(k)}(x)u^{(1)}(x) + \tau^{(k)}(x)w^{(1)}(x) \equiv c^{(k)}(x) \bmod p \tag{2}$$

und $\text{grad}(\sigma^{(k)}(x)) < \text{grad}(w^{(1)}(x))$.
Setze

$$u^{(k+1)}(x) = u^{(k)}(x) + \tau^{(k)}(x)p^k \quad w^{(k+1)}(x) = w^{(k)}(x) + \sigma^{(k)}(x)p^k$$

Hensel's Lemma (6)

Dann Multiplikation mod p^{k+1} ergibt

$$\begin{aligned} u^{(k+1)}(x)w^{(k+1)}(x) &\equiv u^{(k)}(x)w^{(k)}(x) + (\sigma^{(k)}(x)u^{(1)}(x) + \\ &\quad \tau^{(k)}(x)w^{(1)}(x))p^k \bmod p^{k+1} \\ &\equiv u^{(k)}(x)w^{(k)}(x) + c^{(k)}(x)p^k \bmod p^{k+1} \quad (2) \\ &\equiv a(x) \bmod p^{k+1} \quad (1) \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Behauptung.

5.16 Folgerung : Eindeutigkeit der Hensel Konstruktion
Im Satz (Hensel's Lemma): Ist $a(x) \in \mathbb{Z}[x]$ monisch und dementsprechend wenn die teilerfremden Faktoren $u^{(1)}(x), w^{(1)}(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ monisch gewählt werden, so sind für alle $k \geq 1$ die monischen Polynomfaktoren $u^{(k)}(x)$, $w^{(k)}(x) \in \mathbb{Z}_{p^k}[x]$ eindeutig bestimmt.

Hensel's Lemma (7)

Beweis: Induktion nach k: $k = 1$ klar. Angenommen richtig für ein $k \geq 1$

$u^{(k+1)}(x), w^{(k+1)}(x) \in \mathbb{Z}_{p^{k+1}}[x]$ monisch mit
$a(x) \equiv u^{(k+1)}(x) w^{(k+1)}(x) \bmod p^{k+1}$ und

$u^{(k+1)}(x) \equiv u^{(1)}(x) \bmod p, w^{(k+1)}(x) \equiv w^{(1)}(x) \bmod p.$
Insbesondere
$a(x) \equiv u^{(k+1)}(x) w^{(k+1)}(x) \bmod p^k$ nach Induktion Voraussetzung

$u^{(k+1)}(x) \equiv u^{(k)}(x) \bmod p^k$, $w^{(k+1)}(x) \equiv w^{(k)}(x) \bmod p^k$.
D. h.

$$u^{(k+1)}(x) = u^{(k)}(x) + \tau(x) p^k \qquad w^{(k+1)}(x) = w^{(k)}(x) + \sigma(x) p^k$$

für Polynome $\sigma(x), \tau(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$.

Hensel's Lemma (7)

Behauptung: Diese sind eindeutig: Da $a(x), u^{(1)}(x), w^{(1)}(x)$ monisch, muss
$\text{grad}(\sigma(x)) < \text{grad}(w^{(1)}(x)) \quad \text{grad}(\tau(x)) < \text{grad}(u^{(1)}(x))$
gelten.

(Da $u^{(k+1)}(x)$ und $w^{(k+1)}(x)$ immer gleiche Leitterme wie $u^{(1)}(x)$ bzw. $w^{(1)}(x)$ haben müssen!).

$\rightsquigarrow$

$$a(x) \equiv u^{(k)}(x)w^{(k)}(x) + (\sigma(x)u^{(1)}(x) + \tau(x)w^{(1)}(x))p^k \bmod p^{k+1}$$

$\rightsquigarrow$

$$\sigma(x)u^{(1)}(x) + \tau(x)w^{(1)}(x)) \equiv \frac{a(x) - u^{(k)}(x)w^{(k)}(x)}{p^k} \bmod p$$

$\rightsquigarrow$

$\sigma(x), \tau(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ sind eindeutig.

(Da Lösungen diophantischer Gleichungen unter diesen Voraussetzungen eindeutig sind. Siehe Geddes et al. Theorem 2.6 s.44)

Quadratisches Hensel Lifting

Die Idee von Hensel's Lifting lässt sich etwas allgemeiner formulieren:
Quadratisches Hensel Lifting

- Sei R kommutativer Ring mit 1 (z. B. $R = \mathbb{Z}, R = F[y]$).

  $a, u, w \in R[x]$, $m \in R$ mit $a \equiv uw \bmod m$. Diese Faktorisierung soll nun geliftet werden zu Faktorisierung $a \equiv \hat{u}\hat{w} \bmod m^2$.

- Annahme es gibt $s, t \in R[x]$ mit $su + tw \equiv 1 \bmod m$ (z. B. wenn u, w teilerfremd mod m sind: Ist $R/\langle m \rangle$ Körper, so EEA in $R/\langle m \rangle[x]$ möglich).

- Setze

  $e = a - uw$, $\hat{u} = u + te$, $\hat{w} = w + se$: wie eben.

  $$\begin{aligned} a - \hat{u}\hat{w} &= a - uw - use - wte - ste^2 \\ &= a - uw - (su + tw)e - ste^2 \\ &= (1 - su - tw)e - ste^2 \equiv 0 \bmod m^2 \end{aligned}$$

  (Da $e \equiv 0 \bmod m$ und $1 - su - tw \equiv 0 \bmod m$).

Quadratisches Hensel Lifting (Forts.)

- Startet man mit Primelement p für m, so kann man diesen Prozess induktiv (durch Mitliften der Kongruenz $su + tw \equiv 1$) fortsetzen, um Faktorisierungen bzgl. beliebiger Potenzen von p zu erhalten.

5.17 Beispiel Wir hatten Newton's Iteration zur Berechnung einer nicht-trivialen Lösung für $x^4 - 1 \equiv 0 \bmod 625$ verwendet mit Startwert $x = 2 \bmod 5$.
Dies kann als Lifting einer Faktorisierung gesehen werden: nämlich von $x^4 - 1 \equiv (x-2)(x^3 + 2x^2 - x - 2) \bmod 5$ zu Faktorisierung $\bmod 625$.
Im obigen Kontext: $a = x^4 - 1 \quad p = 5$
$u = x^3 + 2x^2 - x - 2 \qquad w = x - 2$. Die Polynome u, w sind teilerfremd $\bmod 5$: EEA liefert $s = -2, t = 2x^2 - 2x - 1$, so dass $su + tw \equiv 1 \bmod 5$.

Quadratisches Hensel Lifting (Forts.)

$e = a - uw = x^4 - 1 - x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4 = 5x^2 - 5$
$\hat{u} = u + te = 10x^4 - 9x^3 - 13x^2 + 9x + 3$
$\hat{w} = w + se = -10x^2 + x + 8$
Und somit
$a - \hat{u}\hat{w} = 25(4x^6 - 4x^5 - 8x^4 + 7x^3 + 5x^2 - 3x - 1) \equiv 0 \bmod 25$, d. h.
$a \equiv \hat{u}\hat{w} \bmod 25$.
Problem: Grade von $\hat{u}, \hat{w}$ sind größer als die von u bzw. w insbesondere ist ihre Summe $>$ grad a.

- Dies geschieht z. B. wenn Vielfache von m Nullteiler mod m^2 sind und somit ist Produkt der Hauptkoeffizienten $\equiv 0 \bmod m$.

Quadratisches Hensel Lifting (Forts.)

- Dies kann vermieden werden durch Verwendung der Division mit Rest in $\mathbb{R}[x]$. Sie ist möglich wenn der Divisor monisch ist:
- Altlemma:

  i) $a, b \in R[x]$, $b \neq 0$ monisch, dann gibt es eindeutige Polynome $q, r \in R[x]$ mit $a = qb + r$ und grad $r <$ grad b.

  ii) Sind a, b, q, r wie in i) und gilt $a \equiv 0 \bmod m$ für ein $m \in R$, so $q \equiv r \equiv 0 \bmod m$.

  (Beweis ii): Sei grad $b = n \geq 0 \rightsquigarrow$ aus $a \equiv 0 \bmod m$ b monisch, $qx^n \equiv 0 \bmod m$, d. h. $q \equiv 0 \bmod m$ und somit auch $r \equiv 0 \bmod m$.

- Überlegung führt zu: **Algorithmus Hensel Schritt**

//Eingabe: $m \in R \qquad a, u, w, s, t \in R[x]$ mit
$a \equiv uw \bmod m$, $su + tw \equiv 1 \bmod m$, wobei w monisch,
grad $a = n =$ grad $u +$ grad w, grad $s <$ grad w und grad $t <$ grad u.
Ausgabe: Polynome $u^*, w^*, s^*, t^* \in R[x]$ mit

$$a \equiv u^* w^* \bmod m^2 \text{ und } s^* u^* + t^* w^* \equiv 1 \bmod m^2$$

wobei w^* monisch, $u^* \equiv u \bmod m$, $w^* \equiv w \bmod m$,
$s^* \equiv s \bmod m$, $t^* \equiv t \bmod m$, grad $u^* =$ grad u,
grad $w^* =$ grad w, grad $s^* <$ grad w^*, grad $t^* <$ grad u^*.//

1. Berechne $e, q, r, u^*, w^* \in R[x]$ mit grad $r <$ grad w und
   $e \equiv a - uw \bmod m^2, \quad se \equiv qw + r \bmod m^2$
   $u^* \equiv u + te + qu \bmod m^2, \quad w^* \equiv w + r \bmod m^2$
2. Berechne $b, c, d, s^*, t^* \in R[x]$ mit grad $d <$ grad w^* und
   $b \equiv su^* + tw^* - 1 \bmod m^2, \quad sb \equiv cw^* + d \bmod m^2$
   $s^* \equiv s - d \bmod m^2, \quad t^* \equiv t - tb - cu^* \bmod m^2$
3. Return u^*, w^*, s^*, t^*.

Algorithmus Hensel-Schritt: Korrektheit

5.18 Satz Der Algorithmus ist korrekt. Aufwand für:

- $R = \mathbb{Z} : 0(M(n)M(\log m))$ Wortoperationen, falls Eingaben in max-Norm $< m^2$.
- $R = F[y] : 0(M(n)M(\text{grad}_y m))$ Operationen in F Falls grad in y der Eingaben $< 2\text{grad}_y m$.

Beweis: Nachrechnen. $\mathbb{Z}$: Grad der Polynome $\leq n$. Koeffizienten $\leq m^4$ Länge $0(\log m)$. Division mit Rest $0(M(n))$.

Beispiel

5.19 Beispiel $a = x^4 - 1 = 0$ fortgesetzt.
$u = x^3 + 2x^2 - x - 2,\ w = x - 2, s = -2, t = 2x^2 - 2x - 1$
$su + tw \equiv 1 \bmod 5,\ e = a - uw = 5x^2 - 5$

- $se = -10x^2 + 10 : x - 2 = -10x + 5$ mit Rest $r = -5$
  d. h. $q = -10x + 5, r = -5 \quad (\bmod 25)$

$$\begin{aligned} u^* \equiv\ & u + te + qu \equiv x^3 + 2x^2 - x - 2 + \\ & (2x^2 - 2x - 1)(5x^2 - 5) + (-10x + 5)(x^3 + 2x^2 - x - 2) \\ \equiv\ & x^3 + 7x^2 - x - 7 \bmod 25 \end{aligned}$$

$w^* \equiv w + r \equiv x - 2 - 5 \equiv x - 7 \bmod 25.$

- Dann $a \equiv u^* w^* \bmod 25$. Die Grade von u^*, w^* sind die von u bzw. w und die Polynome sind einfacher als zuvor.
- 7 ist somit Lösung von $x^4 - 1 \equiv 0 \bmod 25$ und $7 \equiv 2 \bmod 5$ (Startlösung).

Beispiel (Forts.)

- Zur Berechnung von s^*, t^* die zur nächsten Iteration benötigt werden. Berechne

$$\begin{aligned} b \equiv\ & su^* + tw^* - 1 \equiv -2x^3 + 11x^2 + 2x - 11 + \\ & (2x^2 - 2x - 1)(x - 7) - 1 \\ \equiv\ & -5x^2 - 10x - 5 \bmod 25 \end{aligned}$$

$$sb = 10x^2 - 5x + 10 : x - 7 = \underbrace{10x - 10}_{=c} \quad \text{Rest} \quad \underbrace{-10}_{=d} \quad \bmod 25$$

- $s^* \equiv s - d \equiv 8 \bmod 25$
- $t^* \equiv t - tb - cu^* \equiv -8x^2 - 12x - 1 \bmod 25$

Es gilt
$s^*u^* + t^*w^* \equiv 1 \bmod 25$ und die Grade von s^*, t^* stimmen mit denen von s bzw. t überein.

Beispiel (Forts.)

5.20 Satz Hensel's Lemma Quadratisches Liften
Sei $l \in \mathbb{N}^+$ und es gelten die Eingangsbedingungen für Hensel-Schritt Algorithmus, dann lassen sich Polynome, die die Ausgabebedingungen erfüllen mit m^2 ersetzt durch m^l.
Beweis: Hensel-Schritt induktiv: m ersetzt durch $m, m^2, m^4, \ldots$

5.21 Beispiel $x^4 - 1 \equiv 0$ Fortsetzung. Sei $m = 5$
$a, u_1 = u^* \quad w_1 = w^* \quad s_1 = s^* \quad t_1 = t^*$ in $\mathbb{Z}[x]$ aus Beispiel.

- Es gilt $a \equiv u_1 w_1 \bmod 25$, $s_1 u_1 + t_1 w_1 \equiv 1 \bmod 25$.

Beispiel (Forts.)

Anwendung von Hensel-Schritt Algorithmus liefert.

- $e_2 \equiv a - u_1 w_1 \equiv 50x^2 - 50 \bmod 625$.
  - $q_2 \equiv -225x + 300 \bmod 625$ und $r_2 \equiv -175 \bmod 625$
  - $u_2 \equiv x^3 + 182x^2 - x - 182 \bmod 625$ und $w_2 \equiv x - 182 \bmod 625$
- $b_2 \equiv s_1 u_2 + t_1 w_2 - 1 \equiv -225x^2 + 300x - 25 \bmod 625$
  - $c_2 \equiv 75x - 200 \bmod 625$ und $d_2 \equiv 275 \bmod 625$
- $s_2 \equiv -267 \bmod 625$
  - $t_2 \equiv 267x^2 - 312x - 176 \bmod 625$
- Dann $s_2 u_2 + t_2 w_2 \equiv 1 \bmod 625$.
- $a \equiv u_2 w_2 \bmod 625$, d. h. 182 ist 4-Wurzel von 1 mod 625 kongruent zur Startlösung 2 mod 5.

Beispiel: Hensel Lifting

5.22 Beispiel Sei $m = 3 \quad a = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 4x + 3 \in \mathbb{Z}[x]$.
Dann gilt

- $a \equiv x(x+1)(x^2+1) \bmod 3$. $u_0 = x^2 + xw_0 = x^2 + 1$ teilerfremd mod3.
- $s_0 = x + 1 \qquad t_0 = -x + 1 \qquad s_0 u_0 + t_0 w_0 \equiv 1 \bmod 3$

Zwei Hensel Schritte liefern:

- $e_1 \equiv a - u_0 w_0 \equiv -3x^3 - 3x^2 + 3x + 3 \bmod 9$
  $q_1 \equiv -3x^2 + 3x + 3 \bmod 9 \quad r_1 \equiv 3x \bmod 9$
- $u_1 \equiv x^2 + 4x + 3 \bmod 9$
- $w_1 \equiv x^2 + 3x + 1,\ b_1 \equiv 3x^2 + 3,\ c_1 \equiv 3x + 3,\ d_1 \equiv 0 \bmod 9$
- $s_1 \equiv x + 1 \bmod 9$
- $t_1 \equiv -x - 2 \bmod 9\ e_2 \equiv a - u_1 w_1 \equiv -9x^3 - 27x^2 - 9x \bmod 81$
  $q_2 \equiv -9x^2 - 9x \bmod 81 \quad r_2 \equiv 0 \bmod 81$

Beispiel (Forts.)

- $u_2 \equiv x^2 - 5x + 3 \bmod 81$
- $w_2 \equiv x^2 + 3x + 1 \bmod 81$ $b_2 \equiv -9x^2 - 9x \bmod 81$
  $c_2 \equiv -9x + 9 \bmod 81$ $d_2 \equiv -27x - 9 \bmod 81$
- $s_2 \equiv 28x + 10 \bmod 81$
- $t_2 \equiv -28x - 29 \bmod 81$

$$
\begin{aligned}
e_3 = \quad & a - u_2 w_2 = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 4x + 3 \\
& - \underbrace{(x^2 - 5x + 3)(x^2 + 3x + 1)} \\
= & -(x^4 + 3x^3 + x^2 - 5x^3 - 15x^2 - 5x + 3x^2 + 9x + 3) \\
& + x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 4x + 3 \\
= & \ 0
\end{aligned}
$$

d.h. Wir erhalten sogar die Faktorisierung in $\mathbb{Z}[x]$, da u_2, w_2 irreduzibel in $\mathbb{Z}[x]$.

Eindeutigkeit des Hensel-Liftings

5.23 Satz

Sei R Ring, $m \in R$ nicht Nullteiler, $l \in \mathbb{N}^+$.
$u, w, u^*, w^*, s, t \in R[x]$ nicht Null mit $su + tw \equiv 1 \bmod m$.
Die Hauptkoeffizienten von u und w seien keine Nullteiler mod m, u und u^* (bzw. w und w^*) haben gleiche Hauptkoeffizienten, gleichen Grad und $u \equiv u^* \bmod m$ bzw. $w \equiv w^* \bmod m$.
Gilt $uw \equiv u^*w^* \bmod m^l$, so $u \equiv u^* \bmod m^l$ und $w \equiv w^* \bmod m^l$.

Beweis: Angenommen $u \not\equiv u^* \bmod m^l$ oder $w \not\equiv w^* \bmod m^l$. Wähle $1 \leq i < l$ maximal, so dass $m^i \mid u^* - u$ und $m^i \mid w^* - w$. D. h.
$u^* - u = gm^i$, $w^* - w = hm^i$
$g, h \in R[x]$ und $m \nmid g$ oder $m \nmid h$. O.b.d.A. $m \nmid g$

$$\begin{aligned} 0 &\equiv u^*w^* - uw = u^*(w^* - w) + w(u^* - u) \\ &= (u^*h + wg)m^i \bmod m^l \end{aligned}$$

Eindeutigkeit des Hensel-Liftings (Forts.)

- Da m kein Nullteiler ist, gilt $m \mid m^{l-i} \mid (u^* h + wg)$.
- Bezeichne mit $\overline{}$ Reduktion mod m: Dann
  $\overline{su} + \overline{tw} = 1, \overline{u^*} = \overline{u}, \overline{u^*}\ \overline{h} + \overline{w}\ \overline{g} = 0$ also
  $0 = \overline{t}(\overline{u^*}\ \overline{h} + \overline{w}\ \overline{g}) = \overline{t}\ \overline{uh} + (1 - \overline{su})\overline{g}$

  $= (\overline{t}\ \overline{h} - \overline{sg})\ \overline{u} + \overline{g}$, d. h. $\overline{u} \mid \overline{g}$
- Wegen $HK(u) = \mathrm{HK}(u^*)$ und grad $u =$ grad u^* gilt grad $\overline{g} <$ grad $\overline{u}$.
  Da $\mathrm{HK}(\bar{u}) = \overline{\mathrm{HK}(u)}$ kein Nullteiler ist auch $\overline{u}$ kein Nullteiler und $\overline{g}$ muss 0 Polynom sein. Widersprch zu $m \nmid g$.

Folgerung

5.24 Folgerung Sei R euklidisch, $p \in R$ Primelement. $l \in \mathbb{N}^+$, $f, g, u \in R[x]$ nicht Null mit $p \nmid \mathrm{HK}(f)$, f mod p quadratfrei, $g \mid f$ in $R[x]$, u monisch, nicht konstant mit $u \mid f \bmod p^l$, $u \mid g \bmod p$. Dann gilt $u \mid g \bmod p^l$

Beweis: Seien $h, v, w \in R[x]$ mit $f \equiv gh \equiv uw \bmod p^l$ und $g \equiv uv \bmod p$. Da f mod p quadratfrei, ist auch g mod p quadratfrei und $\mathrm{GGT}(u \bmod p, v \bmod p) = 1$ in $\mathbb{F}_p[x]$.

- Hensel's Lemma liefert $u^*, v^* \in R[x]$, so dass $u^* \equiv u \bmod p$, $v^* \equiv v \bmod p$ und $g \equiv u^* v^* \bmod p^l$.
- Wegen $uvh \equiv gh \equiv uw \bmod p$ gilt $vh \equiv w \bmod p$. Also $v^* h \equiv vh \equiv w \bmod p$ und $u^*(v^* h) \equiv gh = f \equiv uw \bmod p^l$.
- Da u, v teilerfremd mod p sind, liefert die Eindeutigkeit $u \equiv u^* \bmod p^l$ und somit $g \equiv uv^* \bmod p^l$, d. h. $u \mid g \bmod p^l$.

Folgerung

Es gibt auch eine ∞-Version von Hensel's-Lemma.
P-adische Vervollständigung von R: für $p \in R$ prim (irreduzibel).
$R_{(p)}$ Elemente $\sum_{i \geq 0} a_i p^i \quad 0 \leq a_i < p$, $(R = \mathbb{Z})$, sonst
$F[[y]]$ falls $p = y \quad R = F[y]$.

5.25 Satz ∞-Version Hensel's Lemma
Kongruenzen mod m^2 werden durch $=$ in $R_{(p)}$ ersetzt.

- Lineare vs quadratische Iteration (Lifting)
  $p, p^2, p^3, \ldots \qquad p, p^2, p^4, p^8 \ldots$
- Quadratische Iteration muss nicht effizienter als die lineare Iteration sein. Der Vorteil weniger Iterationen machen zu müssen wird durch Kosten für die Einzeliteration relativiert.
- Vergleich durch Miola und Yun: Quadratische Iteration.
  Teuerer: Hauptsächlich wegen Berechnung von b, sb, s^* und t^*.

Beispiele

Frage: Lässt sich jede teilerfremde Faktorisierung von $a(x) = u_0(x)w_0(x)$ in $\mathbb{Z}_p[x]$ zu einer Faktorisierung in $\mathbb{Z}[x]$ liften? **Drei Beispiele**:

5.26 Beispiel 1

$a(x) = x^3 + 10x^2 - 432x + 5040 \in \mathbb{Z}[x] \quad p = 5$

$$\begin{aligned} \Phi_5(a(x)) &= x^3 - 2x \in \mathbb{Z}_5[x] \\ &= x(x^2 - 2) \end{aligned}$$

$u_1(x) = x \quad w_1(x) = x^2 - 2$ teilerfremd Hensel

$s(x) = -2x \quad t(x) = 2 \quad (-2x)x + 2(x^2 - 2) \equiv 1 \bmod 5$

- Lineare Iteration:

Iter.	$\sigma(x)$	$\tau(x)$	$u(x)$	$w(x)$	$e(x)$
0	$-$	$-$	x	$x^2 - 2$	$10x^2 - 430x + 5040$
1	$x - 1$	1	$x + 5$	$x^2 + 5x - 7$	$-450x + 5075$
2	$-x + 2$	1	$x + 30$	$x^2 - 20x + 43$	$125x + 3750$
3	1	0	$x + 30$	$x^2 - 20x + 168$	0

Iteration k am Ende $5^{k+1} \mid e(x)$.

Beispiele (Forts.)

5.27 Beispiel 2 Divergenz der Hensel-Iteration
$a(x) = x^4 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ ist irreduzibel über $\mathbb{Z}[x]$.
Sei $p = 5 \rightsquigarrow \Phi_5(a(x)) = x^4 + 1$ Faktorisierung in $\mathbb{Z}_5[x]$.

- $x^4 + 1 = (x^2 + 2)(x^2 - 2) \in \mathbb{Z}_5[x]$. $u_1(x) = x^2 + 2 \quad w_1(x) = x^2 - 2$ sind teilerfremd in $\mathbb{Z}_5[x]$, d.h. Hensel Konstruktion kann angewendet werden. Konstruktion einer Folge von Faktoren mit

$$a(x) \equiv u^{(k)}(x)w^{(k)}(x) \bmod p^k \text{ (bzw. } p^{2^k})k = 1, 2, 3, .$$

- $s(x) = -1 \quad t(x) = 1 \quad -1(x^2 + 2) + 1(x^2 - 2) \equiv 1 \bmod 5$
$a(x) - (x^2 + 2)(x^2 - 2) = x^4 + 1 - x^4 + 4 = 5 = e(x)$

Beispiele (Forts.)

Ende Iter. Nr.	$\sigma(x)$	$\tau(x)$	$u(x)$	$w(x)$	$e(x)$
5	0	–	–	x^2+2	x^2-2	5
5^2	1	-1	1	x^2+7	x^2-7	50
5^3	2	-2	2	x^2+57	x^2-57	3250
5^4	3	-1	1	x^2+182	x^2-182	33125
5^5	4	2	-2	x^2-1068	x^2+1068	1140625

- ∞-Folge Faktoren in $\mathbb{Z}_{5^k}[x]$ Ende von Iteration k gilt stets

$$u(x)w(x) \equiv x^4+1 \bmod 5^{k+1}$$

- Dies gilt sogar für jede Primzahl p.

Schranke für die Anzahl der Iterationen

- Apriori Schranke für die Anzahl der Iterationen:

  $B \geq \max\{|b| :$ b Koeffizienten in Polynom a oder in jeden möglichen Faktor von a mit Grad $\leq \max\{\text{grad}(u^{(1)}), \text{grad}(w^{(1)})\}$

  $p^l > 2B$ Schranke für die Anzahl der Iterationen.

Beispiele (Forts.)

5.28 Beispiel 3 Das Leitkoeffizienten Problem

Nicht-monischer Fall: $c(x) = \dfrac{a(x) - u(x)w(x)}{p}$

- $\sigma(x)u^{(1)}(x) + \tau(x)w^{(1)} \equiv c(x) \bmod p$

  Eindeutigkeit wird mit grad $\sigma(x) <$ grad $(w^{(1)}(x))$ erreicht.

- Updates:
  $u(x) := u(x) + \tau(x)p \qquad w(x) := w(x) + \sigma(x)p$
  $\rightsquigarrow$ Hauptkoeffizienten von w wird niemals verändert.
  Im monischen Fall gilt auch grad $(\tau(x)) <$ grad $(u^{(1)}(x))$.
  $\rightsquigarrow$ Hauptkoeffizienten von u wird ebenfalls niemals verändert.

  i.A. grad $(c(x)) \leq$ grad $(a(x)) =$ grad $(u^{(1)}(x)) +$ grad $(w^{(1)}(x))$,

  d. h. grad $(\tau(x)) \leq$ grad $(u^{(1)}(x))$.

Beispiele (Forts.)

- Alle Veränderungen vom Hauptkoeffizienten müssen in u realisiert werden.

  $a(x) = 12x^3 + 10x^2 - 36x + 35 \in \mathbb{Z}[x]$
  $= u(x)w(x) = (2x + 5)(6x^2 - 10x + 7) \in \mathbb{Z}[x]$

- $p = 5 \qquad \Phi_5(a(x)) = 2x^3 - x \in \mathbb{Z}_5[x] = 2(x)(x^2+2)$
  2 ist Einheit in $\mathbb{Z}_5[x]$.
  Wahl der Anfangsfaktoren: 2 zum Faktor x oder
  2 zum Faktor $x^2 + 2$
  d.h. $\Phi_5(a(x)) = (2x)(x^2 + 2) = (x)(2x^2 - 1) \in \mathbb{Z}_5[x]$

- Die richtigen Faktoren sind
  $u^{(1)}(x) = 2x$ und $w^{(1)}(x) = x^2 + 2$

- Hensel's Konstruktion: $s(x) = x \quad t(x) = -2$

  $u(x) = 2x \quad w(x) = x^2 + 2 \quad e(x) = 10x^3 + 10x^2 - 40x + 35 \bmod 5$

Beispiele (Forts.)

$\sigma(x)$	$\tau(x)$	$u(x)$	$w(x)$	$e(x)$
$-$	$-$	$2x$	x^2+2	$10x^3+10x^2-40x+35$
$-2x-1$	$2x+1$	$12x+5$	$x^2-10x-3$	$125x^2+50x+50$
$2x+1$	1	$12x+30$	$x^2+40x+22$	$-500x^2-1500x-625$
$-2x-2$	0	$12x+30$	$x^2-210x-103$	$2500x^2+7500x+3125$
$2x+1$	0	$12x+30$	$x^2+1040x+522$	$-12500x^2-37500x-15625$

- Aufsplittung von 12 in $2 \cdot 6$?

  d. h.

- $u^{(3)}(x) = 12x+30 \quad w^{(3)}(x) = x^2+40x+22$

Beispiele (Forts.)

- Sind bis auf Einheiten die richtigen Faktoren

$$u^{(3)}(x)w^{(3)}(x) = 12x^3 + 510x^2 + 1464x + 660 \in \mathbb{Z}[x]$$

- $6^{-1}u^{(3)}(x) \bmod \mathbb{Z}_{125}[x] \qquad 6w^{(3)}(x) \bmod \mathbb{Z}_{125}[x]$

  $6^{-1} = 21 \rightsquigarrow \quad u(x) = 21u^{(3)}(x) = 2x + 5 \in \mathbb{Z}_{125}[x]$

  $$w(x) = 6w^{(3)}(x) = 6x^2 - 10x + 7 \in \mathbb{Z}_{125}[x]$$

- Verwendet wird: 6 ist der richtige LK von w.
- Beachte: $a \in \mathbb{Z}_{p^k}$ ist Einheit gdw $p \nmid a$ in $\mathbb{Z}$.

Liften von Faktorisierungen

5.29 Satz Sei $a(x) \in \mathbb{Z}[x]$, p Primelement in $\mathbb{Z}$, $p \nmid \mathrm{HKoeff}(a(x))$.

- Seien $u^{(1)}(x), w^{(1)}(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ teilerfremd über $\mathbb{Z}_p$ mit $a(x) \equiv u^{(1)}(x)w^{(1)}(x) \bmod p$.
- Seien $u^{(k)}(x), w^{(k)}(x)$, die von der Hensel Konstruktion bestimmten Faktoren mit $a(x) \equiv u^{(k)}(x)w^{(k)}(x) \bmod p^k$, $u^{(k)}(x) \equiv u^{(1)}(x) \bmod p$, $w^{(k)}(x) \equiv w^{(1)}(x) \bmod p$.
- Gibt es Polynome $u(x), w(x) \in \mathbb{Z}[x]$ mit $a(x) = u(x)w(x)$ in $\mathbb{Z}[x]$ und $n(u(x)) \equiv n(u^{(1)}(x)) \bmod p$ bzw. $n(w(x)) \equiv n(w^{(1)}(x)) \bmod p$, wobei n die Normalisierung „mache Polynom monisch als Element von $\mathbb{Z}_p[x]$“.
- Dann sind für alle $k \geq 1$ die Polynome

  $\Phi_{p^k}(u(x))$ und $u^{(k)}(x)$, sowie $\Phi_{p^k}(w(x))$ und $w^{(k)}(x)$ assoziiert im Ring $\mathbb{Z}_{p^k}[x]$.

Liften von Faktorisierungen (Beweis)

Beweis: Sei $k \geq 1$. Nach Vor $p \nmid \mathrm{HKoeff}(a(x))$, d. h. $\mathrm{HKoeff}(a(x))$ ist Einheit in $\mathbb{Z}_{p^k}[x]$.

- $\bar{a}(x) = \mathrm{HKoeff}(a(x))^{-1} a(x) \in \mathbb{Z}_{p^k}[x]$ ist monisch. Wegen

$$\mathrm{HKoeff}(a(x)) \equiv \mathrm{HKoeff}(u^{(k)}(x))\mathrm{HKoeff}(w^{(k)}(x)) \bmod p^k$$

ist p kein Teiler der HKoeff, d. h. sie sind Einheiten $\bmod p^k$.

- $\bar{u}^{(k)} := \mathrm{HKoeff}(u^{(k)}(x))^{-1} u^{(k)}(x) \in \mathbb{Z}_{p^k}[x]$ und
- $\bar{w}^{(k)} := \mathrm{HKoeff}(w^{(k)}(x))^{-1} w^{(k)}(x) \in \mathbb{Z}_{p^k}[x]$ sind monisch.
- Die Voraussetzungen sind auch für $\bar{a}, \bar{u}^{(k)}, \bar{w}^{(k)}$ erfüllt und somit sind die $\bar{u}^{(k)}, \bar{w}^{(k)}$ eindeutig bestimmt.

Liften von Faktorisierungen (Beweis)

- Angenommen es gibt $u(x), w(x)$ mit $a(x) = u(x)w(x)$ in $\mathbb{Z}[x]$.
  $n(u(x)) \equiv n(u^{(1)}(x)) \bmod p$, $n(w(x)) \equiv n(w^{(1)}(x)) \bmod p$.
- Betrachte $\Phi_{p^k}(u(x))$ und $\Phi_{p^k}(w(x)) \in \mathbb{Z}_{p^k}[x]$. Wie eben kann man diese in $\mathbb{Z}_{p^k}[x]$ normalisieren zu $\bar{u}(x), \bar{w}(x)$.
- Wegen der Eindeutigkeit gilt dann:
  $\bar{u}^{(k)}(x) = \bar{u}(x) \qquad \bar{w}^{(k)}(x) = \bar{w}(x)$ in $\mathbb{Z}_{p^k}[x]$,
  d. h.
- $u^{(k)}(x)$ und $\Phi_{p^k}(u(x))$ sind assoziiert im Ring $\mathbb{Z}_{p^k}[x]$,
- Analog für $w^{(k)}(x)$ und $\Phi_{p^k}(w(x))$.

Beispiel (Forts.)

5.30 Beispiel $a(x) = 12x^3 + 10x^2 - 36x + 35 \in \mathbb{Z}[x]$
$= u(x)w(x) = (2x + 5)(6x^2 - 10x + 7) \in \mathbb{Z}[x]$

- $\Phi_5(a(x)) = (2x) \cdot (x^2 + 2) = u^{(1)}(x) \cdot w^{(1)}(x)$
- $\Phi_5(u(x)) = \Phi_5(2x + 5) = 2x$
- $\Phi_5(w(x)) = \Phi_5(6x^2 - 10x + 7) = x^2 + 2$
- $u^{(2)}(x) = 12x + 5 \quad w^{(2)}(x) = x^2 - 10x - 3$
- $\Phi_{25}(u(x)) = 2x + 5 \quad \Phi_{25}(w(x)) = 6x^2 - 10x + 7$
  Unterscheiden sich um Einheiten, z. B. $-4(6x^2 - 10x + 7)$
  $\equiv x^2 - 10x - 3 \qquad -4(12x + 5) = 2x + 5$
- $w^{(3)}(x) = x^2 + 40x + 22 \quad u^{(3)}(x) = 12x + 30$
- $\Phi_{125}(w(x)) = 6x^2 - 10x + 7 \quad \Phi_{125}(u(x)) = 2x + 5$
  $6^{-1}u^{(3)}(x) = 21u^{(3)}(x) = 2x + 5,\ 6w^{(3)}(x) = 6x^2 - 10x + 7$

Modifizierte Hensel Konstruktion: nicht monischer Fall

- Sei $a(x) \in \mathbb{Z}[x]$ primitiv, $a(x) \equiv u^{(1)}(x)w^{(1)}(x) \bmod p$ und es gebe $u(x), w(x)$ mit $a(x) = u(x)w(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

  Es gelte $n(u^{(1)}(x)) \equiv n(u(x)) \bmod p, n(w^{(1)}(x)) \equiv n(w(x)) \bmod p$.

- $\alpha = \mathrm{HKoeff}(a(x))$, $\mu = \mathrm{HKoeff}(u(x))$, $\nu = \mathrm{HKoeff}(w(x))$,

- $\alpha = \mu\nu$. Sei $\bar{a}(x) = \alpha a(x)$. Suche Faktorisierung von $\bar{a}(x) = \mu\nu u(x)w(x) = [\nu u(x)][\mu w(x)] = \bar{u}(x)\bar{w}(x)$.

- Die Hauptkoeffizienten der Faktoren sind bekannt, beide $= \alpha$. Modifiziere die Hensel Konstruktion so, dass

$$\bar{u}^{(k)}(x) = \Phi_{p^k}(\bar{u}(x)) \quad \bar{w}^{(k)} = \Phi_{p^k}(\bar{w}(x))$$

$$\bar{u}^{(k)}(x) = \Phi_{p^k}(\alpha\mathrm{HKoeff}(u^{(k)})^{-1}u^{(k)}(x)), \bar{w}^{(k)}(x) = \Phi_{p^k}(\alpha\mathrm{HKoeff}(w^{(k)})^{-1}w^{(k)}(x))$$

$$\rightsquigarrow u(x) = pp(\bar{u}(x)) \text{ und } w(x) = pp(\bar{w}(x))$$

Modifizierte Hensel Konstruktion: nicht monischer Fall

5.31 Beispiel

$$\begin{aligned} a(x) &= 12x^3 + 10x^2 - 36x + 35 \in \mathbb{Z}[x] \text{ primitiv.} \\ &\equiv u^{(1)}(x)w^{(1)}(x) \bmod 5 \end{aligned}$$

- Mit $u^{(1)}(x) = 2x$, $w^{(1)}(x) = x^2 + 2$.
- $\bar{a}(x) = 12a(x) = 144x^3 + 120x^2 - 432x + 420$
  $\bar{a}(x) \equiv \bar{u}^{(1)}(x)\bar{w}^{(1)}(x) \bmod 5$ mit
  $\bar{u}^{(1)}(x) = \Phi_5(12\ 2^{-1}(2x)) = 2x$
  $\bar{w}^{(1)}(x) = \Phi_5(12\ 1^{-1}(x^2 + 2)) = 2x^2 - 1$
- Hensel Schritt auf $\bar{a}(x)$.
  $u^{(2)}(x) = \bar{u}^{(1)}(x) + (-x + 1)5 = -3x + 5$
  $w^{(2)}(x) = \bar{w}^{(1)}(x) + (x - 1)5 = 2x^2 + 5 - 6$
- $\bar{u}^{(2)}(x) = \Phi_{25}(12\ (-3)^{-1}(-3x + 5)) = 12x + 5$
  $\bar{w}^{(2)}(x) = \Phi_{25}(12\ 2^{-1}(2x^2 + 5x - 6)) = 12x^2 + 5x - 11$

Beispiel (Forts.)

- $u^{(3)}(x) = \bar{u}^{(2)}(x) + 1\ 5^2 = 12x + 30$
  $w^{(3)}(x) = \bar{w}^{(2)}(x) + (-x+1)5^2 = 12x^2 - 20x + 14$
- $\bar{u}^{(3)}(x) = u^{(3)}(x) = 12x + 30$
  $\bar{w}^{(3)}(x) = w^{(3)}(x) = 12x^2 - 20x + 14$
- Dann $\bar{a}(x) - \bar{u}^{(3)}(x)\bar{w}^{(3)}(x) = 0$ also Faktorisierung von $\bar{a}(x)$.

$$u(x) = pp(\bar{u}^{(3)}(x)) = 2x + 5$$
$$w(x) = pp(\bar{w}^{(3)}(x)) = 6x^2 - 10x + 7$$

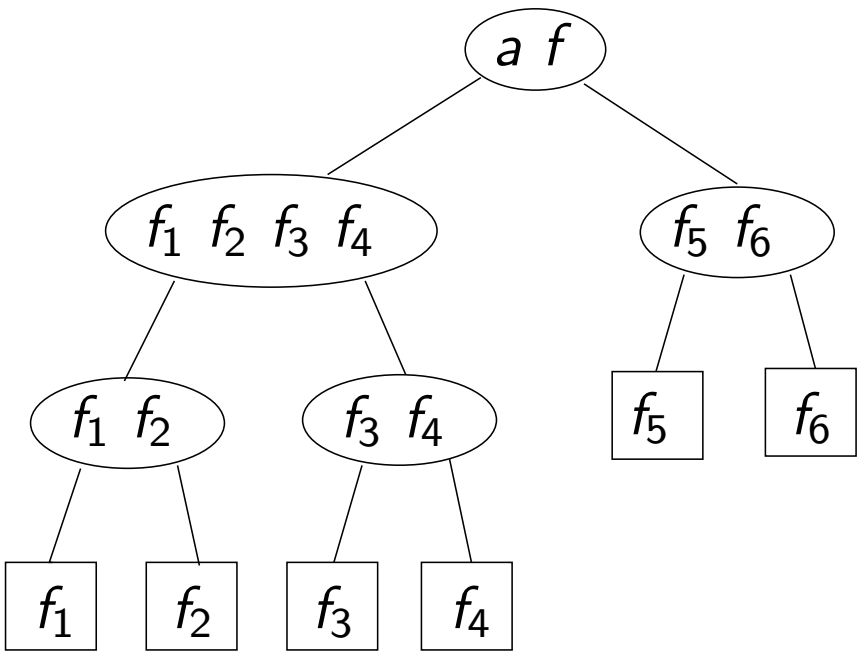
- Weitere Methoden zur Vermeidung bzw. Lösung des HKoeff-Problems mit kleineren Multiplikatoren.
- Siehe G, C, L Kap. 6. Insbesondere die Replace_LC Operation (Yun).

Multifaktor Hensel Lifting

- Lifte Faktorisierung in mehr als zwei Faktoren.
- Sei R Ring, $m \in R$, $f, f_1, \ldots, f_r \in R[x]$, so dass HKoeff$(f)$ Einheit mod m ist, $f_1, \ldots, f_r$ monisch und $f \equiv \text{HKoeff}(f) f_1 \ldots f_r \bmod m$.
  Dann gibt es $a \in R$ mit $a \cdot \text{HKoeff}(f) \equiv 1 \bmod m$
- Ordne die monischen Faktoren ν von f modulo m als Binärbaum τ der Tiefe $d = \lceil \log_2 r \rceil$,
  mit Blättern $f_1, \ldots, f_r$, Wurzel af,
  so dass jeder innere Knoten Produkt seiner beiden Söhne modulo m ist.
- Offenbar gibt es mehrere Möglichkeiten ein Polynom in Zweierfaktoren zu zerlegen. Problem der kombinatorischen Explosion.

Multifaktor Hensel Lifting (Forts.)

- Mehrere Anordnungen sind möglich. z. B. $r = 6$.



Multifaktor Hensel Lifting (Forts.)

- Gibt es jeden inneren Knoten $\nu \in R[x]$ mit Söhnen $g_\nu, h_\nu \in R[x]$, Polynome $s_\nu, t_\nu \in R[x]$ mit grad $s_\nu <$ grad h_ν, grad $t_\nu <$ grad g_ν und
- $s_\nu g_\nu + t_\nu h_\nu \equiv 1 \bmod m$, so heißt τ ein Faktorbaum von f modulo m (existiert stets falls f quadratfrei ist).
- Man erhält einen Faktorbaum τ_2 von f modulo m^2 durch Anwendung des Hensel Schritts von der Wurzel hin zu den Blättern.
  Ist $R/\langle m \rangle$ Körper so O.K

Algorithmus Liften eines Faktorisierungsbaumes mod m

Eingabe: $m \in R$, $f \in R[x]$ mit Grad n, $a_0 \in R$ mit $a_0 HKoeff(f) \equiv 1 \bmod m$, $l \in \mathbb{N}$, Faktorbaum τ für f mod m mit Wurzel $a_0 f$ und r Blätter

Ausgabe: Eine Inverse $a^* \in R$ von $HKoeff(f)$ mod m^l und ein Faktorbaum τ^* von f modulo m^l mit Wurzel $a^* f$, so dass jeder Knoten $\nu^* \in R[x]$ von τ^* kongruent modulo m zum entsprechenden Knoten $\nu \in R[x]$ von τ

Beachte: Baumstruktur bleibt unverändert.

Algorithmus Multifaktor Hensel Lifting (MFHL)

1 $d := \lceil \log_2 l \rceil, \tau_0 := \tau$
2 **for** $j = 1 \ldots d$ **do**
3 {Lifte Inverse von $HKoeff(f)$}
$a_j :\equiv 2a_{j-1} - HKoeff(f)a_{j-1}^2 \bmod m^{2^j}$;
$\tau_j := \tau_{j-1}$;
Ersetze Wurzel von τ_j durch $a_j f$
4 {Lifte Baum}
for jeden inneren Knoten $\nu \in R[x]$ von
τ_j von der Wurzel abwärts **do**
5 Call Hensel_Schritt_Alg mit $m^{2^{j-1}}$
um die Kongruenzen $\nu \equiv g_\nu h_\nu$
und $s_\nu g_\nu + t_\nu h_\nu \equiv 1 \bmod m^{2^{j-1}}$
zu Kongruenzen modulo m^{2^j} zu Liften
6 **return** a_d und τ_d

Algorithmus Multifaktor Hensel Lifting (MFHL)

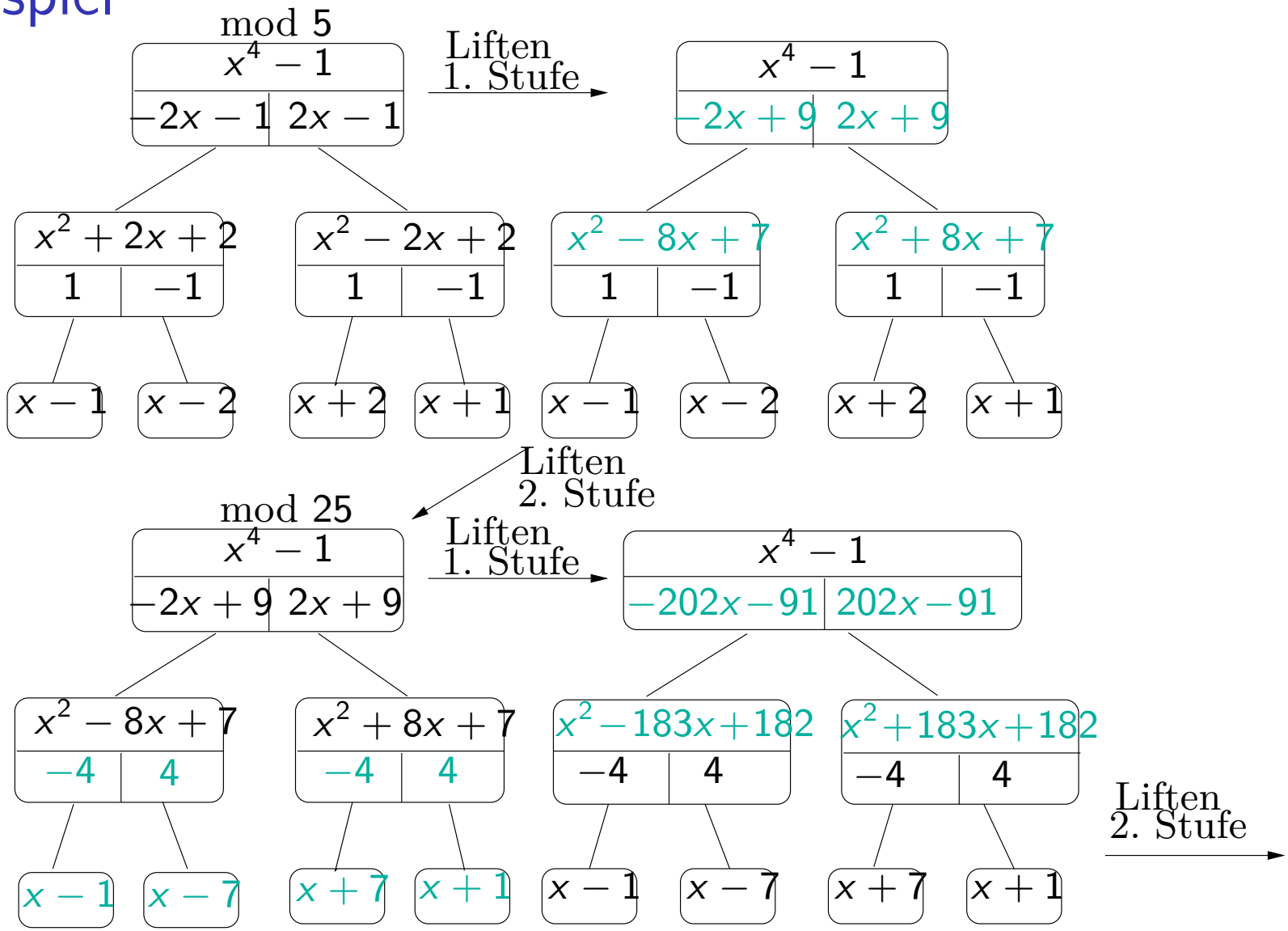
5.32 Satz Der Algorithmus MFHL ist korrekt bzgl. seiner spec.
Er benötigt
$0(M(n)\log rM(l\log m))$ Wortoperationen, falls $R=\mathbb{Z}$, $m>1$ alle Eingaben mit max_Norm $< m^l$ und
$0(M(n)\log rM(l\ \mathrm{grad}_y m))$ Operationen in F, falls $R=F[y]$, Körper F und y-Grad aller Eingaben kleiner als $l\ \mathrm{grad}_y m$.
Beweis:

- Schritt 3 ist korrekt nach inversen Berechnung, nach Newton-Quadrat-Iteration; d. h. die Wurzel von τ_j ist der monische Vielfache von f mod m^{2^j}.
- Durch Induktion nach j zeige τ_j ist Faktorbaum von f mod m^{2^j} und jeder Knoten von τ_j ist kongruent mod m zum entsprechenden Knoten von τ.
  - $j=0$ klar.
  - $j\geq 1$. Wurzel-$\tau_j \equiv$ Wurzel-τ_{j-1} mod m.

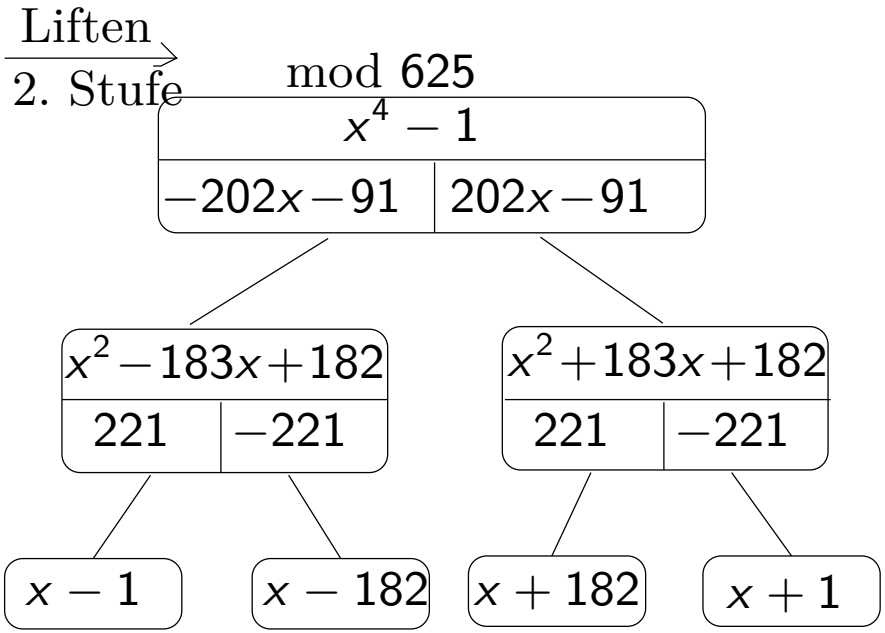
Algorithmus MFHL Korrektheit(Forts.)

- Behauptung über τ_j folgt nun durch Induktion über Baum und Korrektheit von Hensel Schritt. Wegen $l \leq 2^d$ ist τ_d auch Faktorbaum für $f \bmod m^l$.
- $R = \mathbb{Z}$: Reduktion der Koeffizienten von f modulo m, m^2, $m^4, \ldots$ kann mit $0(nM(l \log m))$ Wortoperationen durchgeführt werden.
- Schritt 5 kostet $0(M(\text{grad } v)M(2^j \log m))$ Wortoperationen
- In einer Stufe von τ_j ist die Summe der Grade aller Knoten höchstens n, d h. die Kosten für diese Stufe ist höchstens $0(M(n)M(2^j \log m))$ Wortoperationen.
- Es gibt $d \in 0(\log r)$ Stufen und die Kosten von 4 und 5 für festes j ist $0(M(n) \log rM(2^j \log m))$ Wortoperationen. Dies dominiert Schritt 3. Behauptung folgt aus $\sum_{1 \leq j \leq d} 2^j \leq 4l$.
- Durch balancieren des Faktorbaums bzgl. Grad lässt sich der Faktor $\log r$ durch die Entropie $H(n_1/n, \ldots, n_r/n)(n_i = \text{grad } f_i)$ ersetzen.

Beispiel

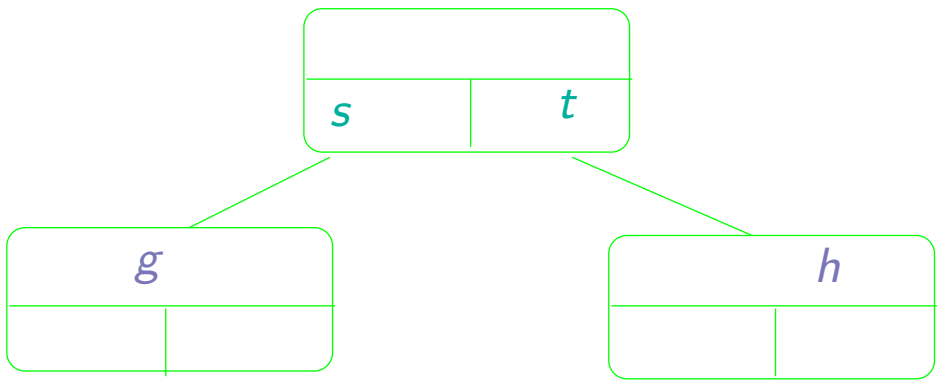

mod 5
x^4-1
$-2x-1 \mid 2x-1$
Liften
1. Stufe
x^4-1
$-2x+9 \mid 2x+9$
x^2+2x+2
$1 \mid -1$
x^2-2x+2
$1 \mid -1$
x^2-8x+7
$1 \mid -1$
x^2+8x+7
$1 \mid -1$
$x-1$
$x-2$
$x+2$
$x+1$
$x-1$
$x-2$
$x+2$
$x+1$
Liften
2. Stufe
mod 25
x^4-1
$-2x+9 \mid 2x+9$
Liften
1. Stufe
x^4-1
$-202x-91 \mid 202x-91$
x^2-8x+7
$-4 \mid 4$
x^2+8x+7
$-4 \mid 4$
$x^2-183x+182$
$-4 \mid 4$
$x^2+183x+182$
$-4 \mid 4$
$x-1$
$x-7$
$x+7$
$x+1$
$x-1$
$x-7$
$x+7$
$x+1$
Liften
2. Stufe

Beispiel(Forts.)



Ausgang

$$x^4-1 \equiv (x-1)(x-2)(x+2)(x+1) \quad \text{mod} 5$$



$$sg+th \equiv 1 \text{ Mod}$$

Faktorisierung in $\mathbb{Z}[x]$ mit quadratischem Hensel Lifting. Der Algorithmus Faktorisierung in $\mathbb{Z}[x]$ nach Zassenhaus

//Eingabe: $f \in \mathbb{Z}[x]$ quadratfrei, primitiv, grad $n \geq 1$ mit $HKoeff(f) > 0$, max_norm $f = A$.
Ausgabe: Irreduzible Faktoren $\{f_1, \ldots, f_k\} \subseteq \mathbb{Z}[x]$ von f//

1 **if** $n = 1$ **then return**$\{f\}$
$b := HKoeff(f)$; $B := (n+1)^{1/2} 2^n A b$;
$c := (n+1)^{2n} A^{2n-1}$; $\gamma := \lceil 2 \log_2 c \rceil$;

2 **repeat** wähle Primzahl $p \leq 2\gamma \ln \gamma$, $\bar{f} := f \bmod p$
until $p \nmid b$ and $\bar{f}$ quadratfrei in $\mathbb{F}_p[x]$

$l := \lceil \log_p(2B+1) \rceil$
3 {Modulare Faktorisierung}
Berechne $h_1, \ldots, h_r \in \mathbb{Z}[x]$ mit max_norm höchstens $p/2$ die nicht konstant, monisch und irreduzibel modulo p mit
$f \equiv b h_1 \cdots h_r \bmod p$

Algorithmus (Forts.)

4 {Hensel Lifting}
$a := b^{-1} \bmod p$
Verwende EEA in $\mathbb{F}_p[x]$ um Faktorbaum für f modulo p mit Blätter $h_1 \cdots h_r$ zu bestimmen
Call MFHL um Faktorisierung $f \equiv b g_1 \cdots g_r \bmod p^l$
mit monischen Polynome $g_1, \ldots, g_r \in \mathbb{Z}[x]$ mit max_norm höchstens $p^l/2$ so dass $g_i \equiv h_i \bmod p \quad (1 \leq i \leq r)$ zu berechnen

5 {Initialisiere die Indexmenge T der modularen Faktoren, die noch behandelt werden müssen, die Menge G der gefundenen Faktoren, sowie Restpolynom das noch faktorisiert werden muss f^*}

$T := \{1, \ldots, r\}; s := 1; G := \varnothing; f^* := f;$

Algorithmus (Forts.)

6 {Faktoren-Kombination}
while $2s \leq \#T$ **do**
7 **for** all subsets $S \subseteq T$ of cardinality $\#S = s$ **do**
8 Compute $g^*, h^* \in \mathbb{Z}[x]$ mit max_norm $\leq p^l/2$ und
$$g^* \equiv b \prod_{i \in S} g_i \bmod p^l \quad h^* \equiv b \prod_{i \in T \setminus S} g_i \bmod p^l$$
9 **if** $\|g^*\|_1 \|h^*\|_1 \leq B$ **then**
$T := T \setminus S$; $G := G \cup \{pp(g^*)\}$;
$f^* := pp(h^*)$; $b := \mathrm{HKoeff}(f^*)$;
goto 6;
10 $s := s + 1$;
11 **return** $G \cup \{f^*\}$

Algorithmus (Forts.)

- Hierbei ist
  $\|f\|_1 = \sum_{0 \le 1 \le \text{grad } f} |f_i|$, $\|f_1\|_\infty \le \|f\|_1 \le (n+1)\|f\|_\infty$
- $\|g^*\|_1 \, \|h^*\|_1 \le B$ gdw. $g^* h^* = b f^*$

  „$\curvearrowleft$“ Mignotes Schranke (vzG. S. 156).

  „$\curvearrowright$“ wegen $g^* h^* \equiv b f^* \bmod p^l$.
  $\|g^* h^*\|_\infty \le \|g^* h^*\|_1 \le \|g^*\|_1 \|h^*\|_1 \le B < p^{l/2}$, d. h. | alle Koeff.$| < p^l/2 \rightsquigarrow$ gleich.

5.33 Satz (Beweis später). Der Algorithmus ist korrekt, Kosten später.

Algorithmus Zassenhaus: Beispiel

5.34 Beispiel $f = 6x^4 + 5x^3 + 15x^2 + 5x + 4 \in \mathbb{Z}[x]$.

Wähle $p = 5, \bar{f} = x^4 - 1$ mit $f \equiv \bar{f} \bmod 5$.

$\bar{f}$ ist quadratfrei in $\mathbb{Z}_5[x]$. $B := \sqrt{5} \cdot 2^4 \cdot 15 \cdot 6 \approx 3220$,

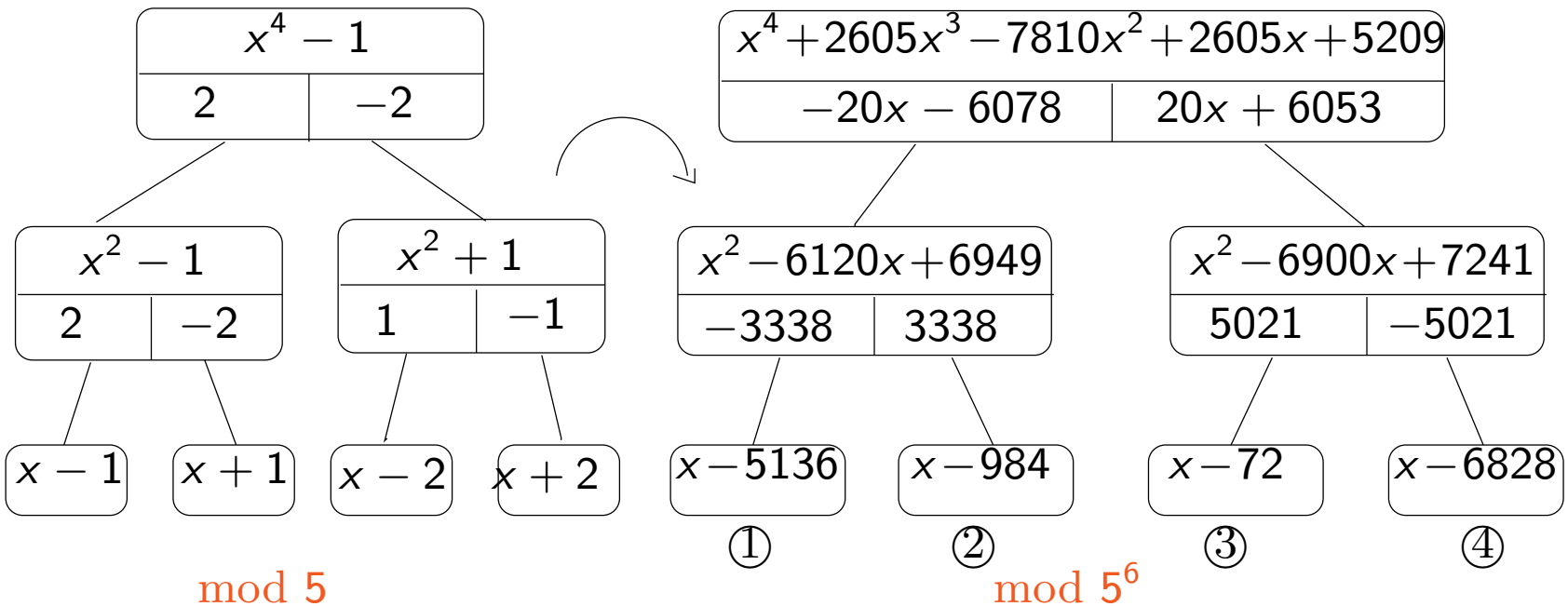
- $l = \lceil \log_5(2B + 1) \rceil = 6$.
- Schritt 3: modulare Faktorisierung

$$f \equiv b h_1 h_2 h_3 h_4 = 1(x-1)(x+1)(x-2)(x+2) \bmod 5$$

- Schritt 4: Liften eines Faktorbaumes für f mod 5 zu Faktorbaum für f modulo 5^6 (mod5^6 aus Schranke l).

Algorithmus Zassenhaus: Beispiel (Forts.)

Schritt 4:



Algorithmus Zassenhaus: Beispiel (Forts.)

- Teilmengen von $S \subseteq \{1,2,3,4\}$ mit $S = 1$: Keine Faktorisierung.

$$S = \{1,3\} : g^* \equiv b g_1 g_3 = 6(x - 5136)(x - 72)$$

$$\equiv 6x^2 + 2x + 2 \mod 5^6$$

$$h^* \equiv b g_2 g_4 = 6(x - 984)(x - 6828) \equiv 6x^2 + 3x + 12 \mod 5^6.$$

$\|g^*\|_1 \|h\|_1 \leq B$, d. h. $g^* h^* = b f^*$.

- $pp(g^*) = 3x^2 + x + 1 \quad pp(h^*) = 2x^2 + x + 4$ sind die irreduziblen Faktoren von f.

Multivariate Verallgemeinerung von Hensel's Lemma

Problemstellung: Finde $u, w \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_\nu]$ mit

$$F(u, w) = a(x_1, \ldots, x_\nu) - uw = 0$$

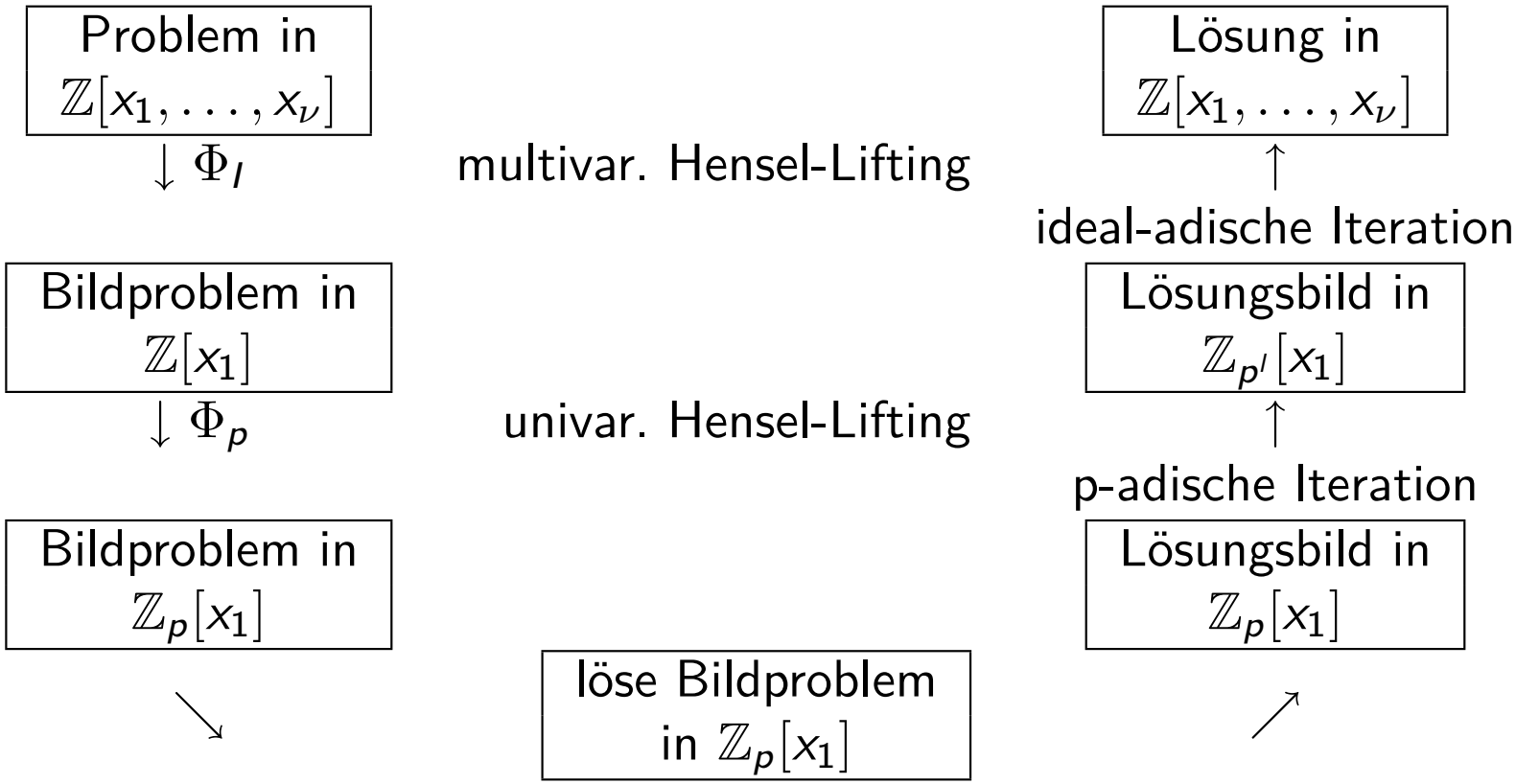
und

$$u(x_1, \ldots, x_\nu) \equiv u_0(x_1) \bmod \langle I, p \rangle$$
$$w(x_1, \ldots, x_\nu) \equiv w_0(x_1) \bmod \langle I, p \rangle$$

Bei Geg. u_0, w_0 mit $a \equiv u_0 w_0 \bmod \langle I, p \rangle$

$I = \langle x_2 - \alpha_2, \ldots, x_\nu - \alpha_\nu \rangle$, p Primzahl.

Homomorphismus Diagramm



Beachte den Unterschied zum Lifting von $F(u) = 0$ via Newton Iteration: Φ_I und Φ_p vertauscht. Bei p-adischer Iteration steht $\mathbb{Z}_{p^l}[x_1]$ und nicht $\mathbb{Z}[x_1]$: Hierbei muss I groß genug gewählt werden. Trennung vom multivariaten und univariaten Fall.

Multivariate Verallgemeinerung von Hensel's Lemma

Die Grundoperation bei der Hensel Iteration zur Lösung von $F(u, w) = a(x_1, \ldots, x_\nu) - uw = 0$ ist die Bestimmung der Lösungen einer polynomialen diophantischen Gleichung der Form

$$(*) \qquad A^{(k)}\Delta u^{(k)} + B^{(k)}\Delta w^{(k)} = C^{(k)}$$

Für Korrekturterme $\Delta u^{(k)}, \Delta w^{(k)}$ mit $A^{(k)}$, $B^{(k)}$ und $C^{(k)}$ gegebene Polynome.

- Bei Vertauschung von Φ_I, Φ_p müssten für das I-adische Lifting die Gleichungen in $\mathbb{Z}_p[x_1]$ gelöst werden und für das p-adische Lifting in $\mathbb{Z}_p[x_1, \ldots, x_\nu]$.
- Die Lösung von (*) im euklidischen Bereich $\mathbb{Z}_p[x]$ ist einfach, aber in $\mathbb{Z}_p[x_1, \ldots, x_\nu]$ schwierig (kein euklidischer Bereich).

Multivariate Verallgemeinerung von Hensel's Lemma

- Bei der vorgeschlagenen Anordnung erst p-adische Iteration, dann ideal-adische Iteration wird die Lösung "einfacher".
  Die Gleichung (*) muss dann im Ring $\mathbb{Z}_{p^l}[x_1]$ gelöst werden. Dieser Ring ist zwar kein euklidischer Ring aber „fast", da $\mathbb{Z}_{p^l}$ fast ein Körper ist (die Nullteiler sind bekannt und auch die invertierbaren Elemente).
- D. h. man kann EEA verwenden. Wählt man p richtig, so lässt sich die Gleichung (*) lösen und die Lösung aus $\mathbb{Z}_{p^l}[x_1]$ zu Lösung in $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_\nu]$ liften.
- Problem: richtige Wahl der α_i, d. h. Nullstellen um keine wichtigen Informationen zu verlieren.

Lösung diophantischer Polynomgleichungen in $\mathbb{Z}_{p^l}[x_1]$

Wende Newton's Iteration um Lösung in $\mathbb{Z}_p[x_1]$ zu Lösung in $\mathbb{Z}_{p^l}[x_1]$ zu liften.

Problem: Finde Polynome $s^{(l)}(x_1), t^{(l)}(x_1) \in \mathbb{Z}_{p^l}[x_1]$, die die Gleichung

$$(*) \qquad s^{(l)}(x_1)u(x_1) + t^{(l)}(x_1)w(x_1) \equiv 1 \bmod p^l$$

mit $u(x_1), w(x_1) \in \mathbb{Z}_{p^l}[x_1]$ Polynome, so dass $\Phi_p(u(x_1)), \Phi_p(w(x_1))$ teilerfremd in $\mathbb{Z}_p[x_1]$, d. h. Newton's Iteration wird auf

$$G(s,t) = s \cdot u(x_1) + t \cdot w(x_1) - 1 = 0 \text{ angewendet.}$$

Wie beim Hensel's Einzelschrittverfahren kann die Lösung der diophantischen Gleichung von $\mathbb{Z}_p[x_1]$ nach $\mathbb{Z}_{p^l}[x_1]$ geliftet werden.

Lineare oder quadratische Iteration.

Lösung diophantischer Polynomgleichungen in $\mathbb{Z}_{p^l}[x_1]$

Lineare Iteration::

$$s^{(k+1)} = s^{(k)} + \Delta s^{(k)}, t^{(k+1)} = t^{(k)} + \Delta t^{(k)}$$

$$(\#) \qquad u(x_1)s_k(x_1) + w(x_1)t_k(x_1) \equiv \frac{1 - s^{(k)}u(x_1) - t^{(k)}w(x_1)}{p^k} \bmod p$$

,
wobei $\Delta s^{(k)} = s_k(x_1)p^k \quad \Delta t^{(k)} = t_k(x_1)p^k$.

$s^{(1)}, t^{(1)}$ werden aus (*) in $\mathbb{Z}_p[x_1]$ bestimmt mit EEA.
Für $k = 1, 2, \ldots, l-1$ wird $(\#)$ in $\mathbb{Z}_p[x]$ gelöst unter Verwendung von $s^{(1)}, t^{(1)}$.
Wir erhalten somit folgenden Satz.

Lösung diophantischer Polynomgleichungen in $\mathbb{Z}_{p^l}[x_1]$

5.35 Satz Sei p Primzahl, $l \in \mathbb{N}^+$ und $u(x_1), w(x_1) \in \mathbb{Z}_{p^l}[x_1]$ mit

i) $p \nmid \text{HKoeff}(u(x_1)), p \nmid \text{HKoeff}(w(x_1))$.

ii) $\Phi_p(u(x_1))$ und $\Phi_p(w(x_1))$ teilerfremd in $\mathbb{Z}_p[x_1]$.

Dann gibt es für jeden Polynom $c(x_1) \in \mathbb{Z}_{p^l}[x_1]$ eindeutig bestimmte Polynome $\sigma(x_1), \tau(x_1) \in \mathbb{Z}_{p^l}[x_1]$ mit

$$\sigma(x_1)u(x_1) + \tau(x_1)w(x_1) \equiv c(x_1) \bmod p^l$$

und

$$\text{grad}(\sigma(x_1)) < \text{grad}(w(x_1))$$

Ist $\text{grad}(c(x_1)) < \text{grad}(u(x_1)) + \text{grad}(w(x_1))$ erfüllt, so gilt auch

$$\text{grad}(\tau(x_1)) < \text{grad}(u(x_1))$$

Beweis: Existenz klar. Eindeutigkeit: Siehe Beweis der Eindeutigkeit bei Hensel's quadratischem Lifting.

Multivariate Hensel Konstruktion

Finde multivariate Polynome
$u(x_1, \ldots, x_\nu), w(x_1, \ldots, x_\nu) \in \mathbb{Z}_{p^l}[x_1, \ldots, x_\nu]$ mit

$$a(x_1, \ldots, x_\nu) - uw \equiv 0 \bmod p^l,$$

so dass

$$\begin{aligned} u(x_1, \ldots, x_n) &\equiv u^{(1)}(x_1) \bmod \langle I, p^l \rangle \\ w(x_1, \ldots, x_n) &\equiv w^{(1)}(x_1) \bmod \langle I, p^l \rangle \end{aligned}$$

wobei $u^{(1)}(x_1), w^{(1)}(x_1) \in \mathbb{Z}_{p^l}[x_1]$ gegeben mit

$$a(x_1, \ldots, x_\nu) - u^{(1)}(x_1) w^{(1)}(x_1) \equiv 0 \bmod \langle I, p^l \rangle$$

$a(x_1, \ldots, x_\nu) \in \mathbb{Z}_{p^l}[x_1, \ldots, x_\nu], I \in \mathbb{N}$,
$I = \langle x_2 - \alpha_2, \ldots, x_\nu - \alpha_\nu \rangle$.

Multivariate Hensel Konstruktion

Bezeichnet man die gesuchten Lösungen mit $\bar{u}, \bar{w}$ und betrachtet man ihre I-adischen Entwicklungen, so

$$\bar{u} = u^{(1)} + \Delta u^{(1)} + \Delta u^{(2)} + \cdots + \Delta u^{(d)}$$

bzw.

$$\bar{w} = w^{(1)} + \Delta w^{(1)} + \Delta w^{(2)} + \cdots + \Delta w^{(d)}$$

wobei d maximaler totaler Grad von Termen in $\bar{u}$ oder $\bar{w}$,
$u^{(1)} = \Phi_I(\bar{u})$, $w^{(1)} = \Phi_I(\bar{w})$ und $\Delta u^{(k)}, \Delta w^{(k)} \in I^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, d)$.
Multivariate Taylor Darstellung

$$\Delta u^{(k)} = \sum_{i_1=2}^{\nu} \sum_{i_2=i_1}^{\nu} \cdots \sum_{i_k=i_{k-1}}^{\nu} u_{\mathrm{i}}(x_1) \prod_{j=1}^{k} (x_{i_j} - \alpha_{i_j})$$

$\mathrm{i} = (i_1, \ldots, i_k)$ $\quad u_{\mathrm{i}}(x_1) \in \mathbb{Z}_{p^l}[x_1]$.
Analog mit $\Delta w^{(k)}$.

Multivariate Taylor Darstellung

Zu lösen ist

$$(*) \quad w^{(k)}\Delta u^{(k)} + u^{(k)}\Delta w^{(k)} \equiv a(x_1 \ldots x_\nu) - u^{(k)}w^{(k)} \bmod \langle I^{k+1}, p^l \rangle$$

wobei $u^{(k)}w^{(k)}$ die ideal-adische Approximation der Ordnung k sind, d. h.

$$a(x_1, \ldots, x_\nu) - u^{(k)}w^{(k)} \in I^k$$

Rechte Seite von (*) hat die Gestalt

$$\sum_{i_2=2}^{\nu}\sum_{i_2=i_1}^{\nu}\cdots\sum_{i_k=i_{k-1}}^{\nu} c_i(x_1)\prod_{j=1}^{k}(x_{i_j} - \alpha_{i_j})$$

für geeignete $c_i(x_1) \in \mathbb{Z}_{p^l}[x_1]$. Ersetzen und Koeffizientenvergleich liefert

$$(**) \quad w^{(k)}u_i(x_1) + u^{(k)}w_i(x_1) \equiv c_i(x_1) \bmod \langle I, p^l \rangle$$

Hieraus lassen sich die I-adischen Koeffizienten $u_i(x_1), w_i(x_1) \in \mathbb{Z}_{p^l}[x_1]$ bestimmen.

Multivariate Hensel Konstruktion

Da dies eine Kongruenz mod I ist, kann man Φ_I auf die linke Seite anwenden, d. h. zu lösen ist.

$$w^{(1)}(x_1)u_i(x_1) + u^{(1)}(x_1)w_i(x_1) \equiv c_i(x_1) \bmod p^l$$

wobei $u^{(1)}(x_1), w^{(1)}(x_1) \in \mathbb{Z}_{p^l}[x_1]$ die Ausgangspolynome der Lösung sind. Unter den vorgegebenen Bedingungen gilt sogar Eindeutigkeit der Lösungen.

5.36 Satz Multivariate Hensel Konstruktion
Sei p-Primzahl, $I \in \mathbb{N}^+$, $a(x_1, \ldots, x_\nu) \in \mathbb{Z}_{p^l}[x_1, \ldots, x_\nu]$,
$I = \langle x_2 - \alpha_2, \ldots, x_\nu - \alpha_\nu \rangle$, $\alpha_2, \ldots, \alpha_\nu \in \mathbb{Z}_p$,
$p \nmid \mathrm{HKoeff}(\Phi_I(a(x_1, \ldots, x_\nu)))$ und seien $u^{(1)}(x_1), w^{(1)}(x_1) \in \mathbb{Z}_{p^l}[x_1]$ mit

i) $a(x_1, \ldots, x_\nu) \equiv u^{(1)}(x_1)w^{(1)}(x_1) \bmod \langle I, p^l \rangle$

ii) $\Phi_p(u^{(1)}(x_1)), \Phi_p(w^{(1)}(x_1))$ teilerfremd in $\mathbb{Z}_p[x_1]$.

Satz: Multivariate Hensel Konstruktion

- Dann gibt es für $k \geq 1$ multivariate Polynome $u^{(k)}, w^{(k)} \in \mathbb{Z}_{p^l}[x_1, \ldots, x_\nu]/I^k$, so dass

$$a(x_1, \ldots, x_\nu) \equiv u^{(k)} w^{(k)} \bmod \langle I^k, p^l \rangle$$

und $u^{(k)} \equiv u^{(1)}(x_1) \bmod \langle I, p^l \rangle \quad w^{(k)} \equiv w^{(1)}(x_1) \bmod \langle I, p^l \rangle$

- Eindeutigkeit: Falls $a(x_1, \ldots, x_\nu)$ monisch bzgl. x_1, d. h. der Koeffizient in $a(x_1, \ldots, x_\nu)$ von $x_1^{d_1}$ ist 1, wobei d_1 der Grad von a in x_1 ist. Werden $u^{(1)}(x_1)$ und $w^{(1)}(x_1)$ monisch gewählt, so sind die Lösungen der diophantischen Gleichungen (**) eindeutig.
- Probleme bei der Anwendung: Leading Coeff. Problem und Bad Zero Problem. $\rightsquigarrow$ exponentielles Wachstum für Zwischenergebnisse.

Beispiel

5.37 Beispiel Sei $p = 5 \qquad l = 1$

$a(x, y, z) = x^2y^4z - xy^9z^2 + xyz^3 + 2x - y^6z^4 - 2y^5z$

$I = \langle y - 1, z - 1 \rangle$ max x-Grad 2.

$a(x, y, z) \equiv x^2 + 2x + 2 \bmod \langle I, 5 \rangle$

Es gilt

$a(x, y, z) \equiv (x - 2)(x - 1) \bmod \langle I, 5 \rangle$.

Wählt man $u^{(1)}(x) = x - 2$, $w^{(1)}(x) = x - 1$, so sind die Bedingungen vom Satz erfüllt.

$a(x, y, z)$ ist nicht monisch aber $w(x, y, z)$ ist monisch und somit liefert Hensel Lifting die richtige Antwort.

Beispiel (Forts.)

Betrachte die l-adische Darstellung von $a(x,y,z)$:

$$\begin{aligned}
a(x,y,z) \equiv & (x^2+2x+2) - (x^2+1)(y-1) + (x^2+x-1)(z-1) \\
& +(x^2-x)(y-1)^2 - (x^2-1)(y-1)(z-1) + (2x-1)(z-1)^2 \\
& -(x^2-x)(y-1)^3 + (x^2-2x)(y-1)^2(z-1) - \\
& -(x+1)(y-1)(z-1)^2 + (x-1)(z-1)^3 + (x^2-x)(y-1)^4 \\
& +(-x^2+2x)(y-1)^3(z-1) - x(y-1)^2(z-1)^2 \\
& +(x-1)(y-1)(z-1)^3 - (z-1)^2 - (x-2)(y-1)^5 \\
& +(x^2-2x)(y-1)^4(z-1) + x(y-1)^3(z-1)^2 \\
& -(y-1)(z-1)^4 + (x-1)(y-1)^6 - (2x+1)(y-1)^5(z-1) \\
& -x(y-1)^4(z-1)^2 - x(y-1)^7 + (2x+1)(y-1)^6(z-1) \\
& - \dots \\
& - \dots \\
& - \dots \\
& -(y-1)^6(z-1)^4 - x(y-1)^9(z-1)^2 \bmod 5
\end{aligned}$$

Hensel Konstruktion für das Beispiel

l-adische Darstellung enthält 38 Terme im Vergleich zu 6 Terme in der l-adischen Darstellung bzgl. $I = \langle y, z \rangle$.

Problem: Anzahl der zu lösenden polynomialen diophantischen Gleichungen ist proportional zur Anzahl der Terme in der l-adischen Darstellung von $a(x, y, z)$.

Die Hensel Konstruktion für dieses Beispiel liefert

$$\begin{aligned}
u^{(7)} = {} & (x-2) + (-x+1)(y-1) + (x-2)(z-1) + x(y-1)^2 \\
& +(-x-2)(y-1)(z-1) + (-2)(z-1)^2 + (-x)(y-1)^3 + \\
& +x(y-1)^2(z-1) + (-2)(y-1)(z-1)^2 + (z-1)^3 \\
& +(x)(y-1)^4 + (-x)(y-1)^3(z-1) + (1)(y-1)(z-1)^3 \\
& +(x)(y-1)^4(z-1) \\
w^{(7)} = {} & (x-1) + (-1)(z-1) + (-1)(y-1)^5 + (-1)(y-1)^5(x-1)
\end{aligned}$$

Hensel Konstruktion für das Beispiel

Ausmultiplizieren mod5 liefert

$$u^{(7)} \equiv xy^4z + yz^3 + 2 \bmod 5 \qquad w^{(7)} \equiv x - y^5z \bmod 5$$

.

Die Iteration hält hier, da

$e^{(7)} = a(x,y,z) - u^{(7)}w^{(7)} = 0.$

Problem: Auswertungspunkt $\neq 0$. Leider kann man nicht immer Auswertungspunkte $= 0$ wählen, da $p \nmid \mathrm{HKoeff}(\Phi_I(a(x_1,\ldots,x_\nu)))$.

Möglichkeit: Variablentransformation
$x_j \leftarrow x_j + \alpha_j \;\; 2 \leq j \leq \nu$, falls $I = \langle x_2 - \alpha_2, \ldots, x_\nu - \alpha_\nu \rangle$
Problem der Zwischenergebnisse bleibt erhalten.

Möglichkeit (Forts.)

- Möglichkeiten zur einfacheren Berechnung siehe G.C.L 262 $\rightarrow$ dünn besetzte MV Polynome.

$$c_i(x_1) = \frac{1}{n_1! \ldots n_m!} \Phi_l \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_{j-1}} \right)^{n_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_m}} \right)^{n_m} e^{(k)} \right)$$

- Wang EEZ-GCD Algorithmus:
  Variablenweise

$$\mathbb{Z}_{p^l}[x_1] \rightarrow \mathbb{Z}_{p^l}[x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{Z}_{p^l}[x_1, x_2, x_3] \cdots$$

Inhalt Kapitel 6

Anwendungen modularer und p-adischer Methoden
- GCD Berechnungen
- Faktorisierung
- Quadratfreie Faktorisierung
- Getrennte Grad Faktorisierung-Distinct Degree Factorization
- Equal-Degree Factorization (Gleiche-Grad-Faktorisierung)-Algorithmus von Cantor und Zassenhaus
- Anwendung: Nullstellen-Bestimmung
- Faktorisierungsalgorithmen, die auf linearer Algebra basieren
- Anwendung: Irreduzible Polynome: Test und Konstruktion
- Faktorisierung in $\boldsymbol{R}[\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_n}]$, $\boldsymbol{R}$ ZPE Ring
- Faktorisierung in $K[x]$ für K algebraischer Zahlenkörper

GCD Berechnung - Faktorisierung

GCD (GGT)-Berechnungen

- klassisch EEA (euklid. Ringe) Z.B. $F[x]$ $O(M(n)logn)$ Körperoperationen.
- (Pseudo-) Polynomiale Restefolgen, reduzierte PRS (primitiver EA $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_\nu]$) (kleiner Grad ≤ 2)
  Problem Koeffizientenwachstum
- Sylvester Matrix und Subresultanten
- Modularer Algorithmus (Brown) Big-Prime, Small-Primes
- p-adisch EZGCD (Moses u. Yun)
- EEZ-GCD (Wang).
- GCD-Heuristic

GCD Berechnung: Beispiel

Seien
$a(x) = x^8 + x^6 - 3x^4 - 3x^3 + 8x^2 + 2x - 5, b(x) = 3x^6 + 5x^4 - 4x^2 - 9x + 21$

EEA in $\mathbb{Q}[x]$ liefert PRF mit $r_5(x) = -\frac{1288744821}{543589225}$, d.h. $a(x), b(x)$ sind teilerfremd in $\mathbb{Z}[x]$.

Problem: Koeffizientenwachstum + Berechnung im Quotientenkörper (GGT-Berechnungen).

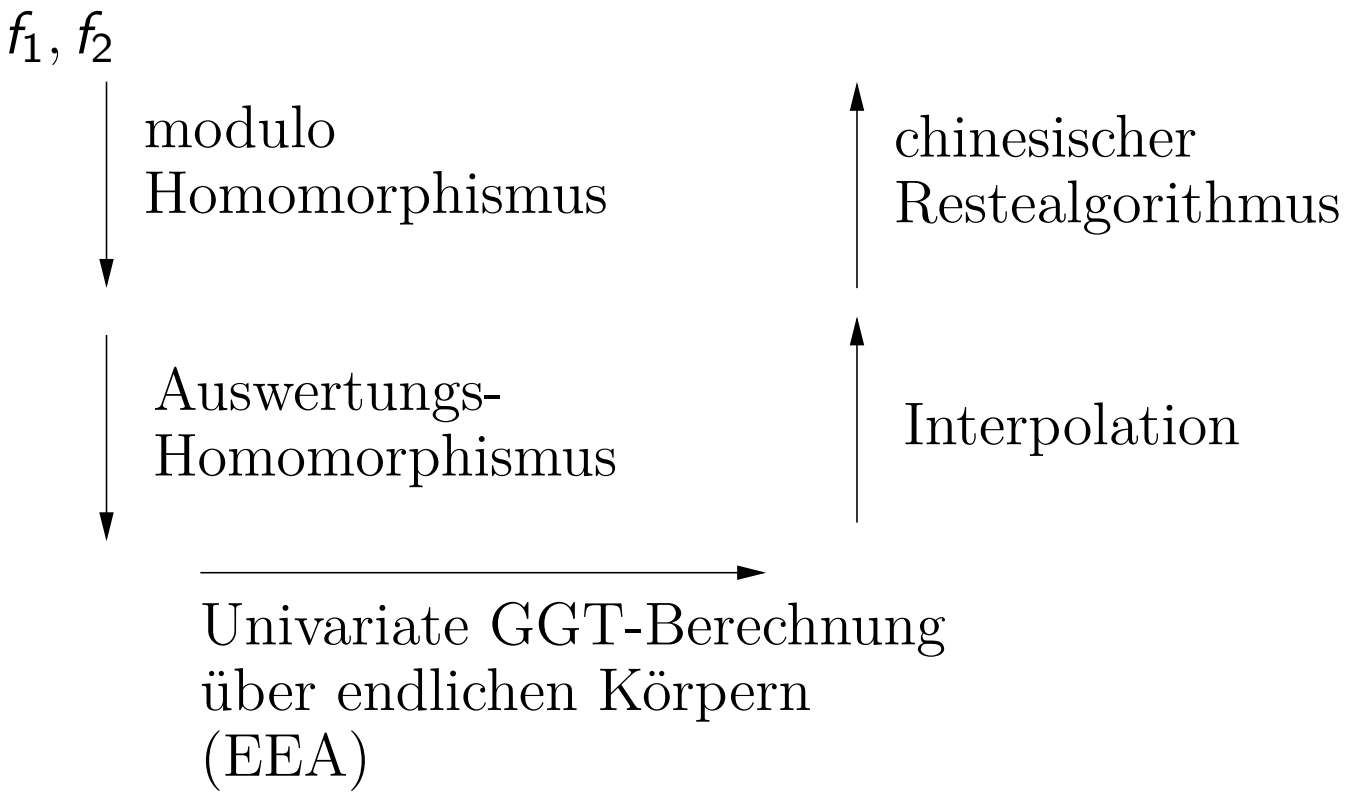
Modular: $\phi_{23} : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_{23}[x]$. EAA in $\mathbb{Z}_{23}[x]$ liefert 1 als GGT.
$\phi_2 : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_2[x]$. EAA in $\mathbb{Z}_2[x]$ liefert $x + 1$ als GGT $\rightsquigarrow$ Unglückliche Homomorphismen.

p-adisch: EZGCD, EEZ-GCD (Wang)

Messungen: Siehe vz Gathen, Gerhard (S 183 Fälle $\mathbb{Z}[x], F[x, y]$)

GCD Berechnungen - Schemata

Modularer Algorithmus: f_1, f_2 Multivariate Polynome



Faktorisierung

Anwendungen: Simplifikation, symbolische Integration
Lösung von Polynomgleichungen
Kodierungstheorie, Zahlentheorie
Kryptographie

Lösungsweg

- Reduktion auf Problem der Faktorisierung in $\mathbb{Z}_p[x]$
- Quadratfreie-Faktorisierung
- Distinct-Degree Factorization (Getrennte Grad Faktorisierung)
- Equal-Degree Factorization (Gleicher-Grad Faktorisierung)
- Berlekamp's Algorithmen

Faktorisierung

Welche Ringe sind interessant für die Faktorisierung

$\mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], R[x]$ R ZPE Ring, $F[x]$ F endlicher Körper,
$\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_\nu], \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_\nu], \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

R ZPE-Ring, $a \in R[x]$
cont(a) =GGT(Koeff von a) (einheitsnormal)
$pp(a) = a/\text{cont}(a)$ d.h. a primitiv gdw $\text{cont}(a) = 1$
Es gilt $\text{cont}(ab) = \text{cont}(a)\text{cont}(b)$ und $pp(ab) = pp(a)pp(b)$.

Sind a, b primitiv, so auch ab, d. h. prim-Elemente von $R[x]$ sind die prim-Elemente von R plus primitive Polynome in $R[x]$, die irreduzibel in $K[x]$ sind, wobei K Quotientenkörper von R ist. (Beweis!)

Faktorisierung (Forts.)

Insbesondere für Faktorisierung in $\mathbb{Q}[x]$ bzw. $\mathbb{Z}[x]$:

Ist $a \in \mathbb{Z}[x]$ primitiv $\rightsquigarrow a = f_1 \dots f_k$ in irreduziblem $f_i \in \mathbb{Q}[x]$ liefert Faktorisierung $a = f_1^* \dots f_k^*$ mit $f_i^* \in \mathbb{Z}[x]$ irreduzibel.
(Durch Multiplikation mit Nennern und Entfernung von Inhalt).

$a \in \mathbb{Z}[x]$ beliebig. Faktorisierung von a ist Faktorisierung vom Inhalt von a (als Element von $\mathbb{Z}$) + Faktorisierung von $pp(a)$, d. h.

Faktorisierung in $\mathbb{Z}[x] \rightsquigarrow$ Faktorisierung in $\mathbb{Q}[x]$ plus Faktorisierung in $\mathbb{Z}$.

Quadratfreie Faktorisierung

Reduktion des Faktorisierungsproblems auf Faktorisierung von Polynomen ohne Mehrfachfaktoren.

6.1 Definition Sei R ZPE-Ring, $a(x) \in R[x]$ primitives Polynom.
$a(x)$ heißt quadratfrei, falls $a(x)$ ohne Mehrfachfaktoren, d. h. es gibt kein $b(x)$, $\text{grad}(b) \geq 1$, $b(x)^2 | a(x)$.
Die quadratfreie Faktorisierung von $a(x)$ ist

$$a(x) = \prod_{i=1}^{k} a_i(x)^i \qquad \text{(genauer:: die Folge der } a_i(x)\text{)}$$

wobei für jedes i $a_i(x)$ quadratfreies Polynom und

$$\text{GGT}(a_i(x), a_j(x)) = 1 \text{ für } i \neq j$$

Beachte: Einige der a_i in der QFF von a können 1 sein.

Quadratfreie Faktorisierung

6.2 Beispiel

Sei $a(x) = (x^2+1)(x^2-1)^4(x^3+3x)^5$. Hierbei sind $a_2(x) = a_3(x) = 1$.

Beachte ebenfalls, dass die a_i nicht faktorisiert sein müssen.

$\mathrm{QFF}(a(x)) = (x^2+1, 1, 1, x^2-1, x^3+3x)$.
(Folge der Quadratfreienfaktoren von $a(x)$).

Quadratfreiheit wird über die Ableitung bestimmt.

Sei $a = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, dann ist die Ableitung von a::

$$a'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$$

hierbei ist $n = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{-mal}}$.

Es gelten die üblichen Ableitungsregeln!

Charakterisierung der Quadratfreiheit

6.3 Lemma Sei $a(x)$ primitiv in $R[x]$. R ZPE-Ring mit Charakteristik 0 (d. h. $\underbrace{1+\cdots+1}_{n} \neq 0$ für alle $n \geq 1$).

Sei $c(x) = GGT(a(x), a'(x))$, dann hat a mehrfache Faktoren gdw $c(x) \neq 1$. Also $a(x)$ quadratfrei gdw $c(x) = 1$.

Beweis: $\curvearrowright$: Sei $a(x) = b(x)^2 w(x)$, grad $b \geq 1$
$\rightsquigarrow a'(x) = 2b(x)b'(x)w(x) + b(x)^2 w'(x) = b(x)\hat{w}(x) \rightsquigarrow c(x) \neq 1$.

$\curvearrowleft$: Angenommen $c(x) \neq 1$, aber $a(x)$ quadratfrei.
$a(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_k(x)$, $p_i(x)$ irreduzibel.
$\text{grad}(p_i(x)) \geq 1$, $\text{GGT}(p_i(x), p_j(x)) = 1$ für $i \neq j$. Dann

$$a'(x) = p_1'(x)p_2(x)\cdots p_k(x) + \cdots + p_1(x)\cdots p_{k-1}(x)p_k'(x)$$

Angenommen $p_i(x) | c(x)$ (Es gibt mindestens ein solches i.)
O.B.d.A. $i = 1$ $p_1(x) | a'(x) \rightsquigarrow p_1(x) | p_1'(x)p_2(x)\cdots p_k(x) \rightsquigarrow p_1(x) | p_1'(x)$
geht nur, wenn $p_1'(x) = 0$. Char 0 $\rightsquigarrow p_1(x)$ konstant. $\lightning$

Bestimmung der quadratfreien Faktorisierung

Aus $a(x) = \prod_{i=1}^{k} a_i(x)^i \rightsquigarrow$

$a'(x) = \sum_{i=1}^{k} a_1(x) \cdots i a_i(x)^{i-1} a_i'(x) \cdots a_k(x)^k$ also

$c(x) = \mathrm{GCD}(a(x), a'(x)) = \prod_{i=2}^{k} a_i(x)^{i-1}$. (Beweis!)

Setzt man $w(x) := a(x)/c(x) = a_1(x)a_2(x)\cdots a_k(x)$.
$\rightsquigarrow$ $w(x)$ ist Produkt der quadratfreien Faktoren ohne Multiplizitäten.

Abspaltung von $a_1(x)$:: Sei
$y(x) = \mathrm{GCD}(c(x), w(x))$, so gilt $a_1(x) = w(x)/y(x)$.

Dann weiter mit $c(x)$. $\rightsquigarrow$ Berechnung der $a_i(x)$.

Algorithmus quadratfreie Faktorisierung

procedure Square_Free($a(x)$)
  {$a(x) \in R[x]$, primitiv, char$(R) = 0, R$ ZPE}
  {Ausgabe quadratfreie Faktorisierung von a(x) }
$i := 1; outp := 1; b(x) := a'(x);$
$c(x) := \mathrm{GGT}(a(x), b(x)); w(x) := a(x)/c(x);$
while $c(x) \neq 1$ **do**
  begin
  $y(x) := \mathrm{GGT}(w(x), c(x)); z(x) := w(x)/y(x);$
  $outp := outp \sqcup z(x); i := i + 1;$
  $w(x) := y(x); c(x) := c(x)/y(x);$
  end
$outp := outp \sqcup w(x);$
return $outp, i$.

Korrektheit ok. Komplexität Übung. $0(k$Kosten $\mathrm{GGT}(a, a'))$

Algorithmus quadratfreie Faktorisierung

6.4 Beispiel Sei $a(x) = x^8 - 2x^6 + 2x^2 - 1 \in \mathbb{Z}[x]$

$b(x) = a'(x) = 8x^7 - 12x^5 + 4x,$
$c(x) = x^4 - 2x^2 + 1,\ w(x) = x^4 - 1.$

Da $c(x) \neq 1$ nach einem Schleifendurchgang

$y(x) = x^2 - 1,\ z(x) = outp = x^2 + 1,$
$i = 2,\ w(x) = c(x) = x^2 - 1$
2 Schleifendurchgang

$y(x) = x^2 - 1,\ z(x) = 1,\ outp = (x^2 + 1) \sqcup 1$
$i = 3,\ w(x) = x^2 - 1,\ c(x) = 1$

$outp := outp \sqcup w(x) = (x^2 + 1) \sqcup 1 \sqcup (x^2 - 1).$

Dies ist die quadratfreie Faktorisierung.

Effizientere Methoden: Yun's QFF-Algorithmus

Sei $a(x) = a_1(x)a_2(x)^2 \cdots a_k(x)^k$, QFF von $a(x)$.

Dann

$$\begin{aligned} a'(x) &= a_1'(x)a_2(x)^2 \cdots a_k(x)^k + \cdots + ka_1(x)a_2(x)^2 \cdots a_k(x)^{k-1}a_k'(x) \\ &= \sum_{1 \le i \le k} i \frac{a(x)}{a_i(x)} a_i'(x) \end{aligned}$$

$\mathrm{GGT}(a_i(x), a_j(x)) = 1$ für $i \neq j$.

Also $c(x) = \mathrm{GGT}(a(x), a'(x)) = \prod_{i=2}^{k} a_i(x)^{i-1}$.

Sei $w(x) = a(x)/c(x) = \prod_{i=1}^{k} a_i(x)$ Produkt der QFF von $a(x)$.

Dann

$$\begin{aligned} y(x) &= a'(x)/c(x) \\ &= a_1'(x)a_2(x) \cdots a_k(x) + \cdots + ka_1(x) \cdots a_{k-1}(x)a_k'(x) \end{aligned}$$

Yun's QFF-Algorithmus (Forts.)

Setzt man

$$\begin{aligned} z(x) = \quad & y(x) - w'(x) = y(x) - \sum_{i=1}^{k} a_1(x) \cdots a_i'(x) \cdots a_k(x) \\ = \quad & a_1(x)a_2'(x) \cdots a_k(x) + \cdots + (k-1)a_1(x) \cdots a_{k-1}(x)a_k'(x) \\ = \quad & a_1(x)[a_2'(x) \cdots a_k(x) + \cdots + (k-1)a_2(x) \cdots a_{k-1}(x)a_k'(x)] \end{aligned}$$

So erhält man den ersten QF-Term durch Berechnen von

$$a_1(x) = \mathrm{GGT}(w(x), z(x))$$

Der Unterschied bisher ist die zusätzliche Berechnung der Ableitung.

Der nächste Schritt ist es die QFF von $c(x)$ zu bestimmen. Hierfür sind die entsprechenden $w(x), y(x)$ und $z(x)$ bestimmt durch

$w(x) = w(x)/a_1(x) = a_2(x) \cdots a_k(x)$

$y(x) = z(x)/a_1(x) = a_2'(x) \cdots a_k(x) + \cdots + (k-1)a_2(x) \cdots a_{k-1}(x)a_k'(x)$

$z(x) = y(x) - w'(x) = a_2(x)[a_3'(x) \cdots a_k(x) + \cdots + (k-2)a_3(x) \cdots a_k'(x)]$

und somit $a_2(x) = \mathrm{GGT}(w(x), z(x))$. Usw.

Yun's quadratfreier Faktorisierungsalgorithmus

procedure Square_Free_Yun($a(x)$)
{Eingabe:$a(x) \in R[x]$, primitiv char$(R) = 0$, R ZPE, grad$(a) = n$}
{Ausgabe: quadratfreie Faktorisierung von $a(x)$}
begin
(1) $i := 1$; **output** $:= 1$;
$b(x) := a'(x)$; $c(x) := \mathrm{GGT}(a(x), b(x))$;
(2) $w(x) := a(x)/c(x)$; $y(x) := b(x)/c(x)$; $z(x) := y(x) - w'(x)$
while $z(x) \neq 0$ **do**
begin
$g(x) := \mathrm{GGT}(w(x), z(x))$;
$outp := outp \sqcup g(x)$; $i := i + 1$;
$w(x) := w(x)/g(x)$; $y(x) := z(x)/g(x)$; $z(x) := y(x) - w'(x)$
end
(3) $outp := outp \sqcup w(x)$;
return $(outp, i)$;
end.

Yun's quadratfreier Faktorisierungsalgorithmus

6.5 Satz Yun's QFFA ist korrekt und benötigt $0(M(n)\log n)$ Operationen in R. (Zweimal Kosten für die GGT-Berechnung von $a(x), a'(x)$).

Korrektheit folgt aus der Vorüberlegung.
Für die Kosten: Sei $(g_1, \ldots, g_m)$ QFF von a und $d_j = \text{grad} g_j \quad 1 \leq j \leq m$.

Schritt (1) kostet $0(M(n)\log n)$.

Seien w_i, y_i, z_i Werte beim Eingang Durchgang i.
$\text{grad}(w_i) = \sum_{i \leq j \leq m} d_j, \text{grad}(y_i) = \text{grad}(w_i) - 1, \text{grad}(z_i) = \text{grad}(y_i)$.
Die GGT Berechnungen im i-ten Durchgang kostet $0(M(\text{grad}(w_i))\log n)$ und die zwei Divisionen $0(M(\text{grad}(w_i)))$ Operationen in F (M Kosten der Multiplikation) wegen der Subaditivität von M gilt

$$\sum_{1 \leq i \leq m} M(\text{grad}(w_i)) \leq M(\sum_{1 \leq i \leq m} \text{grad}(w_i)) = M(\sum_{1 \leq i \leq j \leq m} d_j)$$

$$= M(\sum_{1 \leq i \leq m} id_i) = M(n) \rightsquigarrow \text{Behauptung}$$

Beispiel

6.6 Beispiel

Sei $f = abc^2d^4$ für verschiedene monische irreduziblen Polynome $a, b, c, d \in R[x]$, $c(x) = \mathrm{GGT}(f, f') = cd^3$.

$w_1 = f/c(x) = abcd$, $y_1 = f'/c(x) = a'bcd + ab'cd + 2abc'd + 4abcd'$
$z_1 = y_1 - w_1' = abc'd + 3abcd'$
$g_1 = \mathrm{GGT}(abcd, abc'd + 3abcd') = ab$
$w_2 = abcd/ab = cd$, $y_2 = (abc'd + 3abcd')/ab = c'd + 3cd'$
$z_2 = 2cd'$
$g_2 = \mathrm{GGT}(cd, 2cd') = c$
$w_3 = cd/c = d$, $y_3 = 2cd'/c = 2d'$ $z_3 = d'$
$g_3 = \mathrm{GGT}(d, d') = 1$
$w_4 = d/1 - d$, $w_4 = d'/1 = d'$ $z_4 = 0$
$g_4 = d$
$(ab, c, 1, d)$ Länge 4.

char $R \neq 0$ R =endlicher Körper char p

$F = R = GF(q) = \mathbb{F}_q$ mit $q = p^m$, p Primzahl, $\text{char}(R) = p$

$a = \sum_{0 \leq i \leq n} a_i x^i \notin F \wedge f' = 0$ gdw

für jedes i mit $a_i \neq 0$ gilt $p|i$, d. h. $i a_i x^{i-1} = 0$ in $F[x]$

$$a = \sum_{0 \leq i \leq n/p} a_{ip} x^{ip} = \left(\sum_{0 \leq i \leq n/p} a_{ip} x^i \right)^p, \text{ falls } F = \mathbb{F}_p.$$

Da $(g+h)^p = g^p + h^p$ für alle $g, h \in \mathbb{F}_p[x]$ und $a_{ip}^p = a_{ip}$ für alle $a_{ip} \in \mathbb{F}_p$.
Z.B.: $a(x) = x^{13} + 1$ in $\mathbb{F}_{13}$, so $a'(x) = 13x^{12} = 0$

$$(x+1)^{13} = x^{13} + \binom{13}{1} x^{12} + \cdots + \binom{13}{12} x + 1 = x^{13} + 1 = a(x)$$

char $R \neq 0$ R =endlicher Körper char p

6.7 Lemma $\mathbb{F}_q$ mit $q = p^m$, p Primzahl, dann gilt für alle $r, s \in \mathbb{F}_q$

(1) $r^q = r$ kleiner Fermat Satz

(2) $r^{1/p} = r^{q/p} = r^{p^{m-1}}$ ist p-te Wurzel von r

(3) $(r+s)^{p^j} = r^{p^j} + s^{p^j}$ $j = 0, 1, \ldots, m$

Beweis: $r \in \mathbb{F}_q \rightsquigarrow \{1, r, r^2, \ldots\}$ ist zyklisch und endliche Untergruppe der mult. Gruppe von $\mathbb{F}_q$. Diese hat die Ordnung $q-1 \rightsquigarrow$ Ordnung von r teilt $q-1$ (Lagrange),

$r^{q-1} = 1 \rightsquigarrow (1)$

$(r^{p^{m-1}})^p = r^{p^m} = r^q = r \rightsquigarrow (2)$

$$\begin{aligned}(r+s)^{p^j} &= r^{p^j} + \binom{p^j}{1} r^{p^j-1}s + \cdots + \binom{p^j}{p^j-1} rs^{p^j-1} + s^{p^j} \\ &= r^{p^j} + s^{p^j} \rightsquigarrow (3)\end{aligned}$$

char $R \neq 0$ R =endlicher Körper char p (Forts.)

6.8 Lemma $a \in \mathbb{F}_q[x]$ $a' = 0$ gdw a ist eine p-te Potenz in $\mathbb{F}_q[x]$.

Beweis: $\curvearrowleft$ klar

$\curvearrowright a' = 0 \rightsquigarrow a(x) = a_0 + a_p x^p + \cdots + a_{kp} x^{kp}$ für ein $k \in \mathbb{N}$.
Sei $b(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_k x^k$ mit $b_i = a_{ip}^{1/p} = a_{ip}^{p^{m-1}}$ nach Lemma 6.7
.

$$b(x)^p = b_0^p + b_1^p x^p + \cdots + b_k^p x^{kp} = a_0 + a_p x^p + \cdots + a_{kp} x^{kp} = a(x)$$

char $R \neq 0$ R =endlicher Körper char p (Forts.)

Sei $a = f_1^{e_1} \cdots f_r^{e_r}$ die irreduzible Faktorisierung von a. Angenommen für ein $i \quad 1 \leq i \leq r$, $f_i' = 0 \rightsquigarrow f_i$ ist eine p-te Potenz, d. h. f_i ist nicht irreduzibel. (d. h. Ableitungen irreduzibler Polynome sind ungleich null), d. h. $f_i' \neq 0$ und wegen grad $f_i' <$ grad f_i folgt GGT(f_i', f_i) ist nicht f_i und somit 1, da f_i irreduzibel. Es kann jedoch $e_i f_i' = 0$ gelten, wenn $p | e_i$.
Wegen $a' = \sum_{1 \leq i \leq r} e_i \frac{a}{f_i} f_i'$ gilt aber $f_i^{e_i} | a'$.
Somit gilt

6.9 Lemma Sei F endlicher Körper, $a \in F[x]$ nicht konstant.
Dann gilt

$$a \text{ ist quadratfrei } \mathrm{gdw} \quad \mathrm{GGT}(a, a') = 1$$

$\rightsquigarrow$ **Algorithmus zur QFF in endlichen Körpern**

procedure Square_Free FF$(a(x), q)$
{Eingabe: monisches Polynom $a(x) \in \mathbb{F}_q[x], q = p^m$Berechne QFF von $a(x)$}
begin
$i = 1$; **output** $:= 1$; $b(x) := a'(x)$;
if $b(x) \neq 0$ **then**
begin
$c(x) := \mathrm{GGT}(a(x), b(x))$; $w(x) := a(x)/c(x)$;
while $w(x) \neq 1$ **do**
begin
$y(x) := \mathrm{GGT}(w(x), c(x))$; $z(x) := w(x)/y(x)$;
$outp := outp \sqcup z(x)^i$; $i := i + 1$;
$w(x) := y(x)$; $c(x) := c(x)/y(x)$;
end
if $c(x) \neq 1$ **then**
$c(x) := c(x)^{1/p}$; $outp := outp \sqcup (\text{Square_Free FF}(c(x), q))^p$
end
else
$a(x) := a(x)^{1/p}$; $outp := (\text{Square_Free FF}(a(x), q))^p$
return $(outp)$
end.

Beispiel

Beachte: Hier QF Faktoren mit Exponenten, um a rekonstruieren zu können. $(f_1 \sqcup \cdots \sqcup f_k)^p \equiv f_1^p \sqcup \cdots \sqcup f_k^p$.

6.10 Beispiel Sei $\mathbb{F}_3[x] = \mathbb{Z}_3[x]$ und

$$a(x) = x^{11} + 2x^9 + 2x^8 + x^6 + x^5 + 2x^3 + 2x^2 + 1$$

Dann

$$a'(x) = 2x^{10} + x^7 + 2x^4 + x \text{ und}$$
$$c(x) = \mathrm{GGT}(a(x), a'(x)) = x^9 + 2x^6 + x^3 + 2$$
$$w(x) = a(x)/c(x) = x^2 + 1 \neq 1$$

Eingang while loop

$$y(x) = x + 2 \qquad z(x) = x + 1 \qquad outp = x + 1$$

Updates

$$i = 2 \qquad w(x) = x + 2 \qquad c(x) = x^8 + x^7 + x^6 + x^2 + 1$$

Zweiter Durchgang liefert

$$y(x) = x + 2 \qquad z(x) = 1 \qquad outp = (x + 1) \sqcup 1^2$$

Updates

$$i = 3 \qquad w(x) = x + 2 \qquad c(x) = x^7 + 2x^6 + x + 2$$

Beispiel (Forts.)

Dritter Durchgang

$y(x) = x + 2$ $z(x) = 1$ $outp = (x+1) \sqcup 1^2 \sqcup 1^3$

Updates

$i = 4$ $w(x) = x + 2$ $c(x) = x^6 + 1$

Vierter Durchgang

$y(x) = 1$ $z(x) = x + 2$ $outp = (x+1) \sqcup 1^2 \sqcup 1^3 \sqcup (x+2)^4$

Updates

$i = 5$ $w(x) = 1$ $c(x) = x^6 + 1$

Da $w(x) = 1$ Ausgang der While Schleife, da $c(x) \neq 1$ muss c dritte Potenz sein. Dritte Wurzel ist $x^2 + 1$. Rekursiver Aufruf mit $x^2 + 1$ Ableitung $2x \rightsquigarrow$ quadratfrei.

$outp = (x+1) \sqcup (x+2)^4 \sqcup (x^2+1)^3$, d. h.
$((x+1), 1, (x^2+1), (x+2))$ QFF von a.

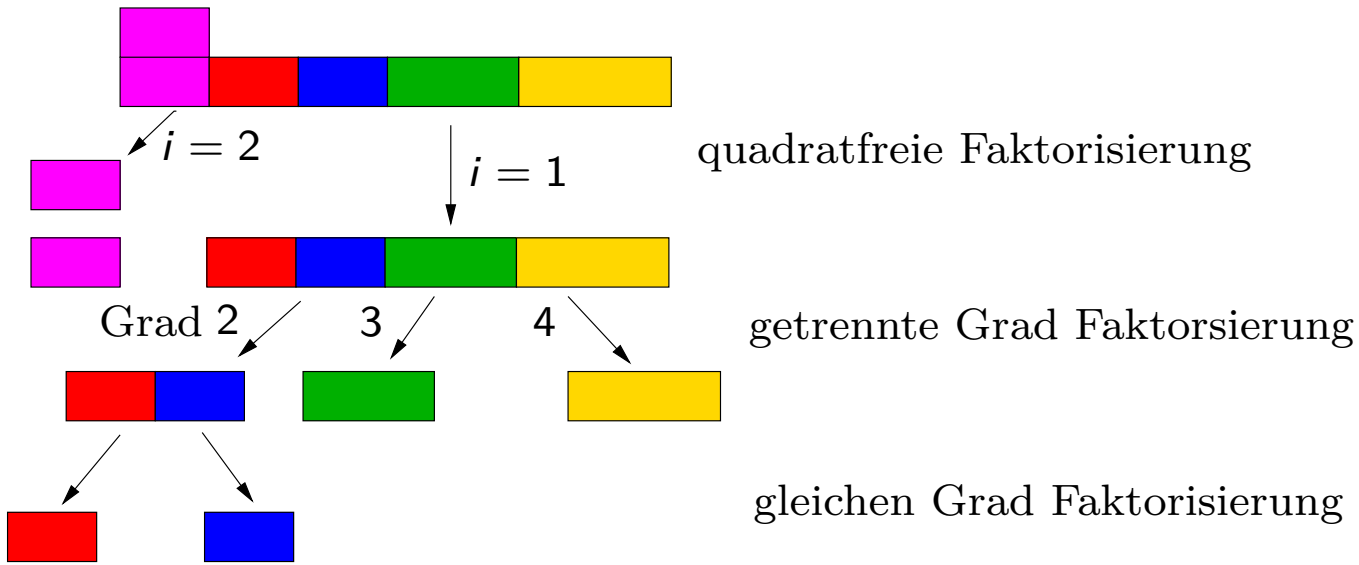
Symbolisches Beispiel

6.11 Beispiel Symb-Beispiel: Seien A, B, C, D quadratfreie teilerfremde Polynome in $\mathbb{Z}_3[x]$ und $a = A \cdot B^3 \cdot C^5 \cdot D^9$.
Initialisierung: $b = a' = A'B^3C^5D^9 + 2AB^3C^4C'D^9$, d. h.
$\mathrm{GGT}(a, b) = B^3C^4D^9 = c$.
Die QF-Terme (ohne die 3 | Exponent) sind in $w = a/c = A \cdot C$
while loop $y = \mathrm{GGT}(c, w) = C \quad z = w/C = A, \qquad outp = A$
$i = 2 \qquad w = C \qquad c = B^3C^3D^9$
while loop $y = C \quad z = 1, \qquad outp = A \sqcup 1$
$i = 3 \qquad w = C \qquad c = B^3C^2D^9$
4- while loop Ausgang
$i = 5 \qquad w = C \qquad c = B^3D^9 \qquad outp = A \sqcup 1 \sqcup 1 \sqcup 1$
5-Durchgang $y = 1 \quad z = C \qquad outp = A \sqcup 1 \sqcup 1 \sqcup 1 \sqcup C^5$
$i = 6 \qquad w = 1 \qquad c = B^3D^9$
Da $c \neq 1 \rightsquigarrow$ QFF $(c)^{1/3} = BD^3 \rightsquigarrow (B \sqcup 1 \sqcup D^3)^3 \rightsquigarrow A \sqcup C^5 \sqcup B^3 \sqcup D^3$

Man kann auch Yun's Variante verwenden mit gleicher Komplexitätsschranke.

Distinct Degree Factorization

Spaltung der irreduziblen Faktoren nach Grad::
Getrennte Grad Faktorisierung



$a(x) \in \mathbb{F}_q[x]$, $q = p^m$, quadratfrei.
Gesucht Faktorisierung von $a(x)$ der Form $a(x) = \prod a_i(x)$ wobei a_i
Produkt der irreduziblen Faktoren von $a(x)$ mit Grad i, d. h.
$\text{grad}(a_i) = k \cdot i$ :: k Faktoren mit Grad i.

Satz von Fermat: Folgerungen

Erinnerung: Kleiner Fermatscher Satz:: $0 \neq a \in \mathbb{F}_q$, so $a^{q-1} = 1$ und $a^q = a$ alle $a \in F_q$, d. h. $x^q - x = \prod_{a \in F_q} (x - a)$ in $F_q[x]$.

Allgemeiner

6.12 Lemma Für $d \geq 1$ ist $x^{q^d} - x \in \mathbb{F}_q[x]$ Produkt aller monischen irreduziblen Polynome in $\mathbb{F}_q[x]$, deren Grad d teilt.

Kleiner Fermat angewendet auf $\mathbb{F}_{q^d}$ zeigt $h = x^{q^d} - x$ ist Produkt aller $x - a$ mit $a \in \mathbb{F}_{q^d}$.
Falls $g^2 \mid h$ (in $\mathbb{F}_q$) mit $g \in \mathbb{F}_q[x] \setminus \mathbb{F}_q$, so teilt ein $x - a$ auch g und somit $(x - a)^2 \mid h$.
Dies geht nicht, d. h. $x^{q^d} - x$ ist quadratfrei
(einfacher $\mathrm{GGT}(h, h') = 1$).

Satz von Fermat: Folgerungen

Es genügt zu zeigen: Für $f \in \mathbb{F}_q[x]$, monisch, irreduzibel mit $\mathrm{Grad}(f) = n$:

$$f \mid x^{q^d} - x \qquad \text{gdw} \qquad n \mid d$$

Sei f irreduzibel, monisch, $n \mid d$, $d = n \cdot s$.
Betrachte $F = \mathbb{F}_q[x]/\langle f \rangle$ ist Körper mit q^n Elementen.
Kleiner Fermat liefert für $a \in F$

$$a^{q^n} = a \text{ und somit } a^{q^d} = \underbrace{((a^{q^n})^{q^n} \dots)}_{\text{s-mal}})^{q^n} = a$$

Betrachte $a = [x]$ Repräsentant von x in F.
$[h] = [x^{q^d} - x] = [x]^{q^d} - [x] = a^{q^d} - a = 0$ in F, d. h. $h \equiv 0 \bmod f$, und somit $f \mid h$.

Satz von Fermat: Folgerungen

Umgekehrt sei f monisch, irreduzibel $\text{grad}(f) = n$, $f \mid x^{q^d} - x$.

Betrachte die Körpererweiterung $\mathbb{F}_q \subseteq \mathbb{F}_{q^d}$.
Da $f \mid x^{q^d} - x$ folgt aus kleinen Fermat angewendet mit $\mathbb{F}_{q^d}$, dass es $A \subseteq \mathbb{F}_{q^d}$ gibt mit $f = \prod_{a \in A}(x - a)$.

Wähle $a \in A$ und sei $\mathbb{F}_q[x]/\langle f \rangle \cong \mathbb{F}_q(a) \subseteq \mathbb{F}_{q^d}$, wobei $\mathbb{F}_q(a)$ kleinster Teilkörper von $\mathbb{F}_{q^d}$, der a enthält.

Dieser Körper hat q^n Elemente und $\mathbb{F}_{q^d}$ ist eine Erweiterung von $\mathbb{F}_q(a)$, d. h. $q^d = (q^n)^s$ für ein s also $n \mid d$.

Getrennte Grad Faktorisierung (Forts.)

Anwendung: Sei $a(x) = \prod a_i(x)$. Um das Produkt aller linearen irreduziblen Faktoren von $a(x)$ zu bestimmen, genügt es

$$a_1(x) = \mathrm{GGT}(a(x), x^q - x)$$

zu berechnen.
Setzt man $a(x) = a(x)/a_1(x)$, so hat a keine linearen irreduziblen Faktoren, d. h.

$$a_2(x) = \mathrm{GGT}(a(x), x^{q^2} - x)$$

Usw. Hat $a(x)$ Grad n, so muss man nur Faktoren bis zum Grad $n/2$ bestimmen.

6.13 Beispiel 1 $a = x(x+1)(x^2+1)(x^2+x+2) \in \mathbb{F}_3[x]$ getrennte GF

$$(x^2 + x, \quad x^4 + x^3 + x + 2)$$
$$\uparrow \qquad\qquad \uparrow$$
Grad1 Grad2

$\mathrm{GGT}(a, x^3 - x) = x^2 + x$, $\mathrm{GGT}(a/x^2 + x, x^9 - x) = x^4 + x^3 + x + 2$

Beispiel (Forts.)

2) $a(x) = x^{63} + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$, dann

$a_1(x) = \mathrm{GGT}(a(x), x^2 - x) = x + 1$ 1-Faktor Grad 1

$a(x) = a(x)/a_1(x) = \frac{x^{63}+1}{x+1} = x^{62} + x^{61} + \cdots + x^2 + x + 1$

$a_2(x) = \mathrm{GGT}(a(x), x^4 - x) = x^2 + x + 1$ 1-Faktor Grad 2

$a(x) = a(x)/a_2(x) = x^{60} + x^{57} + x^{54} + \cdots + x^6 + x^3 + 1$

$a_3(x) = \mathrm{GGT}(a(x), x^8 - x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

2-Faktoren Grad 3

$a(x) = x^{54} + x^{53} + x^{51} + x^{50} + x^{48} + x^{46} + x^{45} + x^{42} + x^{33} + x^{30} + x^{29} + x^{27} + x^{25} + x^{24} + x^{22} + x^{21} + x^{12} + x^{11} + x^9 + x^8 + x^6 + x^4 + x^3 + x + 1$

$\mathrm{GGT}(a(x), x^{16} - x) = 1$, $\mathrm{GGT}(a(x), x^{32} - 1) = 1$,
$\mathrm{GGT}(a(x), x^{64} - x) = a(x) = a_6(x)$

$$x^{63} + 1 = (x+1)(x^2+x+1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1) \quad a_6(x)$$
Grad 1 2 $3-2$Fakt $6-9$Fakt

Algorithmus Getrennte Grad Faktorisierung

procedure PARTIALFACTOR-DD$(a(x), q)$
{Eingabe: Quadratfreies mon. Polynom $a(x) \in \mathbb{F}_q[x], n = \text{grad}(a) > 0$}
{Ausgabe: Getrennte Grad Zerlegung $(a_1, \ldots, a_s), s \leq n/2$ von $a(x)$}
(1) $w := x; a_0 := 1; i := 0;$
(2) **repeat**
$i := i + 1;$ call wied. quadrat. Algorithm. in $R = \mathbb{F}_q(x)/\langle a(x)\rangle$
(3) um $w = w^q \bmod a(x)$ zu berechnen
(4) $a_i := \text{GGT}(w - x, a(x));$
if $a_i(x) \neq 1$ **then**
$a(x) := a(x)/a_i(x); w(x) := w(x) \bmod a(x);$
until $a(x) = 1;$
return $(a_1, \ldots, a_i)$

Die GGT-Berechnungen $\text{GGT}(a(x), x^{q^i} - x)$ werden durch Berechnung von $x^{q^i} - x$ modulo $a(x)$, d. h. Berechnung wird in $\mathbb{F}_q[x]/(a(x))$ durchgeführt (z. B. wiederholtes Quadrieren um $(x^{q^{i-1}})^q$ mod $(a(x))$ zu berechnen).

Algorithmus Getrennte Grad Faktorisierung (Forts.)

6.14 Satz Algorithmus Getrennte Grad Faktorisierung ist korrekt, d. h. es wird die getrennte Grad-Zerlegung von a berechnet.
Aufwand: $0(sM(n)\log(nq))$ Operationen in $\mathbb{F}_q$, wobei s der größte Grad eines irreduziblen Faktors von a ist.

z.Z. Für i-ten Durchgang gilt:
$w_i \equiv x^{q^i} \bmod f_i, \quad f_i = G_{i+1} \cdots G_t, a_i = G_i$ für $i \geq 1$,
wobei $(G_1, \ldots, G_t)$ die getrennte Grad-Zerlegung von a ist.

Induktion nach i : $i = 0$ klar, $i > 0$ wegen
$w_i \equiv w_{i-1}^q \equiv (x^{q^{i-1}})^q = x^{q^i} \bmod f_{i-1}$ d. h. $w_i - x \equiv x^{q^i} - x \bmod f_i$ und

$$a_i = \mathrm{GGT}(w_i - x, f_{i-1}) = \mathrm{GGT}(x^{q^i} - x, f_{i-1})$$

Also ist a_i Produkt aller monisch irreduziblen Polynome in $\mathbb{F}_q[x]$ deren Grad i teilt und $f_{i-1} = G_i \cdots G_t$ teilen, d. h. $a_i = G_i$ und somit $f_i = G_i \cdots G_t / G_i = G_{i+1} \cdots G_t$. $i = t$ beim Ausgang.

Algorithmus Getrennte Grad Faktorisierung (Forts.)

Kosten für die Berechnung von w_i in Schritt (2)
$0(\log q)$ Multiplikationen $\bmod a$, d. h. $0(M(n)\log q)$ Operationen in $\mathbb{F}_q$.

Die Kosten in (3) und (4) sind ebenfalls $0(M(n)\log n)$ Operationen in $\mathbb{F}_q[x]$.

Berechnung kann gestoppt werden sobald grad $f_i = \text{grad } a(x) < 2(i+1)$, da alle irreduziblen Faktoren von f_i grad mindestens $i+1$ haben, d. h. $a(x)$ ist irreduzibel. Mit dieser Überprüfung: **early abort**

Somit $i = \max\{m_1/2, m_2\} \leq n/2$, wobei m_1 und m_2 die Grade des größten und zweitgrößten irreduziblen Faktors von $a(x)$ sind.

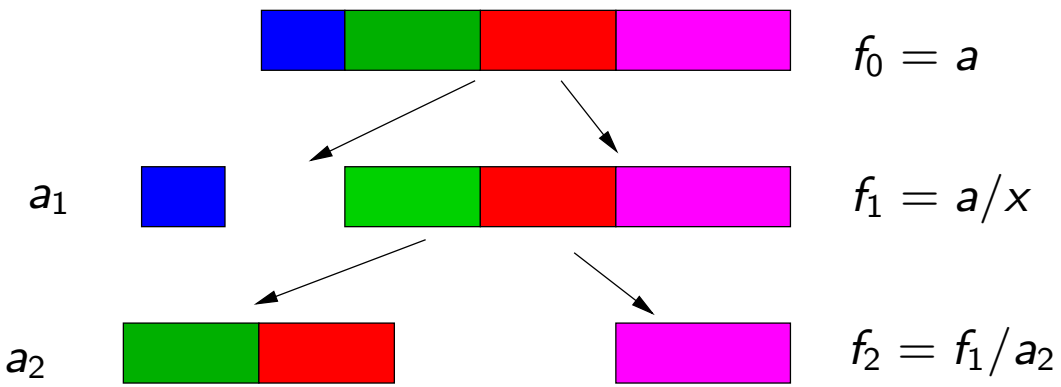
Beachte in Schritt 2 w_i wird nur $\bmod f_{i-1}$ benötigt.

Beispiel

6.15 Beispiel Sei $q = 3$ Algorithmenverlauf für
$a(x) = x^8 + x^7 - x^6 + x^5 - x^3 - x^2 - x \in \mathbb{F}_3[x]$
$a'(x) = -x^7 + x^6 - x^4 + x - 1 \quad \mathrm{GGT}(a, a') = 1$, d. h. QF
$w_1 = x^3 \bmod a = x^3$
$a_1 = \mathrm{GGT}(x^3 - x, a) = x \neq 1$
$f_1 = a/a_1 = x^7 + x^6 - x^5 + x^4 - x^2 - x - 1$ (neues a)
w_1 unverändert x^3
$w_2 = w_1^3 \bmod a = x^9 \bmod a = -x^7 + x^6 + x^5 + x^4 - x$
$a_2 = \mathrm{GGT}(w_2 - x, f_1) = \mathrm{GGT}(-x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x, f_1)$
$= x^4 + x^3 + x - 1$
$$f_2 = f_1/a_2 = a/a_2 = \frac{x^7 + x^6 - x^5 + x^4 - x^2 - x - 1}{x^4 + x^3 + x - 1}$$
$= x^3 - x + 1$

Beispiel (Forts.)

Der Algorithmus würde noch eine Iteration durchführen aber $\text{grad}(f_2) < 2(2+1) = 6 \rightsquigarrow$ nicht notwendig, da f_2 irreduzibel.
a hat einen Lin-Faktor x, zwei verschiedene irreduziblen quadratische Faktoren, da Grad $a_2 = 4$ und einen irreduziblen kubischen Faktor $x^3 - x + 1$.



Equal-Degree Factorization (Gleiche-Grad-Faktorisierung)

Der Algorithmus von Cantor und Zassenhaus

Faktorisiere die a_i, die aus der Getrennte-Grad-Faktorisierung berechnet werden.

Ungerade Primzahlpotenzen, Char 2 Fall getrennt.

6.16 Beispiel $a(x) = x^{15} - 1 \in \mathbb{F}_{11}[x]$. DDF liefert

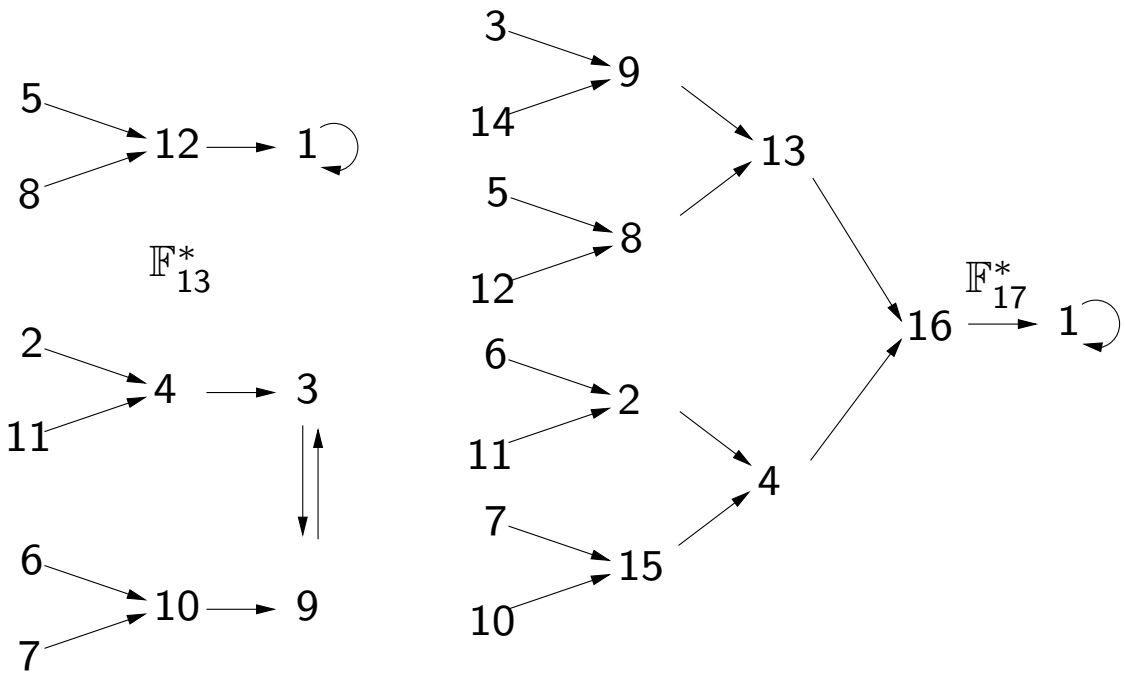
$$a(x) = a_1(x)a_2(x) = (x^5 - 1)(x^{10} + x^5 + 1)$$

a hat 5 lineare Faktoren, 5 irreduzible quadratische Faktoren.

Probabilistische Verfahren um Faktoren zu finden.

Gleiche-Grad-Faktorisierung (1)

Betrachte Quadrat-Abbildung $\sigma : \mathbb{F}_q^* \to \mathbb{F}_q^*$ mit $\sigma(a) = a^2$, z. B.



Jedes Element hat entweder zwei oder 0 eingehende Pfeile.

Zwei bedeutet ist Quadrat

gleiche Anzahl

0 bedeutet ist kein Quadrat

Gleiche-Grad-Faktorisierung (2)

6.17 Lemma Sei q Primzahlpotenz, $k \mid q-1$.
$S = \{b^k : b \in \mathbb{F}_q^*\}$ die Menge der k-ten Potenzen in $\mathbb{F}_q^*$. Dann gilt

i) S ist eine Untergruppe der Ordnung $(q-1)/k$

ii) $S = \{a \in \mathbb{F}_q^* : a^{(q-1)/k} = 1\}$

Beweis: S als Bild eines Homomorphismus $(\sigma_k : a \to a^k)$ ist Untergruppe von $\mathbb{F}_q^*$.
Der Kern von σ_k ist $\ker\sigma_k = \{a \in \mathbb{F}_q^* : \sigma_k(a) = 1\} = \{a \in \mathbb{F}_q^* : a^k = 1\}$
d.h die Menge der k-ten EW. Da $\mathbb{F}_q$ Körper ist hat $x^k - 1 \in \mathbb{F}_q[x]$
höchstens k Wurzeln in $\mathbb{F}_q$, d. h. $|\ker\, \sigma_k| \leq k$.
Wegen $(b^k)^{(q-1)/k} = b^{q-1} = 1$ für $b \in \mathbb{F}_q^*$ (Fermat), gilt
$S \subseteq \ker\, \sigma_{(q-1)/k}$, d. h. $|S| \leq (q-1)/k$.
Also
$q-1 = |\mathbb{F}_q^*| = |\ker\, \sigma_k||\text{Bild}\ \sigma_k| = |\ker\, \sigma_k| \cdot |S| \leq k(q-1)/k = q-1 \rightsquigarrow$
$|\ker\, \sigma_k| = k \quad |S| = (q-1)/k$ und $S = \ker\, \sigma_{(q-1)/k}$

Gleiche-Grad-Faktorisierung (3)

Wendet man das Lemma 6.17 mit $k = 2$ und $k = (q-1)/2$ an, so gilt

6.18 Lemma Sei q ungerade Primzahlpotenz und $S = \{a \in \mathbb{F}_q^* : \exists b \in \mathbb{F}_q^* \quad a = b^2\}$ Menge der Quadrate. Dann

i) $S \subseteq \mathbb{F}_q^*$ ist multiplikative Ugr. der Ordnung $(q-1)/2$

ii) $S = \{a \in \mathbb{F}_q^* \quad a^{(q-1)/2} = 1\}$

iii) $a^{(q-1)/2} \in \{1, -1\}$ für alle $a \in \mathbb{F}_q^*$

Faktorisierungsaufgabe: Sei $a \in \mathbb{F}_q[x]$, grad $a = n$, monisch und $d \in \mathbb{N}^+$ mit $d \mid n$ und jeder irreduzible Faktor von a habe den Grad d.
Dann gibt es $r = n/d$ solcher Faktoren und $a = f_1 \cdots f_r$, f_i verschiedene monische irreduziblen in $\mathbb{F}_q[x]$ o.B.d.A. $r \geq 2$. Bestimme die f_i.

Gleiche-Grad-Faktorisierung (4)

Da $\mathrm{GGT}(f_i, f_j) = 1$ für $i \neq j$, gibt es nach chinesischem Restesatz Ring Homomorphismus
$\chi : R = \mathbb{F}_q[x]/\langle a \rangle \to \mathbb{F}_q[x]/\langle f_1 \rangle \times \cdots \times \mathbb{F}_q[x]/\langle f_r \rangle = R_1 \times \cdots \times R_r$
Die R_i sind Körper mit q^d Elemente und algebraische Erweiterungen vom Grad d von $\mathbb{F}_q$, d. h. alle isomorph.

$$\mathbb{F}_{q^d} \cong R_i = \mathbb{F}_q[x]/\langle f_i \rangle \supseteq \mathbb{F}_q$$

Für $f \in \mathbb{F}_q[x]$. Sei $f \bmod a \in R$ und
$\chi(f \bmod a) = (f \bmod f_1, \ldots, f \bmod f_r) = (\chi_1(f), \ldots, \chi_r(f))$, wobei
$\chi_i(f) = f \bmod f_i \in R_i$ gilt.
Es gilt für $f \in \mathbb{F}_q[x]$, $i \leq r$, $\quad f_i \mid f \text{ gdw } \chi_i(f) = 0$.
Hat man ein $f \in \mathbb{F}_q[x]$ mit einigen $\chi_i(f) = 0$ und anderen nicht null, so ist $\mathrm{GGT}(f, a)$ ein nichttrivialer Teiler von a.
$\rightsquigarrow$ Probabilistisches Verfahren um Spaltungspolynom f von a zu bestimmen.

Gleiche-Grad-Faktorisierung (5)

Sei q ungerade. Setze $e = (q^d - 1)/2$.
Für alle $\beta \in R_i^* = \mathbb{F}_{q^d}^*$ gilt $\beta^e \in \{1, -1\}$ und beide Möglichkeiten treten gleich oft vor (Lemma 6.18 mit q^d an Stelle von q).
Wählt man $f \in \mathbb{F}_q[x]$ mit Grad $f < n$ und $\mathrm{GGT}(a, f) = 1$ zufällig, so sind $\chi_1(f), \ldots, \chi_r(f)$ unabhängige uniform verteilte Elemente aus $\mathbb{F}_{q^d}^*$ und $\varepsilon_i = \chi_i(f^e) \in R_i$ ist 1 oder -1. Jedes mit Wahrscheinlichkeit $1/2$.

Somit

$$\chi(f^e - 1) = (\varepsilon_1 - 1, \ldots, \varepsilon_r - 1)$$

und $f^e - 1$ ist Spaltungspolynom, es sei denn $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_r$.
Dieses kann mit Wahrscheinlichkeit $2(1/2)^r = 2^{-r+1} \leq 1/2$ vorkommen.

Beispiel

6.19 Beispiel Fortsetzung:: In $\mathbb{F}_{11}[x]$

$$a(x) = (x^5 - 1)(x^{10} + x^5 + 1) = a_1 a_2$$

5 lineare Faktoren, 5 quadratische Faktoren.
$n = 5 \quad d = 1 \quad e = (11^1 - 1)/2 = 5 \quad a_1 = x^5 - 1$
Zufallspolynom: $x + 4$
$\mathrm{GGT}(a_1, (x+4)^5 - 1) = x^2 + 5x + 5$
$(x^5 - 1) = (x^2 + 5x + 5)(x^3 - 5x^2 - 2x + 2)$

Zufallspolynom: $x + 8$
$\mathrm{GGT}(x^2 + 5x + 5, (x+8)^5 - 1) = x - 1$ mit
$x^2 + 5x + 5 = (x - 1)(x - 5)$ 2 lineare Faktoren.
$\mathrm{GGT}(x^3 - 5x^2 - 2x + 2, (x+8)^5 - 1) = x - 4$, wobei
$x^3 - 5x^2 - 2x + 2 = (x - 4)(x^2 - x + 5)$.

Man erhält $a_1(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 4)(x - 5)(x + 2)$.

Beispiel (Forts.)

Spaltung von $a_2(x)$ nach Zufallsmuster $e = (11^2 - 1)/2 = 60$

Zufallspolynom: $x + 2$

$\mathrm{GGT}(a_2(x), \underline{(x+2)}^{60} - 1) = x^6 + 3x^5 + 4x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 4x - 2$
$a_2(x) = (x^6 + 3x^5 + 4x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 4x - 2)(x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x + 5)$

Versuche mit $x + 7$

$\mathrm{GGT}(x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x + 5, \underline{(x+7)}^{60} - 1) = x^2 + 3x - 2$ und
$\mathrm{GGT}(x^6+3x^5+4x^4-2x^3+5x^2+4x-2, (x+7)^{60}-1) = x^4+2x^3+x^2-5x-2$

3-Faktoren Grad 2, verwende $x^4 + 2x^3 + x^2 - 5x - 2 \rightsquigarrow$

$(x^2+3x-2)(x^2+5x+3)(x^2+4x+5)(x^2-2x+4)(x^2+x+1) = a_2(x).$

Algorithmus: Gleiche-Grad-Faktorisierung

procedure Equal_Degree_Splitting $(a(x), d, q = p^m)$
{Eingabe: QF monisches Polynom $a \in \mathbb{F}_q[x]$, grad $a = n$, $q = p^m$, p ungerade, $d < n$, $d \mid n$, alle irreduzibeln Faktoren von a mit Grad d}
{Ausgabe: Ein echter monischer Faktor $g \in \mathbb{F}_q[x]$ von a oder „Failure“}
begin

1 Wähle $f \in \mathbb{F}_q[x]$ mit grad $f < n$ zufällig
if $f \in \mathbb{F}_q$ **then return** „Failure“

2 $g_1 := GGT(a, f)$
if $g_1 \neq 1$ **then return** g_1

3 Call repeated squaring algorithm in $\mathbb{F}_q[x]/\langle a(x)\rangle$
um $b = f^{(q^d-1)/2} \bmod a(x)$ zu berechnen

4 $g_2 := GGT(b - 1, a)$
if $g_2 \neq 1$ and $g_2 \neq a$ **then return** g_2
else return „Failure“

end.

Algorithmus (Forts.)

6.20 Satz Der Algorithmus ist korrekt bzgl. seiner Spezifikation.
„Failure“ wird mit der Wahrscheinlichkeit $< 2^{1-r} \leq 1/2$ mit $r = n/d \geq 2$ ausgegeben.
Die Anzahl der erwarteten Operationen in $\mathbb{F}_q$ ist $0((d \log q + \log n) M(n))$.

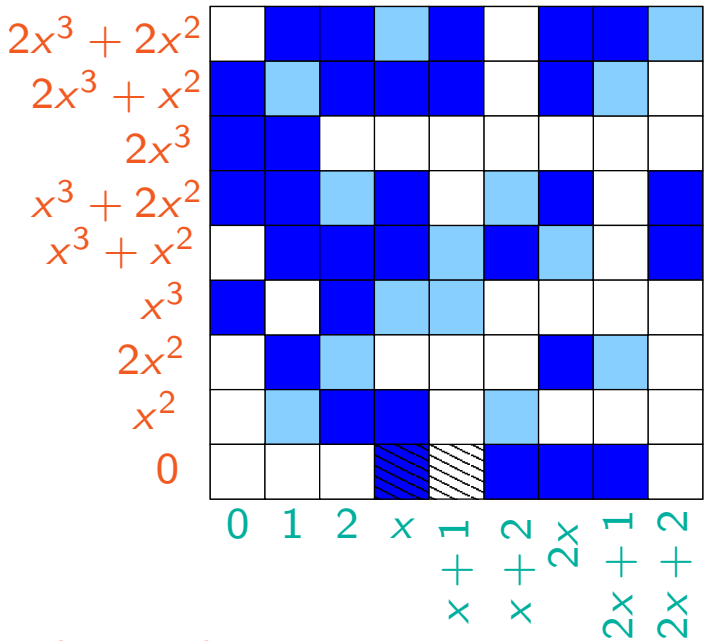
Beweis:

- Für $\mathrm{GGT}(a, f) = 1$, so 2^{-r+1} als Fehlerwahrscheinlichkeit, wegen Schritt (2): $< 2^{-r+1}$.
- Kosten für die Schritte 2) und 4) $0(M(n) \log n)$.
- Schritt 3: $2 \log_2(q^d) \in 0(d \log q)$ Multiplikationen $\bmod a$, d. h. $0(M(n) d \log q)$ Operationen in $\mathbb{F}_q$.
- Ruft man den Algorithmus k mal auf, so gilt Failure Wahrscheinlichkeit $< 2^{(1-r)k} \leq 2^{-k}$.

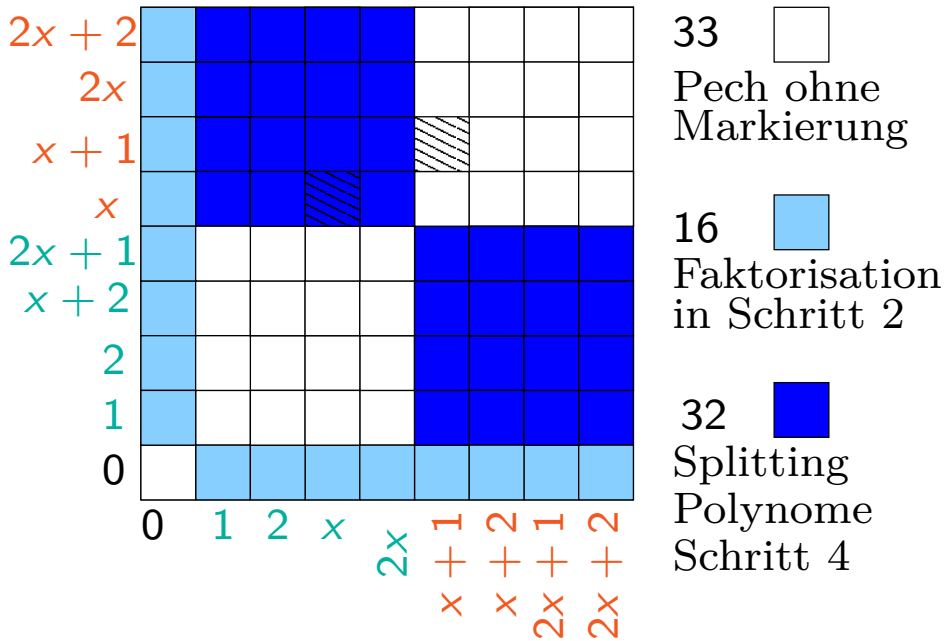
Algorithmus: Beispiel in $\mathbb{F}_3[x]$

- $a(x) = x^8 + x^7 - x^6 + x^5 - x^3 - x^2 - x$ hat einen linearen Faktor: x, zwei irreduzible Faktoren Grad 2:: $x^4 + x^3 + x - 1$ $d = 2$, einen irreduziblen Faktor Grad 3:: $x^3 - x + 1$
- $a(x) = x^4 + x^3 + x - 1$ faktorisiert sich in $r = 2$ irreduziblen Polynome mit Grad $d = 4/r = 2$.
- Angenommen $f = x + 1$ erste Wahl. Dann ist
  $g_1 = \mathrm{GGT}(f, a) = \mathrm{GGT}(x + 1, x^4 + x^3 + x - 1) = 1$
  $b = (x + 1)^4 \bmod a = (x + 1)^4 \bmod x^4 + x^3 + x - 1 = -1$
  $g_2 = \mathrm{GGT}(b - 1, a) = \mathrm{GGT}(1, a) = 1$ Pech gehabt!
- Zweite Wahl: $f = x$. Dann
  $g_1 = \mathrm{GGT}(f, a) = \mathrm{GGT}(x, x^4 + x^3 + x - 1) = 1$
  $b = x^4 \bmod a = -x^3 - x + 1$
  $g_2 = \mathrm{GGT}(b - 1, a) = \mathrm{GGT}(-x^3 - x, x^4 + x^3 + x^2 - 1) = x^2 + 1 \rightsquigarrow$
- $x^2 + 1$ ist einer der irr. Faktoren und $a/g_2 = x^2 + x + 1$ der andere.

Algorithmus (Forts.)



$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$
$R = \mathbb{F}_3[x]/(a)$
$a_i \in \mathbb{F}_3$



$R \cong \mathbb{F}_3[x]/(x^2+1) \times \mathbb{F}_3[x]/x^2+x-1$
$\mathbb{F}_9 \times \mathbb{F}_9$

Will man alle r-Faktoren bestimmen, so rekursive Anwendung auf die einzelnen Spaltungs-Faktoren.

Algorithmus Gleiche_Grad_Faktorisierung

procedure Equal_Degree_Fact $(a(x), d, q)$
$\{$Eingabe: QF monisches Polynom $a \in \mathbb{F}_q[x]$, p ungerade,$\}$
$\{q = p^m, \text{grad } a = n, d \mid n$ alle irreduziblen Faktoren grad $d\}$
$\{$Ausgabe: die monischen irreduziblen Faktoren von a in $\mathbb{F}_q[x]\}$

(1) **begin**
(2) **if** $n = d$ **then return** a
call Equal_Degree_Splitting$(a(x), d, q)$ bis
(3) ein echter Faktor $g \in \mathbb{F}_q[x]$ von a gefunden.
FAC $\leftarrow$ Equal_Degree_Fact$(g, d, q) \cup$ Equal_Degree_Fact$(a/g, d, q)$
return (FAC)
end.

Algorithmus Gleiche_Grad_Faktorisierung (Forts.)

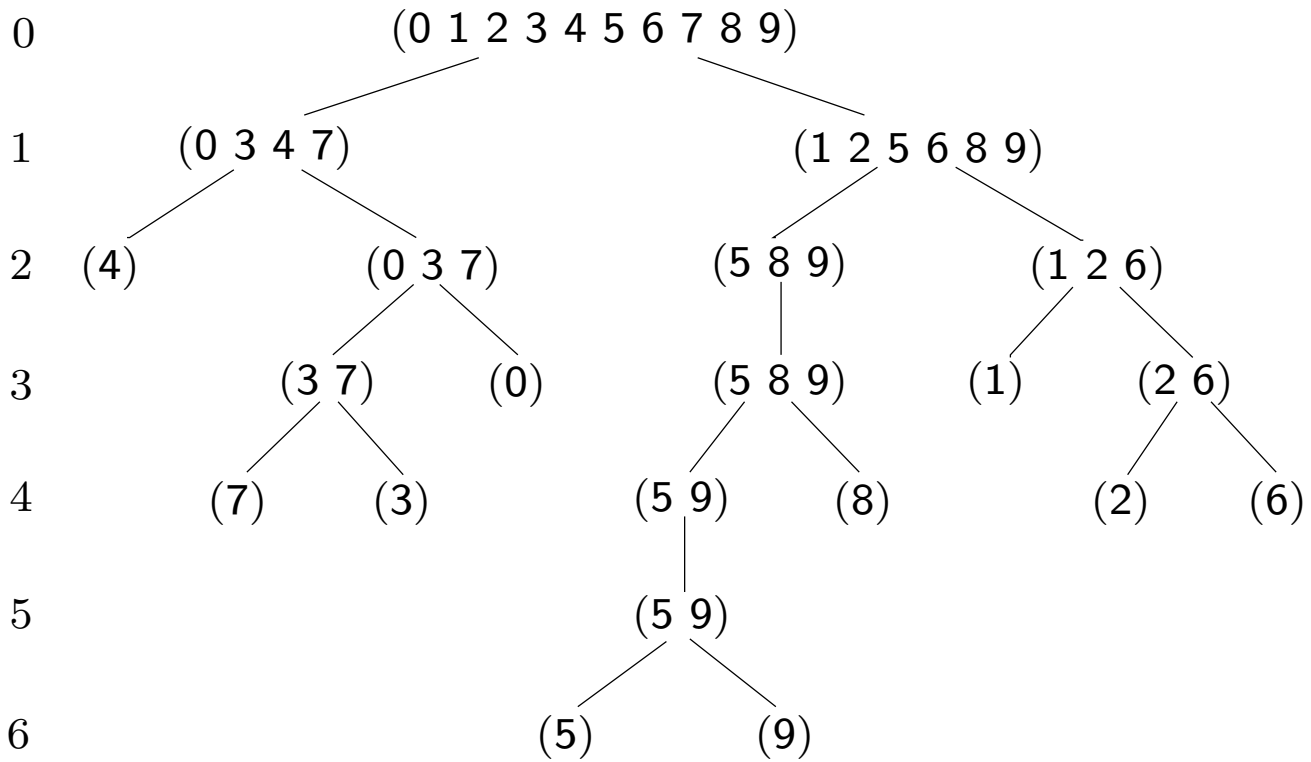
6.21 Satz Ein QF-Polynom vom Grad $n = r \cdot d$ mit r irreduziblen Faktoren vom Grad d kann vollständig durch diesen Algorithmus faktorisiert werden mit einer erwarteten Anzahl von Operationen in $\mathbb{F}_q$ von $0((d \log q + \log n) M(n) \log r)$.

Die Arbeitsweise der Prozedur kann mit Hilfe eines markierten Baums beschrieben werden. Die Marken der Knoten sind Faktoren von a.

- a Marke der Wurzel.
- Die Blätter sind markiert mit den irreduziblen Faktoren von a.
- Falls in Schritt 2 Failure, so ist ein Sohn mit gleicher Marke, sonst sind 2 Söhne mit Marken g bzw. a/g.

Algorithmus Gleiche_Grad_Faktorisierung (Forts.)

6.22 Beispiel $a = f_0 \dots f_9 \in \mathbb{F}_q[x]$, f_i mon. irr. paarweise verschieden.



Algorithmus Gleiche_Grad_Faktorisierung (Forts.)

- Produkt der Marken in einer Stufe ist Teiler von a, d. h. Grad vom Produkt höchstens n.
- Kosten für Knoten vom Grad m ist $0((d \log q + \log m) M(n))$ Operationen in $\mathbb{F}_q$, Subadditivität vom $M \rightsquigarrow$ Kosten für jede Stufe: $0((d \log q + \log n) M(n))$ Operationen.
- Erwartete Tiefe ist $0(\log r)$ ($r \leq n \rightsquigarrow$ Behauptung).
- Tiefenschranke: Beweis Im Algorithmus Equal_Degree_Splitting ist die Wahrscheinlichkeit, das $f \bmod f_i$ und $f \bmod f_j$ weder beide Quadrate, noch beide nicht Quadrate, mindestens $1/2$. (Chin-RS)
- Die Wahrscheinlichkeit, dass f_i und f_j in Stufe k durch einen Aufruf von EDS getrennt werden (falls sie noch nicht getrennt sind) ist somit mindestens $1/2$. Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass f_i und f_j in Stufe k noch nicht getrennt sind höchstens $(1/2)^k$ und dies gilt für jedes Paar irreduzibler Faktoren von a.

Algorithmus Gleiche_Grad_Faktorisierung (Forts.)

- Es gibt $(r^2 - r)/2 < r^2$ solcher Paare.
- Die Wahrscheinlichkeit p_k, dass nicht alle irreduziblen Faktoren in Tiefe k getrennt sind, ist höchstens $r^2 2^{-k}$.

  Diese ist die Wahrscheinlickeit, dass der Baum die Tiefe $> k$ hat und $p_{k-1} - p_k$ ist die Wahrscheinlichkeit der Baumtiefe genau k.
- Sei $s = \lceil 2 \log_2 r \rceil$, dann ist die erwartete Baumtiefe

$$\sum_{k \geq 1} k(p_{k-1} - p_k) = \sum_{k \geq 0} p_k = \sum_{0 \leq k < s} p_k + \sum_{s \leq k} p_k \leq \sum_{0 \leq k < s} 1 + \sum_{s \leq k} r^2 2^{-k} = s + r^2 2^{-s} \sum_{k \geq 0} 2^{-k} \leq s + 2 \in 0(\log r).$$

- Beispiel: Tiefe $6 < \lceil 2 \log_2 10 \rceil + 2 = 9$.
- Für Varianten siehe vzG,G Übung 14.7.

Fall Charakteristik 2

Für Char= 2 Varianten der Algorithmen: Verwende *m*-tes Spur-Polynom über $\mathbb{F}_2$

$$T_m = x^{2^{m-1}} + x^{2^{m-2}} + \cdots + x^4 + x^2 + x \in \mathbb{F}_2[x]$$

Angenommen $q = 2^k$ für ein $k \in \mathbb{N}^+$, $f \in \mathbb{F}_q[x]$ quadratfrei, grad $f = n$, mit $r \geq 2$ irreduziblen Faktoren $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{F}_q[x]$
$R = \mathbb{F}_q[x]/\langle f \rangle$ $\quad$ $R_i = \mathbb{F}_q[x]/\langle f_i \rangle$ $\quad$ $\chi_i : R \to R_i$ wie gehabt.

i) $x^{2^m} + x = T_m(T_m + 1) \rightsquigarrow T_m(\alpha) \in \mathbb{F}_2$ für $\alpha \in \mathbb{F}_{2^m}$ (T_m ist $\mathbb{F}_2$ linear)
$T_m(\alpha) = 0$ und $T_m(\alpha) = 1$ gleichwahrscheinlich $1/2$

ii) Angenommen alle irreduziblen Faktoren von f haben den grad d, dann ist $\chi_i(T_{kd}(\alpha)) \in \mathbb{F}_2$ für $\alpha \in R$, somit für $\alpha \in R$ zufällig $\rightsquigarrow$
$T_{kd}(\alpha) \in \mathbb{F}_2$ mit Wahrscheinlichkeit $2^{1-r} \leq 1/2$.

iii) Berechne $b = T_{kd}(f)$ mod a im Algorithmus Equal_Degree_Splitting.

Eigenschaften

Die wesentlichen Eigenschaften, die verwendet wurden, sind folgende Faktorisierungen:

- Für q ungerade:

$$* \quad x^q - x = x(x^{(q-1)/2} - 1)(x^{(q-1)/2} + 1)$$

d. h. für $W = \{v(x) \in \mathbb{F}_q[x] : v(x)^q = v(x) \bmod a(x)\}$ und $v(x) \in W$ ist $v(x)(v(x)^{(q-1)/2} - 1)(v(x)^{(q-1)/2} + 1) = v(x)^q - v(x) \equiv 0 \bmod a(x)$ und die nichttrivialen gemeinsamen Faktoren von $v(x)^q - v(x)$ verteilen sich auf die drei Polynome.

- Für q gerade, d. h. $q = 2^k$, gilt $*$ nicht, aber

$$** \quad x^{2^k} + x = T_k(x)(T_k(x) + 1)$$

$\rightsquigarrow$ Wahrscheinlichkeit $\mathrm{GGT}(\overset{T_{kd}(f)}{\rightsquigarrow}, a)$ nicht trivial $\geq 1/2$
$(f^{(q-1)/2} - 1, a)$

Vollständiger Faktorisierungsalgorithmus für endliche Körper

Eingabe: Polynom $a(x) \in \mathbb{F}_q[x], a \notin \mathbb{F}_q, q = p^m, p$ Primzahl.

Ausgabe: Die monischen irreduziblen Faktoren von a mit ihren Vielfachheiten.

Monisch $\rightsquigarrow$ QFF-Faktorisierung $\rightsquigarrow$ DD-Faktorisierung $\rightsquigarrow$ ED-Faktorisierung.

Aufwand für grad $a = n$: Erwartete Anzahl von OP in $\mathbb{F}_q$ $0(nM(n)\log(qn))$, d. h. polynomial in n und $\log q$.

$n^2 + n \log q$ Operationen in $\mathbb{F}_q$ (mit Frobenius Aut.) siehe vz G/G. Auch für Variante ohne QFF-Faktorisierung zu verwenden (S. 365). Frobenius Automorphismus: $\sigma : \mathbb{F}_{q^n} \longrightarrow \mathbb{F}_{q^n}, a \longrightarrow a^q$, es gilt $\sigma^n = id$ und kann als Automorphismus von $R = \mathbb{F}_q[x]/\langle f \rangle$ für f quadratfrei betrachtet werden $\rightsquigarrow$ Iterated Frobenius (Siehe S.374).

Anwendung: Nullstellen-Bestimmung

Problem: Bestimme Nullstellen von $a(x) \in \mathbb{F}_q[x]$.
Es genügt die linearen irreduziblen Faktoren von $a(x)$ zu berechnen, d. h. $\mathrm{GGT}(x^q - x, a(x)) = g$ und dann ED-Faktorisierung anzuwenden.

procedure Root_Finding $(a(x), q)$
{Eingabe: nichtkonstantes Polynom $a(x) \in \mathbb{F}_q[x], q = p^m$.}
{Ausgabe: Die Nullstellen von $a(x)$ in $\mathbb{F}_q$.}

1 call Repeated Squaring Algorithmus in $R = \mathbb{F}_q[x]/(a(x))$ zur Berechnung von $x^q \bmod a(x) =: h$
2 $g := \mathrm{GGT}(h - x, a)$
if $g = 1$ **then** return $\varnothing$
else
3 call Equal_Degree Fact$(g, 1, q)$
// es werden die irreduziblen linearen Faktoren $x - u_1, \ldots, x - u_r$ mit $r = \mathrm{grad}\ g$ berechnet//
4 **return** $u_1, \ldots, u_r$

Anwendung: Nullstellen-Bestimmung (Forts.)

6.23 Folgerung Für $a(x) \in \mathbb{F}_q[x]$ mit grad $a = n$ berechnet Root_Finding alle Nullstellen von $a(x)$ in $\mathbb{F}_q$ die erwartete Anzahl von Operationen in $\mathbb{F}_q$ ist:

$$0(M(n) \log n \log(nq))$$

.

Nullstellen-Bestimmung in $\mathbb{Z}$

Problem: $a(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Bestimme alle Nullstellen in $\mathbb{Z}$.

- Anwendung modularer Methoden, z.B. der Big-Prime Methode.

Anwendung: Nullstellen-Bestimmung in $\mathbb{Z}$

procedure Root_Finding_$\mathbb{Z}$ $(a(x), p)$
{Eingabe: nicht-konstantes Polynom $a(x) \in \mathbb{Z}[x]$, grad $a = n$,}
{ Max_Norm $(a) = \| a \|_\infty = A$}
{Ausgabe: Nullstellen von a in $\mathbb{Z}$}

begin
1 $B := 2n(A^2 + A)$
p Primzahl zwischen $B + 1$ und $2B$
2 Call Root_Finding(a(x),p)
//bestimmt $\{u_1 \bmod p, \ldots, u_r \bmod p\}$ Nullstellenmenge in $\mathbb{F}_p$ von $a(x) \bmod p$, $u_i \in \mathbb{Z}$, $|u_i| < p/2$ alle i//
3 **for** $1 \leq i \leq r$
berechne $v_i \in \mathbb{Z}[x]$ mit $\text{grad}(v_i) = n - 1$, $\| v_i \|_\infty < p/2$ und $a(x) \equiv (x - u_i)v_i \bmod p$
4 **return** $\{u_i : 1 \leq i \leq r, |u_i| \leq A \wedge \| v_i \|_\infty \leq nA\}$
end

Anwendung: Nullstellen-Bestimmung in $\mathbb{Z}$ (Forts.)

6.24 Satz Korrektheit und Komplexität:
Der Algorithmus berechnet alle ganzzahligen Nullstellen von $a(x)$.
Die Kosten für Schritt 2 sind

$$0(M(n)\log n \log(nA) M(\log(nA))\log\log(nA))$$

und von Schritt 3 pro u_i sind $0(nM(\log(nA)))$ Wortoperationen.
Falls p größer als Computerwort, so $\log^2 p$ bzw. $M(\log p)$ Wortoperationen.

Beweis
Die Schranke folgt aus Folgerung unter Berücksichtigung von $\log p \in 0(\log(nA))$. Die Kosten für jedes u_i in Schritt 3 sind $0(n)$ Additionen und Multiplikationen in $\mathbb{F}_p$, d. h. $0(nM(\log(nA)))$ Wortoperationen.
Die Kosten für die Bestimmung von p werden hier nicht berücksichtigt.

Anwendung: Nullstellen-Bestimmung in $\mathbb{Z}$ (Forts.)

Korrektheit: o.b.d.A. $a(0) \neq 0$ (Division von Potenzen von x).

- Gilt $a(u) = 0$ für ein $u \in \mathbb{Z}$, so $(x - u) \mid a(x)$ und somit teilt u den konstanten Koeffizienten von $a(x)$, d. h. $|u| \leq A < p/2$.
  d.h. Alle verschiedenen Nullstellen von $a(x)$ in $\mathbb{Z}$ können eindeutig aus ihren mod p Bilder wiedergewonnen werden.
- Zeige: $a(u_i) = 0$ gdw $|u_i| \leq A$ und $\| v_i \|_\infty \leq nA$.
- Angenommen $a(u_i) = 0$ dann $|u_i| \leq A$ (siehe oben) und $\| a/(x - u_i) \|_\infty \leq nA < p/2$. Da $a/(x - u_i) \equiv v_i \bmod p$ und beide Seiten mit $|\text{Koeff.}| < p/2 \rightsquigarrow$ gleich $\rightsquigarrow \| v_i \|_\infty \leq nA$.
- Umgekehrt: Sei $|u_i| \leq A$ und $\| v_i \|_\infty \leq nA$, dann $\| (x - u_i)v_i \|_\infty \leq (1 + A)nA < p/2$, d. h. die Kongruenz $a(x) \equiv (x - u_i)v_i \bmod p$ ist eine Identität.

Beachte die Wahl von $p \geq B + 1 > 2n(A^2 + A)$ garantiert $p/2 > A, nA, (1 + A)nA$.

Faktorisierungsalgorithmen, die auf linearer Algebra basieren

Die Algorithmen von Berlekamp 1967/1970.
Erste Faktorisierungsalgorithmen für Polynome über endliche Körper, die pol. Laufzeiten hatten.
Anstelle der Getrennte-Grad Faktorisierung werden Methoden der linearen Algebra verwendet um das Polynom zu spalten.

- Sei $a(x) \in \mathbb{F}_q[x]$ quadratfrei, monisch grad $n > 0$.
- $R = \mathbb{F}_q[x]/\langle a \rangle$ ist Vektorraum der Dimension n über $\mathbb{F}_q$ (sogar eine $\mathbb{F}_q$-Algebra).
- Die Abbildung $\beta = \sigma - id : R \to R$ mit $\beta(f) = f^q - f$ ist $\mathbb{F}_q$-linear.
- Wie bestimmt man den Kern von β:

Grundlagen für Berlekamps Algorithmen

- Ist $a = f_1 \cdots f_r$ die Faktorisierung von a in verschiedenen monischen irreduziblen Polynome aus $\mathbb{F}_q[x]$, so gilt nach chinesischem Restsatz

$$R \cong \mathbb{F}_q[x]/\langle f_1 \rangle \times \cdots \times \mathbb{F}_q[x]/\langle f_r \rangle$$

- Die $\mathbb{F}_q[x]/\langle f_i \rangle$ sind Körper mit $q^{\text{grad } f_i}$ Elementen und enthalten $\mathbb{F}_q$ (Konstanten $\bmod f_i$).

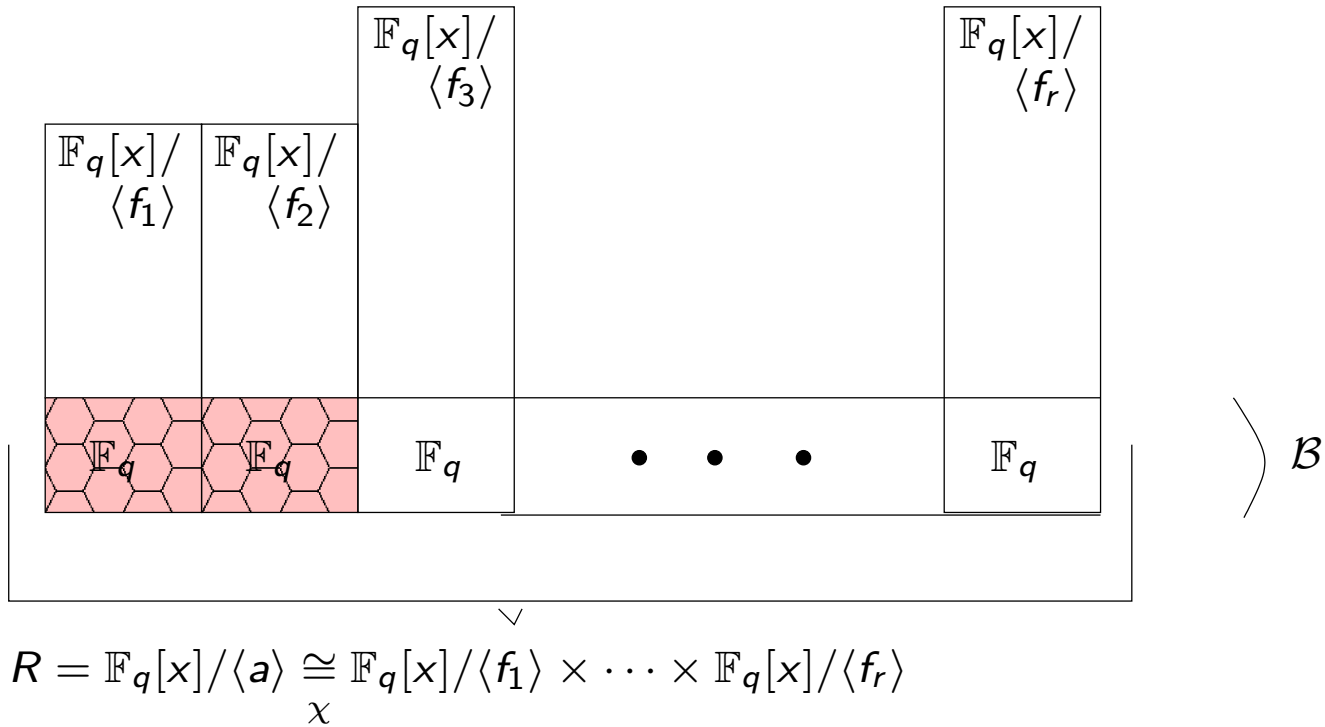
- Für $f \in \mathbb{F}_q[x]$ gilt

$$\begin{aligned} f \bmod a \in \ker \beta &\iff f^q \equiv f \bmod a \\ &\iff f^q \equiv f \bmod f_i \quad \text{für } 1 \leq i \leq r \\ &\iff f \bmod f_i \in \mathbb{F}_q \quad \text{für } 1 \leq i \leq r \end{aligned}$$

  Nach kleinem Fermat (alle Nullstellen von $x^q - x$ liegen in $\mathbb{F}_q$, da $x^q - x = \prod_{a \in \mathbb{F}_q} (x - a)$ in $\mathbb{F}_q[x]$).

Grundlagen für Berlekamps Algorithmen

Also ist $\mathcal{B} = \text{Kern } \beta$ der Unterraum, der $\mathbb{F}_q \times \cdots \times \mathbb{F}_q = \mathbb{F}_q^r$ entspricht.



Grundlagen für Berlekamps Algorithmen

- $\mathcal{B}$ ist sogar eine $\mathbb{F}_q$-Unteralgebra von R: Die Berlekamp-Unteralgebra.
- d.h. $f \bmod a \in \mathcal{B} \iff \chi(f \bmod a) = (a_1 \bmod f_1, \cdots, a_r \bmod f_r)$ für Konstanten $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{F}_q$.
- Die Matrix $Q \in \mathbb{F}_q^{n \times n}$, die den Frobenius-Hom. $\sigma : f \to f^q$ bezüglich der Basis $x^{n-1} \bmod a, \cdots, x \bmod a, 1 \bmod a$ von R darstellt, heißt Petr-Berlekamp-Matrix von a. $x^{qj} \equiv q_{j,0} + q_{j,1}x + \cdots + q_{j,n-1}x^{n-1}$

  Der Berlekamp Faktorisierungsalgorithmus basiert nun auf folgenden Berechnungen:

- Bestimme zunächst eine Basis $b_1 \bmod a, \ldots, b_r \bmod a$ von $\mathcal{B}$ durch Gauss-Elimination angewendet auf $Q - I$.
- Beachte: a ist irreduzibel $\iff r = 1 \iff$ Rang $(Q - I) = n - 1$.
  r gibt somit die Anzahl der irreduziblen Faktoren von $a(x)$ an.

Berlekamp Faktorisierungsalgorithmus

- Angenommen q sei ungerade und sei $b = c_1 b_1 + \cdots + c_r b_r$ eine zufällige Linearkombination der Basiselemente mit $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{F}_q$ unabhängig gewählt, d. h. b mod a ist ein zufälliges Element aus $\mathcal{B}$.
- Wende $(q-1)/2$ Trick, wie bei ED-Faktorisierung, an: Die b mod f_i sind gleichmäßig zufällig verteilte Elemente von $\mathbb{F}_q$ für $1 \leq i \leq r$. Falls keines der f_i b teilt, so ist $b^{(q-1)/2} \equiv \pm 1 \bmod f_i$ und beide Möglichkeiten treten mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ auf, unabhängig für alle i (Lemma 6.18).
- Beachte: Falls b nicht konstant ist, so gilt $a(x) = \prod_{s \in \mathbb{F}_q} \mathrm{GGT}(b - s, a(x))$

  Da $x^q - x = \prod_{s \in \mathbb{F}_q} (x - s)$, d.h. $b^q - b = \prod_{s \in \mathbb{F}_q} (b - s)$

  und $f_i \mid a$ für alle $i \rightsquigarrow f_i \mid b^q - b = \prod_{s \in \mathbb{F}_q} (b - s)$

Berlekamp Faktorisierungsalgorithmus (Forts.)

- Für $s \neq t$ gilt aber $\mathrm{GGT}(b-s, b-t) = 1$, d. h. für gegebenes i gilt $f_i \mid b - s_k$ für genau ein s_k, d. h.
  $$a = GGT(b^q - b, a) = GGT(\prod_{s \in \mathbb{F}_q} (b-s), a) = \prod_{s \in \mathbb{F}_q} GGT(b-s, a)$$

- Berechnung von Q:

  $$x^q \bmod a(x), \quad x^{2q} \bmod a(x), \ldots, x^{(n-1)q} \bmod a(x)$$
  $$\begin{aligned} a(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n \\ x^m &\equiv r_{m,0} + r_{m,1}x + \cdots + r_{m,n-1}x^{n-1} \bmod a(x) \\ x^{m+1} &\equiv -r_{m,n-1}a_0 + (r_{m,0} - r_{m,n-1}a_1)x + \cdots \\ &\quad + (r_{m,n-2} - r_{m,n-1}a_{n-1})x^{n-1} \\ &\equiv r_{m+1,0} + r_{m+1,1}x + \cdots + r_{m+1,n-1}x^{n-1} \end{aligned}$$

- $r_{m+1,0} = -r_{m,n-1}a_0$
  $r_{m+1,i} = r_{m,i-1} - r_{m,n-1}a_i \quad i = 1, \ldots, n-1 \rightsquigarrow O(qn^2)$ Körperoperationen.

Berlekamp-Algorithmus: Ein echter Faktor

{Eingabe: Monisches QF-Polynom $a \in \mathbb{F}_q[x]$, $\text{grad}(a) = n$, q ungerade PZP}
{Ausgabe: Entweder echter faktor g von a oder Failure, d.h. Las-Vegas Typ PA}

1 Call repeated squaring Algorithm in $\mathbb{F}_q[x]/\langle a \rangle$ zur Berechnung von $x^q \bmod a$;

2 **for** $0 \leq i < n$ berechne $x^{qi} \bmod a = \sum_{0 \leq j < n} q_{ij} x^j$ $Q := (q_{ij})_{0 \leq i,j < n}$;
//siehe auch Bemerkung zur Berechnung von Q//

3 Wende Gausselimination auf $Q - I \in \mathbb{F}_q^{n \times n}$ an um die Dimension und eine Basis $b_1 \bmod a, \ldots, b_r \bmod a$ der Berlekamp Algebra $\mathcal{B}$ zu bestimmen, hierbei sind $b_1, \ldots, b_r \in \mathbb{F}_q[x]$ mit Graden $< n$
if $r = 1$ **then return** a;

4 Wähle unabhängige zufällige $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{F}_q$ $b := c_1 b_1 + \cdots + c_r b_r$;

5 $g_1 := \text{GGT}(b, a)$; **if** $g_1 \neq 1$ **then return** g_1;

6 Call repeated squaring algorithm in $R = \mathbb{F}_q[x]/a$ zur Berechnung von $f := b^{(q-1)/2} \bmod a$;

7 $g_2 := \text{GGT}(f - 1, a)$; **if** $g_2 \neq 1$ and $g_2 \neq a$ **then return** g_2
else return „Failure“

Berlekamp-Algorithmus: Ein echter Faktor

6.25 Satz Der Algorithmus ist korrekt und Failure kommt mit Wahrscheinlichkeit $\leq 1/2$ vor. Er benötigt $0(n^3 + M(n)\log q)$ Operationen in $\mathbb{F}_q$.

Beweis: Korrektheit: Falls $g_1 \neq 1$, so echter Teiler. Falls $g_2 \neq 1$ und $g_2 \neq a$, so ebenfalls echter Teiler. Falls $g_1 = 1$ in Schritt 5, so ist g_2 trivial (d. h. 1 oder a). In Schritt 7 gdw $f^{(q-1)/2} \equiv 1 \bmod f_i$ für alle i. Diese Fälle kommen mit der Wahrscheinlichkeit 2^{-1} vor. Die Erfolgswahrscheinlichkeit ist mindestens $1 - 2 \cdot 2^{-r} \geq 1/2$. Da $r \geq 2$ ist.
Die Kosten für Schritt 1 sind $0(M(n)\log q)$ Körper Operationen. Schritt 2 verwendet $n-2$ Multiplikationen $\bmod a$, d. h. $0(nM(n))$ Operationen in $\mathbb{F}_q$.
Kosten für Schritt 3 $0(n^3)$ dominiert die Kosten von 2, die $0(n\ r)$ Körper für Schritt 4 und die $0(M(n)\log n)$ Operationen der GGT Berechnungen in den Schritten 5 und 7.
6 benötigt $0(M(n)\log q)$ Körperoperationen.

Faktorisierungsalgorithmus

Für eine vollständige Faktorisierung von $a(x)$ wird die Basis von $\mathcal{B}$ nur einmal berechnet, der Spaltungsprozess der Schritte 4-7 wird rekursiv auf g und a/g angewandt. Alle irreduziblen Faktoren mit erwarteten Operationenzahl von $0(n^3 + M(n) \log r \log q)$.

Viele Varianten + Verbesserungen des Berlekamp Algorithmus in der Literatur. Problem für q groß: Die Kosten für die Erzeugung von Q und die Berechnung der GGT's wird durch $O(qkn^2)$ dominiert. Somit nur brauchbar für kleine q's. Etwa Polynom mit 4 Faktoren mit grad $n = 100$ über $\mathbb{F}_{3^{14}}$ benötigt 191 Milliarden Körperoperationen. Generiere Matrix durch binäres Potenzieren. Variante von Zassenhaus (siehe Geddes et Al S 360).

Kaltofen und Lobo: Minimalpolynom-Berechnung.

$0(M(n^2) \log n + M(n) \log q)$.
Dies ist wichtig, falls $\log q$ klein im Vergleich zu n ist.
Variante, Big Prime Berlekamp Algorithm siehe Geddes et.al.

Beispiel

6.26 Beispiel

$a(x) = x^6 - 3x^5 + x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 1 \in \mathbb{Z}_{11}[x] = \mathbb{F}_{11}[x]$

Q Matrix 6×6, $x^{q \cdot j} \equiv q_{j,0} + q_{j,1}x + \cdots + q_{j,5}x^5 \bmod a$.

Zeile 0 von Q $(1,0,0,0,0,0)$, $1 \equiv 1 \bmod a(x)$

$$
\begin{aligned}
x &\equiv x \bmod a(x) \\
x^2 &\equiv x^2 \bmod a(x) \\
x^3 &\equiv x^3 \bmod a(x) \\
x^4 &\equiv x^4 \bmod a(x) \\
x^5 &\equiv x^5 \bmod a(x) \\
x^6 &\equiv 3x^5 - x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x - 1 \bmod a(x) \\
x^7 &\equiv 3x^6 - x^5 + 3x^4 + x^3 + 3x^2 - x \\
&\equiv -3x^5 - x^3 - 5x^2 - 3x - 3 \bmod a(x) \\
&\vdots \\
x^{11} &\equiv 5x^5 - 5x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 5x + 3 \bmod a(x)
\end{aligned}
$$

Beispiel (Forts.)

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -3 & -3 & -5 & 5 \\ 3 & -5 & -5 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 3 & -4 & -2 \\ -4 & -3 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & -1 & -4 & -3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Basis für $Q - I$, bringe in Δ-Form $0, 1$ in diagonalen, falls 1 einzige 1 in Zeile dreiecks-idempotenter Form.

$$Q - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -3 & -3 & -5 & 5 \\ 3 & -5 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 2 & -4 & -2 \\ -4 & -3 & -1 & 0 & -1 & -3 \\ -3 & -1 & -4 & -3 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Beispiel (Forts.)

$$\rightsquigarrow \qquad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Δ idemp-Form, Rang 3

$$I - L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Basis für Nullraum ablesen, da $(I - L)L = 0$

Beispiel (Forts.)

Basis für $\mathcal{B}$:

$$v^{(1)} = (1,0,0,0,0,0), v^{(2)} = (0,1,1,1,1,0), v^{(3)} = (0,0,-4,-2,0,1)$$

d. h. als Polynome.
$v^{(1)}(x) = 1 \quad v^{(2)}(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x \quad v^{(3)}(x) = x^5 - 2x^3 - 4x^2$

$\rightsquigarrow a(x)$ faktorisiert sich in drei irreduzible Faktoren.

- $\mathrm{GGT}(a(x), v^{(2)}(x)) = x + 1 \rightsquigarrow f_1(x) = x + 1$

  $\frac{a(x)}{x+1} = x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 4x + 1$

- $\mathrm{GGT}(a(x), v^{(2)}(x) + \underset{3,4,5,6}{1}) = 1 \quad \mathrm{GGT}(a(x), v^{(2)}(x) + 2) = 1$

- $\mathrm{GGT}(a(x), v^{(2)}(x) + 7) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = f_2(x)$

  $a(x)/g_1(x) = x^2 + 5x + 3 = f_3(x)$

Beispiel (Forts.)

Zufalls-Element aus $\mathcal{B}$

- $v(x) = 3v^{(1)}(x) - 2v^{(2)}(x) + 5v^{(3)}(x) = 5x^2 - 2x^4 - x^3 - 2x + 3$
  $\mathrm{GGT}(a(x), v(x)^5 - 1) = x^5 - 4x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 4x + 1$
- $a(x) = (x+1)\underbrace{(x^5 - 4x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 4x + 1)}_{2 \text{ irr. Faktoren}} \rightsquigarrow f_1(x) = x + 1$
- $v(x) = 2v^{(1)}(x) + 3v^{(2)}(x) + 4v^{(3)}(x) = 4x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 3x + 2$
  $\mathrm{GGT}(x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 2x^2 - 4x + 1, v(x)^5 - 1) = 1$ Pech!
- $v(x) = v^{(1)}(x) + 3v^{(2)}(x) - 4v^{(3)}(x) = -4x^5 + 3x^4 - 3x^2 + 3x + 1$
  $\mathrm{GGT}(x^5 - 4x^4 \cdots, v(x)^5 - 1) = x^2 + 5x + 3$
  $\rightsquigarrow (x^2 + 5x + 3)(x^3 + 2x^2 + 3x + 4)$ restlichen Faktoren.

Anwendung:
Irreduzible Polynome:: Test und Konstruktion

Faktorisierungsalgorithmen können für Irreduzibilitätstests verwendet werden:
z.B. Die Getrennte-Grad Faktorisierung kann angehalten werden, falls ein echter Faktor gefunden wurde oder bis zum Grad $> n/2$ kein Faktor gefunden wurde.

Alternativen

6.27 Lemma Ein Polynom $a \in \mathbb{F}_q[x], n = \text{grad}(a) \geq 1$ ist genau dann irreduzibel, wenn

i) $a \mid x^{q^n} - x$ und

ii) $\text{GGT}(x^{q^{n/t}} - x, a) = 1$ für alle Primteiler t von n.

Irreduzibilitätstest: Beweis

- Wegen Lemma 6.12 ($x^{q^d} - x$ ist Produkt aller monischen irreduziblen Polynome in $\mathbb{F}_q[x]$ deren Grad d teilt) folgen i) und ii), falls a irreduzibel ist.
- Umgekehrt falls i) gilt, so teilt der Grad eines irreduziblen Faktors von a die Zahl n. Sei g ein solcher irreduzibler Faktor mit $d = \text{grad}(g) < n$, d. h. $d \mid n/t$ für einen Primfaktor t von n, d. h. $g \mid x^{q^{n/t}} - x$ $\lightning$ zu ii), also $d = n$ und a ist irreduzibel.
- Hieraus lässt sich leicht ein Irreduzibilitätstest-Algorithmus herleiten: Rabin 1980.
- Berechne $f = x^{q^n} \bmod a$ $\qquad$ $f \neq x$, so ist a reduzibel.
- Für alle Primteiler t von n. Berechne $g = x^{q^{n/t}} \bmod a$.
  if $\text{GGT}(g - x, a) \neq 1 \rightsquigarrow$ reduzibel.
- **return** irreduzible.

Anwendung: irreduzible Polynome (Forts.)

6.28 Satz Der Algorithmus ist korrekt, d. h. er ist Entscheidungsalgorithmus für Irreduzibilität.

Kosten
$0(M(n)\log q + (n^{(w+1)/2} + n^{1/2}M(n))\delta(n)\log n)$ Operationen in $\mathbb{F}_q$.

Berechne zunächst $x^q \bmod a \rightsquigarrow 0(M(n)\log q)$
$s_m := x^{q^m} \bmod a$ für $m \in \mathbb{N}$. In $0((n^{(w+1)/2} + n^{1/2}M(n))$, $w \approx 2.376$ (Matrizenmultipl.)

Anzahl der m ber. $s_m : 1 + \delta(n)$ (Anzahl der Primteiler von n).

Als Irreduzibilitätstest eignet sich auch die Bestimmung vom Rang von $Q - I$ (siehe Berlekamp).
$0(n^w + M(n)\log q)$ Körperoperationen.

Für $w = 3$ ist der hier vorgestellte Algorithmus schneller.

Arithmetik in $\mathbb{F}_{p^n}$

Wie findet man irreduzible Polynome vom Grad n in $\mathbb{F}_p[x]$?

Wozu: Arithmetik in $\mathrm{GF}(p^n)$, Konstruktion von Körpererweiterungen.

Probabilistische Verfahren

6.29 Lemma Sei q Primzahlpotenz $n \geq 1$. Die Anzahl $I(n,q)$ der monisch irreduziblen Polynome vom Grad n in $\mathbb{F}_q[x]$ erfüllt:

$$\frac{q^n - 2q^{n/2}}{n} \leq I(n,q) \leq \frac{q^n}{n}$$

Insbesondere, falls $q^n \geq 16$ so erfüllt p_n - die Wahrscheinlichkeit eines zufällig gewählten monischen Polynoms vom Grad n irreduzibel zu sein- die Ungleichung

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n}\left(1 - \frac{2}{q^{n/2}}\right) \leq p_n \leq \frac{1}{n}$$

.

Probabilistische Verfahren: Beweis vom Lemma

Beweis: Sei f_n Produkt aller monisch irreduziblen Polynome von grad n in $\mathbb{F}_q[x]$, d. h. $\operatorname{grad}(f_n) = nI(n,q)$. Satz 6.12 kann umgeformt werden in

$$x^{q^n} - x = \prod_{d|n} f_d = f_n \prod_{d|n, d<n} f_d, \text{ d.h. } q^n = \operatorname{grad}(f_n) + \sum_{d|n, d<n} \operatorname{grad}(f_d),$$

also

$$q^n \geq \operatorname{grad}(f_n) = n \cdot I(n,q) \rightsquigarrow \text{ obere Schranke.}$$

Es gilt, da $q \geq 2$

$$\sum_{d|n, d<n} \operatorname{grad}(f_d) \leq \sum_{1 \leq d \leq n/2} \operatorname{grad} f_d \leq \sum_{1 \leq d \leq n/2} q^d \leq \frac{q^{n/2+1} - 1}{q-1} \leq 2q^{n/2}$$

somit

$$n \cdot I(n,q) = \operatorname{grad}(f_n) = q^n - \sum_{d|n, d<n} \operatorname{grad}(f_d) \geq q^n - 2q^{n/2}$$

$\rightsquigarrow$ untere Schranke.

Probabilistische Verfahren (Forts.)

- Es gibt insgesamt q^n monische Polynome vom Grad n in $\mathbb{F}_q[x]$, d. h.

$$\frac{1}{n} \geq \frac{I(n,q)}{q^n} \geq \frac{1}{n}(1 - 2q^{-n/2}) \geq \frac{1}{2n}$$

  für $q^n \geq 16$.

- Genaue Formel ist $n \cdot I(n,q) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) q^d$ (mithilfe der Möbius Inversion). Hierbei ist μ die Möbius Funktion, d. h.

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1 \\ (-1)^k & \text{falls } n \text{ Produkt von } k \text{ verschiedenen} \\ & \text{Primzahlen ist} \\ 0 & \text{falls } n \text{ nicht quadratfrei} \end{cases}$$

- Werte $I(5,q)$ für $q = 2,3,4,5,7,8,9$

  6 48 204 624 3360 6552 11808

Probabilitische Algorithmen zur Erzeugung irreduzibler Polynome mit grad n

procedure Ben Or's_Irreduzible_Polynome
{Eingabe: Primzahlpotenz $q, n \geq 1$}
{Ausgabe: zufälliges monisches irred. Polynom mit Grad n aus $\mathbb{F}_q[x]$}
begin
1 wähle zufällig monisches Polynom $f \in \mathbb{F}_q[x]$ von Grad n
2 **for** $i = 1, \ldots, \lceil n/2 \rceil$ **do**
$g_i := \mathrm{GGT}(x^{q^i} - x, f)$;
if $g_i \neq 1$ **then goto** 1
3 **return** f
end.

Probabilitische Algorithmen (Forts.)

- Wie beim DD-Fakt Algorithmus zeigt man, dass die Anzahl der Operationen für Schritt 2 etwa $0(sM(n)\log(nq))$, $0^{\sim}(n^2 \log q)$

  (Soft 0 $\quad f \in 0^{\sim}(g)$, falls es Konstanten $N, c \in \mathbb{N}$ gibt mit $f(n) \leq g(n)(\log_2(3+g(n)))^c$ für $n \geq N$).

- Mit Lemma 6.29 $\rightsquigarrow$ erwartete Operationenzahl

$$0^{\sim}(n^3 \log q) \quad (0(nsM(n)\log(nq)))$$

Probabilitische Algorithmen (Forts.)

Es gilt jedoch

6.30 Lemma (ohne Beweis) Der Erwartungswert für den Grad des kleinsten irreduziblen Faktors eines zufällig gewählten Polynoms von Grad n aus $\mathbb{F}_q[n]$ ist $0(\log n)$.

6.31 Satz Ben Or's Algorithmus ist korrekt und die erwartete Anzahl von Operationen in $\mathbb{F}_q$ ist

$$0(nM(n)\log n \log(nq)) \text{ oder } 0^{\sim}(n^2 \log q).$$

Beweis
Für ein i : $0(M(n)\log(nq))$, für 2: $0(M(n)\log n \log n(q))$.
Anzahl der versuchten f:: $0(n)$ wegen Lemma 6.29.

Faktorisierung in $R[x_1, \ldots, x_n]$ R ZPE Ring

Zusammenfassung: Faktorisierung in $\mathbb{F}_q[x]$. ok.

- Faktorisierung in $\mathbb{Z}[x] \cong$ Faktorisierung in $\mathbb{Q}[x]+$ Faktorisierung in $\mathbb{Z}$.
  d.h. Faktorisierung primitiver Polynome aus $\mathbb{Z}[x]$
  $\rightarrow a \in \mathbb{Z}[x]$ primitiv, o.b.d.A. a quadratfrei.
- Wähle „Big Prime“ $p \in \mathbb{Z}$, $p \nmid \mathrm{LKoeff}(a)$, $a \bmod p \in \mathbb{F}_p[x]$ quadratfrei.

  Faktorisiere $a \bmod p$ in $\mathbb{F}_p[x]$.
  Wenn $a \bmod p$ irreduzibel in $\mathbb{F}_p[x]$, so auch a irreduzibel in $\mathbb{Z}[x]$.
- Wahl der Primzahl mithilfe Mignotte's Schranke
  (erlaubt die Rekonstruktion der Faktoren).
- Wie findet man die modularen Faktoren von $a \bmod p$, die einen echten Faktor von a in $\mathbb{Z}[x]$ entsprechen? Vorgestellte Methode:
  Versuche alle möglichen Faktoren-Kombinationen.

  Problem: Exponentielle Laufzeit möglich.

Beispiel: Swinnerton-Dyer Polynome

$$a_i(x) = \prod(x \pm \sqrt{2} \pm \sqrt{3} \pm \sqrt{5} \pm \cdots \pm \sqrt{p_i}) \in \mathbb{Z}[x]$$

p_i i-te Primzahl, Produkt läuft über alle 2^i möglichen Kombinationen der Vorzeichen $\pm$. a ist irreduzibel mit Grad 2^i.
Beachte: $\mathbb{F}_{p^2}$ enthält alle Quadratwurzeln $\sqrt{2} \bmod p \cdots \sqrt{p_i} \bmod p$.

- Big-Prime Version
  - $B := (n+1)^{1/2} 2^n A b$
  - $b = LC(a)$
  - $n = \text{grad}(a)$
  - $A = \text{max-norm}(a)$

p ungerade Primzahl $2B < p < 4B$: $a \bmod p$ QF.
$a \equiv b g_1 \cdots g_r \bmod p$, d. h. in $\mathbb{Z}_p[x]$.

Zusammenfassung: Faktorisierung

- Mit Hensel Lifting: Zassenhaus Algorithmus
  - $B := (n+1)^{1/2} 2^n A b$ wie oben.
  - $C := (n+1)^{2n} A^{2n-1}$
  - $\gamma = \lceil 2 \log_2 C \rceil$

d. h. $\gamma \sim 2 \log_2 C \sim \quad 2 \cdot [2n \log(n+1) + (2n-1) \log A]$
$4n[\log(n+1) + \log[\text{max-norm}(a)]$

Wähle $p \leq 2\gamma \ln \gamma$: a mod p QF

$$l = \lceil \log_p(2B+1) \rceil \text{ Hensel-Lifting nach } \mathbb{Z}_{p^l}[x].$$

Problem: exp. Kombination der möglichen Faktoren. Kann durch andere Techniken in Polynom-Zeit (# Operationen) realisiert werden (siehe Kap. 16 vz. Gathen, Gerhard,Short Vectors in Lattices, Lenstra Lovasz 16.5).

Heuristiken: Beispiel

Heuristiken: Wähle mehrere Primzahlen p

6.32 Beispiel $a(x) = x^{16} + 11x^4 + 121$

- Faktorisierung in $\mathbb{Z}_{13}[x]$ liefert

$$\begin{array}{lccccccc} a(x) = & u_1(x) & u_2(x) & u_3(x) & \cdots & u_6(x) & \mod 13 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ & \text{grad } 2 & 2 & 3 & \cdots & 3 & \end{array}$$

$a(x) = u(x)v(x)$ 41 Faktorpaarungen
Grade $D_{13} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (bis $\lfloor n/2 \rfloor$)

- Faktorisierung von $a(x)$ in $\mathbb{Z}_{23}[x]$ liefert 8 irreduzible Faktoren, alle mit Grad 2 $\rightsquigarrow$ 162 Paarungen.

Grade $D_{23} = \{2, 4, 6, 8\}$
$\rightsquigarrow$ $D_{13,23} = \{2, 4, 6, 8\}$ sind die möglichen Grade mindestens eines Faktors $u(x)v(x) = a(x)$ in $\mathbb{Z}[x]$.
$\rightsquigarrow$ Anzahl der Kombinationen mod13 reduziert sich auf 25.

Beispiel (Forts.)

- Faktorisierung von $a(x)$ in $\mathbb{Z}_5[x]$ liefert 2 irreduzible Faktoren vom Grad 4 und 12, d. h.

  $D_5 = \{4\}$, nur ein Paar muss geliftet werden.

- Faktorisierung von $a(x)$ in $\mathbb{Z}_{31}[x]$ liefert 2 irreduzible Faktoren vom Grad 8, d. h.
  $D_{31} = \{8\}$
  $\rightsquigarrow D_{5,31} = \{\ \}$, d. h. *a* ist irreduzibel.

- Eisenstein Irreduzibilitäts-Test:
  $a \in \mathbb{Z}[x]$, p Primzahl mit $p \nmid LC(a)$ $p \mid$ alle anderen Koeffizienten von a, $p^2 \nmid a(0)$ $\rightsquigarrow$ a ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$.
  z.B. $x^n - p$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$ für alle n, p. Übung.

- Für die Swinnerton-Dyer Polynome gilt: sie lassen sich für jedes p in linearen und quadratischen Faktoren faktorisieren.
  $\rightsquigarrow$ obige Heuristik bringt dafür nichts!

Multivariate Polynomfaktorisierung in $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_\nu]$ bzw. $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_\nu]$

- Siehe Homomorphismus-Diagramm Fol. 303

$$\begin{array}{lll} \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_\nu] & Z[x_1, \ldots, x_\nu] & \\ \downarrow \Phi_I & \uparrow & \text{ideal-adische Iteration} \\ & Z_{p^l}[x_1] & \\ \downarrow \Phi_p & \uparrow & \text{p-adische Iteration} \\ \mathbb{Z}_p[x_1] & \text{-löse-} & \text{lifte} \end{array}$$

- Problem Liste der korrekten multivariaten Leit-Koeffizienten.
  $a(x_1, \ldots, x_\nu) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_\nu]$ x_1 als Hauptvariable.
  $a(x_1, \ldots, x_\nu) \equiv u_1(x_1) \cdots u_n(x_1) \in \mathbb{Z}[x_1] \mod \Phi_I$
- Leitkoeffizienten von $a(x_1, \ldots, x_\nu)$ (als Polynome in x_1) ist multivariates Polynom in Variablen $x_2, \ldots, x_\nu$.

Multivariate Polynomfaktorisierung... (Forts.)

Leitkoeffizienten Problem tritt auch hier auf, die Leitkoeffizienten der Faktoren müssen korrekt gewählt werden.
(Normierungstrick: korrekte Koeffizienten auf alle Faktoren verteilen).
Wang's Lösung

$$a(x_1, \ldots, x_\nu) = a_d(x_2, \ldots, x_\nu)x_1^d + \cdots$$

- Faktorisiere $a_d(x_2, \ldots, x_\nu)$ (rekursiver Aufruf).
  Verteile die Faktoren von $a_d(x_2, \ldots, x_\nu)$ auf die $u_1(x_1), \ldots, u_n(x_1)$.
  Geeignete Wahl von Φ_I. Auswertungspunkte: $\alpha_2, \ldots, \alpha_\nu \in \mathbb{Z}$ mit
  1. $a_d(\alpha_2, \ldots, \alpha_\nu) \neq 0$.
  2. $a(x_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)$ quadratfrei.
  3. Jeder Faktor von $a_d(x_2, \ldots, x_\nu)$ wenn ausgewertet in $\alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ hat Primzahlfaktor, der nicht in den anderen Auswertungen der restlichen Faktoren vorkommt.

Faktorisierung in $K[x]$ für K algebraischer Zahlenkörper

Anwendung: Symbolische Integration

Trager (Kronecker).

Algebraische Zahlenkörpern, algebraische Erweiterungen von F, d. h.
$F(\alpha) = F[x]/\langle m(x)\rangle$, m irreduzibles Polynom in $F[x]$.
α ist „Wurzel“ von $m(x)$ mit Grad n (z. B. x^2+1 in $\mathbb{Q}[x]$ oder $\mathbb{R}[x]$)

$$F(\alpha) = \{[f_0 + f_1\alpha + \cdots + f_{n-1}\alpha^{n-1}] : f_i \in F\}$$

6.33 Beispiel $F = \mathbb{Q}$, $\alpha = \sqrt{2}$, $m(x) = x^2 - 2$, dann

$\mathbb{Q}[x]/\langle x^2-2\rangle \simeq \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ mit

$$\begin{aligned}(a+b\sqrt{2}) + (a'+b'\sqrt{2}) &= (a+a') + (b+b')\sqrt{2}\\ (a+b\sqrt{2}) \cdot (a'+b'\sqrt{2}) &= (aa'+2bb') + (ab'+ba')\sqrt{2}\end{aligned}$$

Grundlagen: Konjugation

- Sei $m(x)$ eindeutiges monisches Minimalpolynom von α über F.
  Die Konjugierten von α über F sind die restlichen verschiedenen Nullstellen von $m(x)$. Seien diese $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$
  z.B. $-\sqrt{2}$ ist konjugiert zu $\sqrt{2}$ über $\mathbb{Q}$.
- Sei $\beta \in F(\alpha)$ mit $\beta = f_0 + f_1\alpha + \cdots + f_{n-1}\alpha^{n-1}$.
  Die Konjugierten von β sind $\beta_2, \ldots, \beta_n$, wobei

$$\beta_i = f_0 + f_1\alpha_i + \cdots + f_{n-1}\alpha_i^{n-1}$$

- Konjugation induziert Isomorphismen:

$$\sigma_i : F(\alpha) \to F(\alpha_i) \text{ mit } \sigma_i(\beta) = \beta_i$$

Charakterisierungssatz für F

6.34 Satz Sei $\beta \in F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

$\beta \in F$ gdw β invariant unter allen Permutationen der α_i.

Beweis: Fundamentalsatz für symmetrische Funktionen liefert:
β kann eindeutig durch die elementarsymmetrischen Funktionen von $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dargestellt werden (z. B. $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_n$, $\cdots$).
Diese können als Terme der Koeffizienten des Minimalpolynoms von α dargestellt werden, die dann in F liegen.

6.35 Definition Sei Norm: $F(\alpha) \to F$ definiert durch

- $\mathrm{Norm}(\beta) = \beta \cdot \beta_2 \cdots \beta_n$ (d. h. Produkt aller Konjugierten).
  Da invariant unter Konjugation, folgt $\mathrm{Norm}(\beta) \in F$.
- Norm kann auch mithilfe der Resultante beschrieben werden:
  $a[x], b[x] \in R[x]$ nicht null.

$$a(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \quad b(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$$

Sylvester Matrix: Eigenschaften

Sylvester Matrix von a und b ist

$$M_{n+m,n+m} = \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\\\\\\\\\end{array}\right\} n \\ \left.\begin{array}{l}\\\\\\\\\end{array}\right\} m \end{array} \left|\begin{array}{cccccc} a_m & a_{m-1} & \cdots & a_1 & a_0 & \\ & a_m & \cdots & \cdots & a_1 & a_0 \\ & & \vdots & & & \\ & & & a_m & \cdots & \cdots & a_0 \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 & b_0 & \\ & b_n & \cdots & \cdots & \cdots & b_0 \\ & & & & \vdots & \\ & & & b_n & \cdots & \cdots & b_0 \end{array}\right|$$

$\mathrm{Res}_x(a,b)$ ist die Determinante von M.
Wobei $\mathrm{Res}(0,b) = 0$ für $b \neq 0$ und $\mathrm{Res}(a,b) = 1$ für $a, b \in R^*$ definiert wird.

Sylvester Matrix: Beispiel

6.36 Beispiel Seien $a = 3yx^2 - y^3 - 4,\ b = x^2 + y^3x - 9 \in \mathbb{Z}[y][x]$ dann gilt:

$$\mathrm{Res}_x(a,b) = \det \begin{bmatrix} 3y & 0 & -y^3-4 & 0 \\ 0 & 3y & 0 & -y^3-4 \\ 1 & y^3 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & y^3 & -9 \end{bmatrix}$$

$$= -3y^{10} - 12y^7 + y^6 - 54y^4 + 8y^3 + 729y^2 - 216y + 16$$

Man beachte, dass $\mathrm{Res}_x(a,b) \in \mathbb{Z}[y] = R$. Es gilt für $a(x) = a_m \prod_{i=1}^{m}(x - \alpha_i)$ und $b(x) = b_n \prod_{i=1}^{n}(x - \beta_i)$

$$\mathrm{Res}_x(a,b) = a_m^n b_n^m \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(\alpha_i - \beta_j) = (-1)^{mn} b_n^m \prod_{i=1}^{n} a(\beta_i)$$

Grundlagen (Forts.)

- Eigenschaft: Zwei Polynome haben einen nichttrivialen gemeinsamen Faktor, falls $\mathrm{Res}(a, b) = 0$.
- Eigenschaft: Ist $q(x)$ monisch, so gilt

  $$\mathrm{Res}_x(p, q) = \prod_{x:q(x)=0} p(x), \text{ d. h.}$$

  $\mathrm{Norm}(\beta) = \mathrm{Res}_x(b(x), m(x)) = \beta \cdot \beta_2 \cdots \beta_n$,
  wobei β durch "Polynom" $b(\alpha)$ dargestellt wird.
- Fortsetzung der Norm auf $F(\alpha)[z]$.
  Sei $p \in F(\alpha)[z]$, d. h. p kann als bivariates Polynom in Variablen α und z betrachtet werden. Setze

  $\mathrm{Norm}(p) = \mathrm{Res}_x(p(x, z), m(x))$ liefert als Ergebnis ein Polynom in $F[z]$.

Grundlagen (Forts.)

- Beachte: $p(\alpha, z) \mid \text{Norm}(p)$ in $F(\alpha)[z]$.
- Die Norm-Funktion ist multiplikativ, d. h. $\text{Norm}(pq) = \text{Norm}(p)\text{Norm}(q)$

  d.h. Jedes Polynom p welches in $F(\alpha)[z]$ in Faktoren zerfällt, liefert eine Faktorisierung von $\text{Norm}(p)$ in $F[z]$

- Trager's Algorithmus basiert auf einer Umkehrung dieser Eigenschaft.
  Prozedur:
  Faktorisiere $\text{Norm}(p)$ in $F[z]$ und lifte diese Faktoren von $F[z]$ zu Faktoren von $p(z)$ in $F(\alpha)[z]$.
- Benötigt wir noch Irreduzibilitätstest in $F(\alpha)[z]$.

Irreduzibilitätstest für $a(z) \in F(\alpha)[z]$

6.37 Satz Sei $a(z) \in F(\alpha)[z]$ irreduzibel über $F(\alpha)$.
Dann ist Norm(a) Potenz eines irreduziblen Polynoms über F.

Beweis: Angenommen Norm$(a) = b(z)c(z)$ mit teilerfremde Polynome $b, c \in F[z]$. Da $a(z) \mid$ Norm(a) in $F(\alpha)[z]$ und $a(z)$ irreduzibel ist, gilt

- $a(z) \mid b(z)$ oder $a(z) \mid c(z)$ in $F(\alpha)[z]$.
- o.b.d.A. $a(z) \mid b(z)$: d.h. $b(z) = a(z)d(z)$ mit $d(z) \in F(\alpha)[z]$ und teilerfremd zu $a(z)$ da irreduzibel.
- Konjugation liefert $b(z) = \sigma_i(a(z))\sigma_i(d(z))$,
  d. h. $\sigma_i(a(z))$ ist Faktor von $b(z)$ für alle i. Dann aber
- Norm$(a) = \prod_i \sigma_i(a) \mid b(z)$ also $c(z) = 1$. d.h. Norm$(a) = b(z)$ und $b(z)$ ist entweder irreduzibel oder Potenz eines irreduziblen Elements.

Folgerung

Satz 6.37 hat als Folgerung:
Angenommen $a(z) \in F(\alpha)[z]$ habe die Eigenschaft, dass

- Norm(a) quadratfrei in $F[z]$. Dann
  - $a(z)$ irreduzibel gdw Norm(a) irreduzibel.
  - Falls $a(z)$ in $F(\alpha)[z]$ sich faktorisieren lässt als $a(z) = a_1(z) \cdots a_k(z)$ mit $a_i(z)$ irreduzibel, so ist
    Norm$(a) =$ Norm(a_1)Norm$(a_2) \cdots$ Norm(a_k), wobei jedes Norm(a_i) irreduzibel ist.
- Wenn Norm(a) quadratfrei ist, muss Norm$(a_i) \neq$ Norm(a_j) für $i \neq j$ gelten. d.h.:
  Es gibt eine eindeutige Korrespondenz zwischen den Faktoren von $a(z)$ über $F(\alpha)$ und den Faktoren von Norm(a) über F.

Umkehrung

6.38 Satz Sei $a(z) \in F(\alpha)[z]$, Norm(a) quadratfrei. Ist $p_1(z), \ldots, p_k(z)$ eine vollständige Faktorisierung von Norm(a) über $F[z]$, so ist

$$a(z) = \prod_{i=1}^{k} \mathrm{GGT}(a(z), p_i(z))$$

eine vollständige Faktorisierung von $a(z)$ über $F(\alpha)[z]$.

Beweis:

- Angenommen $a(z) = a_1(z) \cdots a_k(z)$ vollständige Faktorisierung von $a(z)$ in $F(\alpha)[z]$, dann ist Norm$(a) =$ Norm$(a_1) \cdots$ Norm(a_k) eine Faktorisierung von Norm(a) in $F[x]$. d.h.
  Für jedes i gilt $p_i(z) =$ Norm(a_j) für ein geeignetes j.
  Da Norm(a) quadratfrei, folgt Norm$(a_j) \neq$ Norm(a_h) für $h \neq j$.

Umkehrung (Forts.)

- Behauptung: Gilt $p_i(z) = \text{Norm}(a_j)$, so

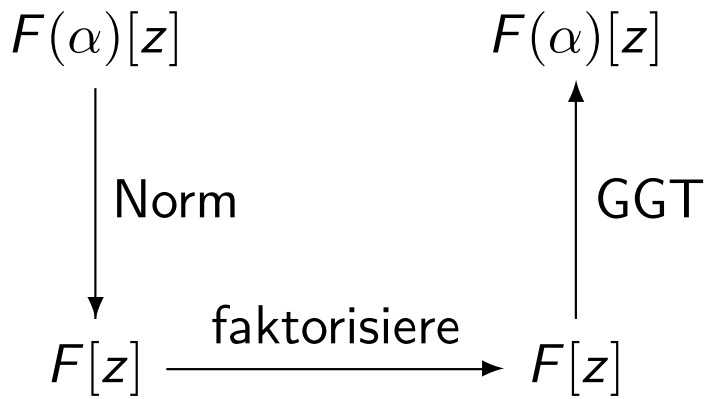
$$(*) \quad a_j(z) = \text{GGT}(a(z), p_i(z))$$

wobei der GGT in $F(\alpha)[z]$ genommen wird.

- Aus der Definition der Norm und den Eigenschaften folgt $a_j(z) \mid a(z)$ und $a_j(z) \mid p_i(z)$ in $F(\alpha)[z]$. Ein größerer Teiler wurde bedeuten: es gibt $a_h(z) \mid a(z)$ und $p_i(z)$ in $F(\alpha)[z]$ für ein h, $h \neq j$.
- Da $a_h(z) \mid p_i(z)$, gilt $\text{Norm}(a_h) \mid \text{Norm}(p_i)$. Aber $p_i(z) \in F[z]$ so folgt $\text{Norm}(p_i) = p_i(z)^n$
- Aber $\text{Norm}(a_h)$ ist irreduzibel, d. h. $\text{Norm}(a_h) = p_i(z)$ $\lightning$ falls $h \neq j$, d. h. $(*)$ gilt.

Faktorisierung in $F(\alpha)[z]$

- Wenn Norm(a) quadratfrei, so kann $a(z)$ wie folgt faktorisiert werden:



- Ist $a(z) \in F(\alpha)[z]$ nicht quadratfrei, so kann man wie gehabt o.b.d.A. auf quadratfreien Fall reduzieren. Benötigt wird aber Norm(a) quadratfrei.
- Finde $s \in F$, so dass $b(z) = a(z + s\alpha)$ quadratfrei. Dann faktorisiere $b(z) = b_1(z) \cdots b_k(z)$.
- Die Faktorisierung für $a(z) = a_1(z) \cdots a_k(z)$ mit $a_i(z) = b_i(z - s\alpha)$.

Faktorisierung in $F(\alpha)[z]$ (Forts.)

6.39 Satz Sei $a(z)$ quadratfreies Polynom in $F(\alpha)[z]$. Dann ist $\mathrm{Norm}(a(z - s\alpha))$ quadratfrei bis auf endlich vielen $s \in F$.

Beweis:

- Sei $\mathrm{Norm}(a) = \prod_{i=1}^{r} p_i(z)^i$ quadratfreie Faktorisierung von $\mathrm{Norm}(a)$ in $F[z]$.
- Da $a(z)$ quadratfrei ist und $a(z) \mid \mathrm{Norm}(a) \rightsquigarrow$ $a(z) \mid p(z) = p_1(z) \cdots p_r(z)$. Beachte hierbei $p(z) \in F[z]$.
- Seien $\beta_1, \ldots, \beta_k$ die Wurzeln von $p(z)$, d.h. $p(z) = \prod(z - \beta_i)$.
- Da $p(z)$ quadratfrei ist, so sind alle β_i verschieden.

Beweis (Forts.)

- Sei $s \in F$, dann
  $c_s(z) := \text{Norm}(p(z - s\alpha)) = \prod_j \prod_i (z - (s\alpha_j + \beta_i)) \in F[z]$.
- Dieses Polynom kann mehrfach Wurzeln haben gdw
  $s \cdot \alpha_j + \beta_i = s \cdot \alpha_u + \beta_v$ für j, i, u, v geeignet gdw $s = \frac{\beta_v - \beta_i}{\alpha_j - \alpha_u}$
- d. h. für fast alle $s \in F$ gilt $\text{Norm}(a(z - s\alpha)) \mid p(z - s\alpha) \mid c_s(z)$
  mit $c_s(z)$ Polynom ohne Mehrfachwurzeln.
- In diesen Fällen ist $a_s(z) = a(z - s\alpha)$ Polynom in $F(\alpha)[z]$ mit quadratfreier Norm.

Faktorisierung über alg. Zahlenkörpern

procedure Alg_Factorization$(a(z), m(x), \alpha)$

{Eingabe: quadratfreis $a(z) \in F(\alpha)[z]$}

{α Alg-Zahl mit minimal Polynom $m(x)$, grad n, a als Polynom in α, z}

{Ausgabe: Faktorisierung von a}

1 //Finde s : Norm$(a_s(z))$ quadratfrei //
$s := 0; a_s(\alpha, z) := a(\alpha, z);$
Norm$(a_s) :=$ Res$_x(m(x), a_s(x, z))$
while Grad (GGT (Norm(a_s), Norm$(a_s)'$)) $\neq 0$ **do**
$s := s + 1; a_s(\alpha, z) := a_s(\alpha, z - \alpha);$
Norm$(a_s) :=$ Res$_x(m(x), a_s(x, z))$
2 //Faktorisiere Norm(a_s) in $F[z]$ und lifte Ergebnis //
$b :=$ factors(Norm(a_s));
if sizeof$(b) = 1$ **then** return $a(z)$
else
for each $a_i(z) \in b$ **do**
$a_i(\alpha, z) :=$ GGT$(a_i(z), a_s(\alpha, z))$
$a_i(\alpha, z) := a_i(\alpha, z + s\alpha)$
substitute$(a_i(z) \leftarrow a_i(\alpha, z), b)$
return (b)

Beispiel

6.40 Beispiel Sei

$$a_\alpha(z) = z^4 + z^3 + (2 + \alpha - \alpha^2)z^2 + (1 + \alpha^2 - 2\alpha^3)z - 2 \in Q(\alpha)[z]$$

Mit $\alpha = 3^{1/4}$ minimal Polynom für α, $m(x) = x^4 - 3$.

- $\text{Norm}(a_\alpha(z)) = \text{Res}_x(a_\alpha(z), m(x)) =$
  $= z^{16} + 4z^{15} + 14z^{14} + 32z^{13} + 47z^{12} + 92z^{11} + 66z^{10} + 120z^9$
  $-50z^8 - 24z^7 - 132z^6 - 40z^5 - 52z^4 - 64z^3 - 64z^2 - 32z + 16$

  Ist QF in $\mathbb{Q}[z]$
- Faktorisiert man in $\mathbb{Q}[z]$ so $\text{Norm}(a_\alpha(z)) = g(z) \cdot h(z)$ mit

  $g(z) = z^8 + 4z^7 + 10z^6 + 16z^5 - 2z^4 - 8z^3 - 20z^2 - 8z + 4$
  $h(z) = z^8 + 4z^6 + 9z^4 + 4z^2 + 4$

Beispiel (Forts.)

- Berechne GGT in $\mathbb{Q}(\alpha)[z]$

  $\mathrm{GGT}(a_\alpha(z), g(z)) = z^2 + (1-\alpha)z + (1-\alpha^2)$ und

  $\mathrm{GGT}(a_\alpha(z), h(z)) = z^2 + \alpha z + (1+\alpha^2)$

  Faktorisierung von $a_\alpha(z)$ in $\mathbb{Q}(\alpha)[z]$ ist

$$a_\alpha(z) = (z^2 + (1-\alpha)z + (1-\alpha^2))(z^2 + \alpha z + (1+\alpha^2))$$

Problem:	- Gradwachstum von Norm(a).
	- Koeffizientenwachstum
Forschungsgegenstand	- Vermeidung von Wachstum
	- Berechnungen mit Körpererweiterungen
	- Galoiskorrespondenz

Inhalt Kapitel 7

Primzahltesten und Faktorisierung in $\mathbb{Z}$
- Primzahltesten
- Primzahlen mit vorgebenen Eigenschaften
- Faktorisierung in $\mathbb{Z}$
- Anwendung: Cryptosysteme

Primzahltesten und Faktorisierung in $\mathbb{Z}$ Eine Übersicht

- Gelöst: Komplexität vom Primzahltest:: In **P** ($O(n^6)$)
- Offenes Problem: Komplexität der Faktorisierung.

- Vorhanden: pol. schnelle probabilitische Primzahltests.
- Spezielle Zahlen: Mersenne Zahlen: $M_n = 2^n - 1$.
  Größte bekannte Mersenne Primzahl
  - $M_{3021377}$ Zahl mit 909526 Dezimalstellen.
  - Gimps: Great Internet Mersenne Prime Search.
  - Woltman/Kurowski $\rightsquigarrow$ Internet Computing Paradigma
- $N \in \mathbb{Z}^+$ ist N Primzahl?
  (Trivialtest bis $\sqrt{N}$ auf Teilbarkeit prüfen, exponentiell in $\log N$).

Primzahltesten: Grundlagen

- $\mathbb{Z}_N^x = \{a \bmod N \in \mathbb{Z}_N : \mathrm{GGT}(a, N) = 1\}$ mult. Einheiten Gruppe in $\mathbb{Z}_N$, Ordnung $\varphi(N) = |\mathbb{Z}_N^x|$ Euler Funktion.
  $N = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ paarweise verschieden p_i : $\mathbb{Z}_N^x \cong \mathbb{Z}_{p_1^{e_1}}^x \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_r^{e_r}}^x$

  $$\begin{cases} N \text{ Primzahl, so } \varphi(N) = N - 1 \\ N = p^l, \text{ so } \varphi(N) = p^{l-1}(p-1) \end{cases} \quad \rightsquigarrow \varphi(N) = \prod_{i=1}^r p_i^{e_i - 1}(p_i - 1)$$

  Fermat: $a^{N-1} \equiv 1 \bmod N$, $\quad N$ Primzahl, $\quad \mathrm{GGT}(a, N) = 1$

- Für $a, N \in \mathbb{Z}^+$ mit $\mathrm{GGT}(a, N) = 1$. Sei die Ordnung von a mod N $\mathrm{ord}_N(a) = \min\limits_{k \geq 1} \; a^k \equiv 1 \bmod N$.

- Euler: $a^{\varphi(N)} \equiv 1 \bmod N$, d. h. $\mathrm{ord}_N(a) \mid \varphi(N)$

- Falls p Primzahl, $l \geq 2$, $N = p^l$, $a = 1 + p^{l-1}$. Dann $\mathrm{ord}_N(a) = p$, da $a^p \equiv \sum_{0 \leq i \leq p} \binom{p}{i} p^{(l-1)} \equiv 1 \bmod p^l$

Algorithmus Fermat's Test

procedure Alg_Fermat_Test N

{Eingabe: ungerade Zahl $N \geq 3$}
{Ausgabe: „Nicht Primzahl“ oder „mögliche Primzahl“}

begin
1 Wähle $a \in \{2, \ldots, N-2\}$ zufällig (Gleichverteilung)
2 Berechne $b := a^{N-1} \bmod N$ durch wiederholtes Quadrieren
3 **if** $b \neq 1$ **then return** „nicht Primzahl“
else return „mögliche Primzahl“
end

- Ist $\mathrm{GGT}(a, N) \neq 1$ so $\mathrm{GGT}(b, N) \neq 1$ d. h. $b \neq 1 \rightsquigarrow$ nicht Primzahl ist korrekt.
- Angenommen $\mathrm{GGT}(a, N) = 1$, $b \neq 1$ Fermat $\rightsquigarrow$ Antwort korrekt
- $b = 1$ Antwort „mögliche Primzahl“.
  Wann ist für diese Antwort N keine Primzahl?

Fermat's Test: Grundlagen

- Sei $L_N = \{u \in \mathbb{Z}_N^x : u^{N-1} = 1\} \leq \mathbb{Z}_N^x$.
- Ist N Primzahl, so $L_N = \mathbb{Z}_N^x$ (Fermat), d. h. falls $L_N \neq \mathbb{Z}_N^x$, so $|L_N| \leq \frac{1}{2}|\mathbb{Z}_N^x|$ (Lagrange)
- Falls a im Test aus $\mathbb{Z}_N^x \backslash L_N$ gewählt wurde, so liefert der Test „nicht Primzahl“ $\rightsquigarrow$ Fermat Zeuge für die nicht Primalität von N
- Falls $a \in L_N$, so a Fermatlügner für N.
- Fermatsche Zahlen: $F_n = 2^{2^n} + 1$ sind Primzahlen für $n = 0, 1, 2, 3, 4$
- Fermat Vermutete: alle diese Zahlen sind Primzahlen (August 1640) kleiner Fermat Oktober 1640.

Fermat's Test: Ergebnisse

- $3^{2^{32}} \equiv 1461798105 \not\equiv 1 \bmod 2^{32}+1$, d. h. sein Satz wiederlegt seine Vermutung.

  Problemzahlen: N nicht Primzahl, aber $L_N = \mathbb{Z}_N^x$.
  Carmichael Zahlen (Zahlen ohne fermatsche Zeugen).

7.1 Satz

- Ist N Primzahl oder eine Carmichael Zahl, so liefert Fermats Test „mögliche Primzahl".
- Ist N nicht Primzahl und nicht Carmichael Zahl, so ist die Antwort „nicht Primzahl" mit Wahrscheinlichkeit mindestens $1/2$.

  Der Test benötigt $O(\log N \cdot M(\log N))$ Wortoperationen.
  (Z. B. $M(n) \in O(n \log n \log\log n)$ oder $\in O(n^2)$)

Fermat's Test: Verfeinerung

- Beachte: Carmichael Zahlen sind quadratfrei und $p-1 \mid N-1$ für jeden Primfaktor p von N, sie sind ungerade und haben mindestens 3 Primfaktoren:
  $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$, $1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17$, $1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$.
- Fermat's Test liefert keine Teiler von N, falls die Antwort „nicht Primzahl" ist.
- Verfeinerung: Teiler für Carmichael Zahlen finden.
- Starke Fermat Zeugen und Starke Fermat Lügner

Starker Pseudoprimalitäts-Test

{Eingabe: ungerade Zahl $N \geq 3$}
{Ausgabe: „Nicht Primzahl“, „mögliche Primzahl“, „echter Teiler von N“}
begin
1 Wähle $a \in \{2, \ldots, N-2\}$ zufällig
2 $g :=$GGT(a, N) **if** $g > 1$ **then** return g
3 Sei $N - 1 = 2^k m$ mit $k, m \in N, k \geq 1, m$ ungerade.
Berechne $b_0 := a^m \bmod N$ //durch wiederholtes quadrieren
if $b_0 = 1$ **then** return „mögliche Primzahl“
4 **for** $1 \leq i \leq k$ **do** $b_i := b_{i-1}^2 \bmod N$
5 **if** $b_k = 1$ **then** $j := \min\{0 \leq i < k : b_{i+1} = 1\}$
else return „nicht Primzahl“
6 $g := GGT(b_j + 1, N)$;
if $g = 1$ or $g = N$ **then** return „mögliche Primzahl“
else return g
end

Starker Pseudoprimalitäts-Test (Forts.)

7.2 Satz

Ist N Primzahl, so liefert der Algorithmus „mögliche Primzahl“.
Ist N nicht Primzahl und nicht Carmichael Zahl, so liefert der Algorithmus „nicht Primzahl“ mit Wahrscheinlichkeit mindestens $1/2$.
Ist N eine Carmichael Zahl, so liefert der Algorithmus einen echten Teiler von N mit Wahrscheinlichkeit mindestens $1/2$.
Die Anzahl der Wortoperationen ist $O(\log N \cdot M(\log N))$.

Beweis: Zeitschranke folgt aus der Vorüberlegung: 2 und 6 kosten $O(M(logN)loglogN)$ Wortoperationen, 3 und 4 O(logN) Multiplikationen mod N d.h. $O(\log N \cdot M(\log N))$
Beachte: $b_i \equiv a^{2^i m} \bmod N$ für $0 \leq i \leq k$.
Insbesondere $b_k \equiv a^{N-1} \bmod N$.
Ist $b_{i-1} = 1$, so auch $b_i = 1$ für alle i.
Ist N nicht Primzahl und nicht Carmichael, so a Fermat Zeuge mit Wahrscheinlichkeit $\geq 1/2$, $b_k \neq 1$.

Starker Pseudoprimalitäts-Test (Forts.)

- Angenommen N ist Primzahl, dann $b_k = 1$, falls
  - $b_0 = 1 \rightsquigarrow$ „mögliche Primzahl“ in 3.
  - Sonst $b_j \neq 1$ und $b_j^2 \equiv b_{j+1} = 1 \bmod N$ in 5.
- $x^2 - 1 \in \mathbb{Z}[x]$ hat höchstens 2 Nullstellen, d. h. Quadratwurzeln von $1 \bmod N$ sind 1 und -1 d. h. $b_j = N - 1$ und somit $g = N \rightsquigarrow$ korrekte Antwort „mögliche Primzahl“ in 6.
- Sei N Carmichael Zahl, P Menge der Primteiler von N.
  Da N quadratfrei ist, gilt $N = \prod_{p \in P} p$.
  Betrachte $I = \{i : 0 \leq i \leq k \text{ und } \forall u \in \mathbb{Z}_N^x \quad u^{2^i m} = 1\}$
  $k \in I$ nach Definition der Carmichael Zahlen, $i \in I$, so auch $i + 1 \in I$. Für $i < k$

Starker Pseudoprimalitäts-Test (Forts.)

- Sei $p \in P$ und $a \in \mathbb{Z}$ nicht Quadrat mod p mit $a^{(p-1)/2} \not\equiv 1 \bmod p$. (existiert nach Lemma 6.18). Da $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$, folgt $\mathrm{ord}_p(a) \mid p-1$, aber teilt nicht $(p-1)/2$, d. h. $\mathrm{ord}_p(a)$ ist gerade.
  Da m ungerade ist, folgt $a^m \not\equiv 1 \bmod p$.
  Chinesischer Restsatz liefert ein $u \in \mathbb{Z}_N^x$ mit $u^m \neq 1$, d. h. $0 \notin I$.
  Es gibt somit $l < k$ mit $l \notin I$ und $l+1 \in I$.

- Sei
$$G = \{u \in \mathbb{Z}_N^x : u^{2^l m} = \pm 1\} \leq \mathbb{Z}_N^x$$

  Behauptung: $G \neq \mathbb{Z}_N^x$. Es gibt $p \in P$ und $b \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{GGT}(b,p) = 1$ mit $b^{2^l m} \not\equiv 1 \bmod p$, da sonst $l \in I$. Wähle ein solches Paar.
  Chinesischer RS liefert:
  Es gibt $c \in \mathbb{Z}$ mit $c \equiv b \bmod p$ und $c \equiv 1 \bmod N/p$.
  Also $c \bmod N \in \mathbb{Z}_N^x \backslash G$, d.h. G hat höchstens $|\mathbb{Z}_N^x|/2 = \varphi(N)/2$ Elemente wählt man a mit $a \in \mathbb{Z}_N^x \backslash G$, so liefert Algorithmus echten Teiler. (S 496)

Andere Primzahltests

- Solovay-Srassen (74) basiert auf Legendre Symbol: Für $a, N \in \mathbb{Z}, N$ Primzahl sei

$$(\frac{a}{N}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } GGT(a,N) = 1 \text{ und } a \text{ ist Quadrat } mod N \\ -1 & \text{falls } GGT(a,N) = 1 \text{ und } a \text{ ist nicht Quadrat } mod N \\ 0 & \text{falls } GGT(a,N) \neq 1 \end{cases}$$

- Gauß quadratisches Reziprozitätsgesetz: $(\frac{a}{N}) = (\frac{N}{a})$ für ungerade Primzahlen, bis auf a, N beide kongruent 3 mod 4.
- Jacobi Symbol: Für $N = p_1^{e_1} ... p_r^{e_r}$ definiere

$$(\frac{a}{N}) = (\frac{a}{p_1})^{e_1} ... (\frac{a}{p_r})^{e_r}$$

"leicht" zu berechnen. Analogie zu EEA (siehe Übung 18.23 vzG,G)

Andere Primzahltests (Fort.)

- Ist N Primzahl, so gilt für alle $a \in \mathbb{Z}$

$$(*) \quad (\frac{a}{N}) \equiv a^{(N-1)/2} \ mod N$$

- Solovay-Strassen zeigen: Ist N zusammengesetzt und nicht Primzahlpotenz, so gilt $(*)$ nicht für mindestens die Hälfte der Zahlen $a \in 1...N-1$. Ihr Algorithmus testet $(*)$ für zufällig gewählte a's und kostet $O(logN \cdot M(logN))$ Wortoperationen pro Test.
- Spezielle Primzahltests:
  - Pepin (1877) für Fermat Zahlen $F_n = 2^{2^n} + 1$
    F_n ist Primzahl gdw $3^{(F_n-1)/2} \equiv -1 \ mod F_n$
  - Lucas-Lehmer Test (1878,1935) für Mersenne-Zahlen $M_n = 2^n - 1$
    $2^n - 1$ ist Primzahl gdw $l_{n-1} \equiv 0 \ mod M_n$.
    Hierbei l_i rek. definiert durch $l_1 = 4$ und $l_i = l_{i-1}^2 - 2$ $(i \geq 1)$

Primzahltesten ist in **P**

Siehe
`http://www.cse.iitk.ac.in/news/primality.html`

Finden von Primzahlen mit vorgebenen Eigenschaften

z. B. Primzahl mit n-Bits, Big-Prime Methoden, Hensel Lifting Methoden.

- Primzahlsatz:
  - Seien $\Pi(x) = |\{p \in \mathbb{N} : p \leq x, p \text{ Primzahl}\}|$, $p_n = n$ te Primzahl
  - Dann gilt:: $\Pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$ und $p_n \approx n \ln n$

  d.h. Eine zufällige Zahl nahe bei x ist eine Primzahl mit Wahrscheinlichkeit $1/\ln x$.

  d. h. wählt man zufällige n-Bit Zahl und testet sie auf Primalität, so erwartet man eine Primzahl zu finden mit etwa $n \ln 2$ Versuchen.

- Wie findet man Primzahl p mit $B < p \leq 2B$ (B vorgegeben). Wähle zufälliges Element im Intervall, teste auf Primalität k mal und gebe erste Zahl aus, die diesen Test erfüllt.

- Ist p nicht Primzahl, so ist die Wahrscheinlichkeit Antwort „mögliche Primzahl“ $\leq 2^{-k}$. Dies bedeutet aber nicht, dass die Ausgabe Primzahl mit Wahrscheinlichkeit $1 - 2^{-k}$ ist.

Finden von Primzahlen mit vorgebenen Eigenschaften

7.3 Satz Gegeben B, k, die Ausgabe des Verfahrens ist eine Primzahl mit Wahrscheinlichkeit mindestens $1 - 2^{-k+1} \ln B$ und benötigt im Mittel $O(k(\log^2 B)M(\log B))$ Wortoperationen.

- Beachte $|P| = \Pi(2B) - \Pi(B) \geq B/2 \ln B \quad (B \geq 6) \rightsquigarrow \frac{|P|}{B} \geq \frac{1}{2 \ln B}$
- Erwarteten Wahlen: $2lnB$ und jede kostet $O(klogB \cdot M(logB))$

7.4 Lemma Sei $P \subset \mathbb{N}$ Menge von Primzahlen, $a = \min P$.
Sei $M \in \mathbb{Z}$ mit $0 \neq |M| \leq C$.
Wählt man p zufällig aus P, so gilt

$$\text{Prob}\{M \equiv 0 \bmod p : p \in P\} \leq \frac{\log_a C}{|P|}$$

(es gibt höchstens $\log_a |M| \leq \log_a C$ Primzahlen in P, die M teilen).

Finden von Primzahlen mit vorgebenen Eigenschaften

7.5 Satz

- Es gibt einen probabilitischen Algorithmus, der mit Wahrscheinlichkeit mindestens $3/4$ eine Primzahl p zwischen $B+1$ und $2B$ berechnet für jede Zahl $B \in \mathbb{N}$ mit Wortlänge β.
- Ist $M \in \mathbb{Z}, M \neq 0$ mit $6 \ln |M| \leq B$, so gilt: p Primzahl und $p \nmid M$ mit Wahrscheinlichkeit mindestens $1/2$.
- Der Algorithmus benötigt $O(\beta^2 M(\beta) \log(\beta))$ Wortoperationen.
  - Wähle $k = 2 + \lceil \log_2 \ln B \rceil$ (dann Satz)
  - $p \mid M$ für p prim mit Wahrscheinlichkeit

$$\frac{\log_B C}{|P|} \leq \frac{\ln C \cdot 2 \ln B}{\ln B \cdot B} \leq \frac{1}{3} \quad (B \geq 6) \rightsquigarrow \frac{3}{4}(1 - \frac{1}{3}) = \frac{1}{2}$$

- Die ersten r Primzahlen können deterministisch in $O(r \log^2 r \log\log r)$ Wortoperationen berechnet werden.

Kosten und Voraussetzungen für Primzahlen in Algorithmen

	modular algorithm	prime requirements	cost for prime finding	cost for algorithm
deter-	big	$p > 2n^{n/2}A^n$	$n^3 \log^3 A$	$n^4 \log A$
minant	small	$p_i < 2r \ln r$	$n \log^3 A$	$n^4 \log A$
gcd	big	$p > \sqrt{n+1}\,2^{n+1}A^2$	$n^3 + \log^3 A$	$n^2 + n \log A$
	small	$p_i < 2r \ln r$	$n \log A$	$n^2 + n \log A$
EEA	small	$p_i < 2r \ln r$	$n \log A$	$n^3 \log A$
root	big	$p > 2n(A^2 + A)$	$\log^3 A$	$n^2 \log A + n \log^2 A$
finding	power	$p < 2r \ln r$	$n \log A$	$n^2 \log A$
factor-	big	$p > \sqrt{n+1}\,2^{n+1}A^2$	$n^3 + \log^3 A$	$n^{10} + n^8 \log^2 A$
ization	power	$p < 2r \ln r$	$n \log A$	$n^{10} + n^8 \log^2 A$

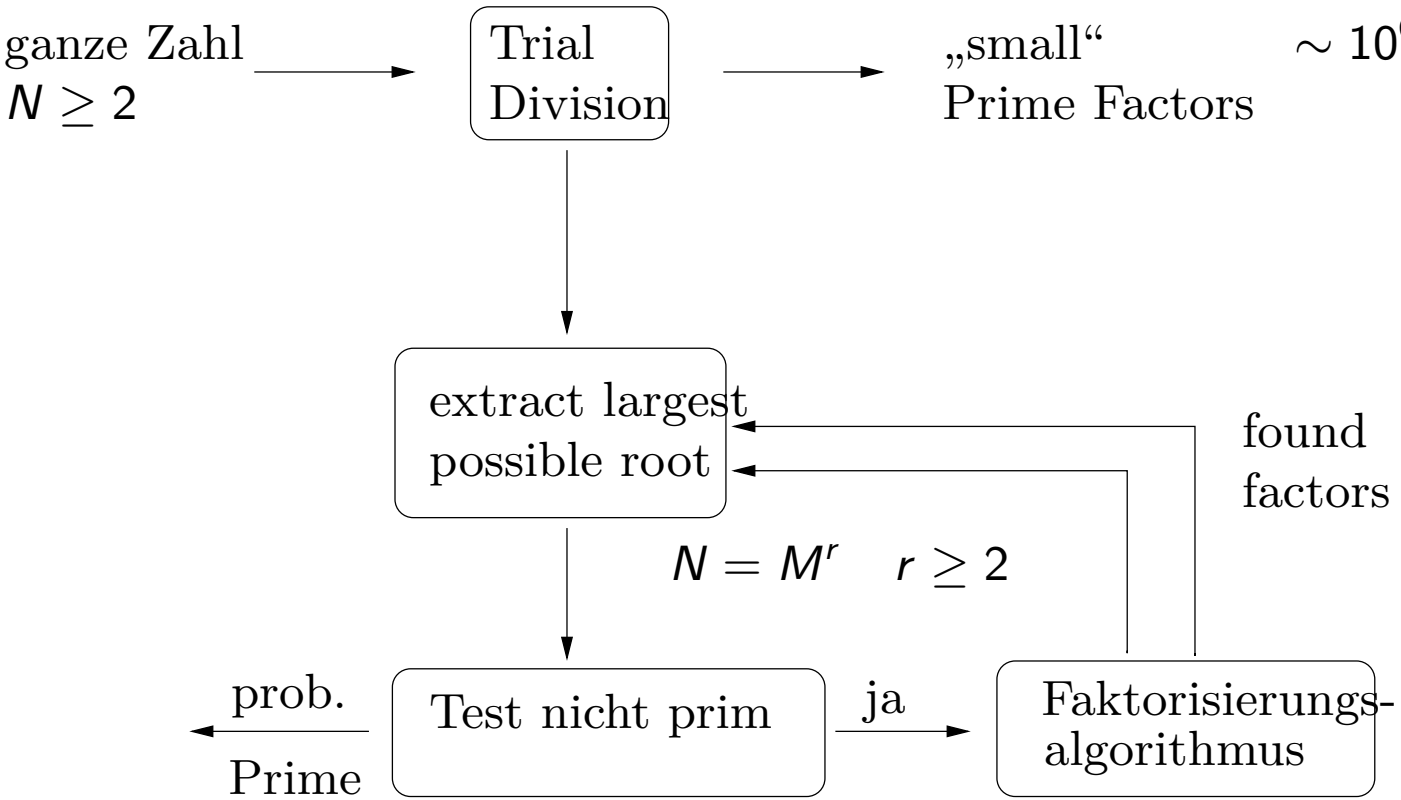
Faktorisierung in $\mathbb{Z}$ (Übersicht)

Methode	Jahr	Zeit
Trialdivision	$-, \infty$	$O^{\sim}(2^{n/2})$
Pollard's $p-1$ Methode	1974	$O^{\sim}(2^{n/4})$
Pollard's ϱ-Methode	1975	$O^{\sim}(2^{n/4})$
Pollard-Strassen	1976	$O^{\sim}(2^{n/4})$
Morrison/Brillhart	1975	$\exp(O^{\sim}(n^{1/2}))$
Dixon's Random Squares	1981	$\exp(O^{\sim}(n^{1/2}))$
Lenstra's Elliptic Curves	1987	$\exp(O^{\sim}(n^{1/2}))$
Number Field Sieve	1990	$\exp(O^{\sim}(n^{1/3}))$

Faktorisierung in $\mathbb{Z}$ (Übersicht) (Forts.)

- Faktorisierung von Polynome über $\mathbb{F}_2$ Grad 200000.
- Faktorisierung von Zahlen der Länge 150 noch als extrem hart.
  „Praktische Relevanz von P“ $\rightsquigarrow$ wichtig für Cryptosysteme.
- Tabellen: Cunningham Projekt 1925. Faktorisierungen von $b^n \pm 1$.
- “Most Wanted“ Factorizations.
  - RSA Cryptosystem: p_1, p_2 größe Pzahl $p_1 p_2$.
    130-Digits RSA Zahlen geknackt $\sim 2 \times 65 \quad 96$
  - Faktorisierung Fermat'scher Zahlen $F_y = 2^{29} + 1$
    F_{10}, F_{11} ellipt. Kurven, „most wanted 98“ $2^{569} - 1/(\text{PF})$ 23 Dig.
    $F_{12} = 114689 \cdot 26017793 \cdot 63766529 \cdot 190274191361 \cdot 1256132134125569 \cdot C$
    (C mit 1187 Digits).
  - `http://www.cerias.purdue.edu/homes/ssw/cun/index.htm`
    (siehe Wagstaff).

Format der Faktorisierungsalgorithmen



siehe Kap. 19, vz. Gathen/Gerhard
+ Kap.20: Anwendung Public Key Cryptography.

Faktorisierungsalgorithmen in $\mathbb{Z}$

Annahme: N ist keine perfekte Potenz, d.h. $N \neq M^k$ für $M \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$

- Ganzzahlige Wurzeln berechnen: Gegeben $a, n \in \mathbb{N}$
  Entscheide ob a eine n-te Potenz einer Zahl ist und berechne diese gegebenfalls.
- Gesucht Lösung von $y^n - a = 0$::
  Verwende hierfür Newtons Iteration (2-adisch) für a, n ungerade in $O(M(\log N))$.
- Bestimme b, d, e, r mit $N = 2^d 3^e b^r \quad GGT(b, 6) = 1$ r maximal in $O(\log N \cdot M(\log N))$ Wortoperationen.
  (Siehe Aufgaben 9.44 und 18.6 in vzG,G).

Trial Division Faktorisierungsalgorithmus

1. Trial_Division_Fakt_Algorithmus
   {Eingabe: $N \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, weder Prim noch perfekte Potenz, $b \in \mathbb{N}$}
   {Ausgabe: kleinster Primfaktor von N falls kleiner b sonst „Failure“}

   begin
   1 **for** $p = 2, 3, \cdots, b$ **do**
   2 **if** $p \mid n$ **then return** p
   3 **return** „Failure“
   end

- Um alle p-Faktoren zu finden, dividiere durch p so oft wie möglich dann weiter. Verwende: nächster Primteiler $> p$. Ist $S_1(N)$ bzw. $S_2(N)$ der grösste bzw. zweitgrösste P-Faktor von N. So $S_2(N) < \sqrt{N}$, d.h $S_2(n)(\log N)^{O(1)}$ Schritte. Für zufällige Zahlen N giltϱ

$$\text{Prob}\ (S_1(N) > N^{0.85}) \approx 0.20 \quad \text{Prob}\ (S_2(N) > N^{0.30}) \approx 0.20$$

- $O^{\sim}(N^{0.30})$ erwartete Schrittkomplexität für 1.

Pollard und Strassen Methode

Sei $a \mapsto \bar{a}$ die mod N Reduktion und $1 \leq c \leq \sqrt{N}$. Betrachte
$F = (x+1)(x+2)\cdots(x+c) \in \mathbb{Z}[x]$ $f = \overline{F} \in \mathbb{Z}_N[x]$
Dann gilt $\overline{c^2!} = \prod_{0 \leq i < c} f(\overline{ic})$. Strategie: "baby step/giant step"::

2. Pollard_ Strassen_Faktorisierung
{Eingabe: $N \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, weder Prim noch perfekte Potenz, $b \in \mathbb{N}$}
{Ausgabe: kleinster Primfaktor von N falls $< b$ sonst „Failure"}

begin

1 $c \leftarrow \lceil b^{1/2} \rceil$; Berechne Koeffizienten von $f = \prod_{1 \leq j \leq c} (x + \bar{j}) \in \mathbb{Z}_N[x]$;

2 Berechne $g_i \in \{0, \cdots, N-1\}$ mit $g_i \bmod N = f(\overline{ic})$ für $0 \leq i < c$;

3 Falls $\mathrm{GGT}(g_i, N) = 1$ für $0 \leq i < c$ **then return** „Failure"
$k \leftarrow \mathrm{Min}\,\{0 \leq i < c : \mathrm{GGT}(g_i, N) > 1)\}$

4 **return** $\mathrm{Min}\,\{kc + 1 \leq d \leq kc + c : d \mid N\}$

end

Fakt. Alg. Pollard/Strassen (Forts.)

7.6 Satz

Algorithmus 2. ist korrekt und benötigt $O(M(b^{1/2})M(\log N)(\log b + \log\log N))$ Wortoperationen und Platz für $O(b^{1/2}\log N)$ Wörter.

Beweis: Für $0 \leq i < c$ gilt:

- Ein Primteiler p von N teilt $F(ic)$ und somit auch $\mathrm{GGT}(g_i, N) = \mathrm{GGT}(F(ic) \bmod N, N)$ gdw. p teilt Zahl im Intervall $\{ic+1, \cdots, ic+c\}$ $\rightsquigarrow$ Korrektheit.
- Kosten für 1. und 2. $O(M(c)\log c)$ Add., Mult. in $\mathbb{Z}_N$
  Schritt 3 $O(cM(\log N)\log\log N)$ Wortoperationen
  Schritt 4 $O(cM(\log N))$ Wortoperationen

  Add., Mult. in $\mathbb{Z}_N$ kostet $O(M(\log N))$.
- Platz für $O(b^{1/2})$ Zahlen der Größe $O(\log N)$
- Schleife mit $b = 2^i, (i = 1, 2, ..., b > S_2(N))$ liefert vollständige Faktorisierung in $O(M(S_2(N)^{1/2})M(log\ N)logN)$.

Pollards ϱ-Methode (1975)

Idee

Wähle Funktion $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{Z}_N$ und Startwert $x_0 \in \mathbb{Z}_N$ Setze $x_i = f(x_{i-1})$ für $i > 0$. Betrachte die Folge (x_i)::

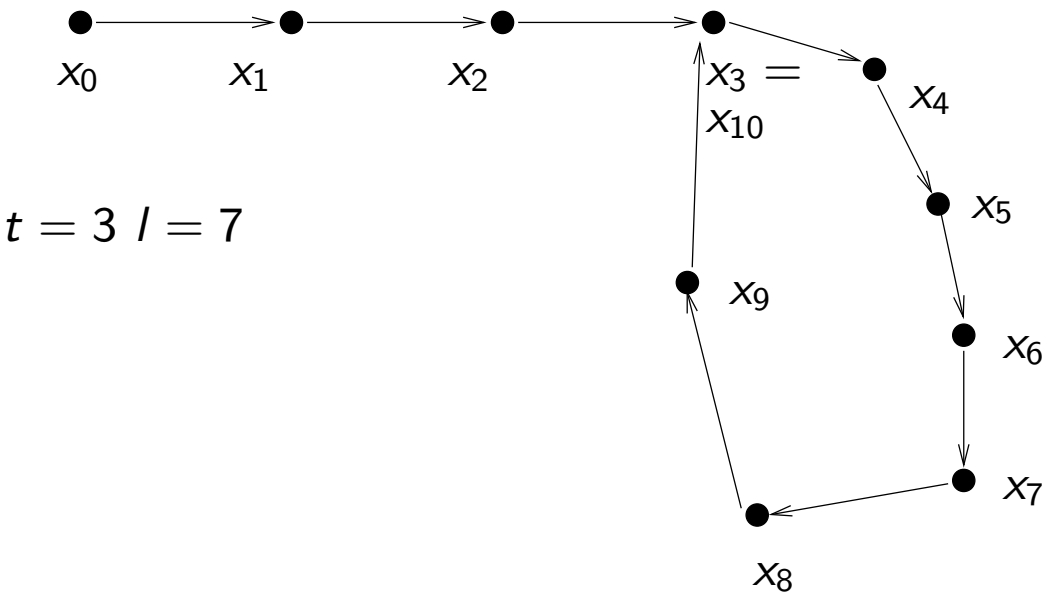
- Hoffe nun die Folge $x_0, x_1, x_2, \cdots$ verhält sich wie eine Folge unabhängiger Zufallselemente von $\mathbb{Z}_N$.
- Ist p ein unbekannter Primfaktor von N so findet eine Kollision mod p statt, falls es t, l gibt mit $l > 0$ und $x_t \equiv x_{t+l} \bmod p$
- Ist N keine Primzahlpotenz und q ein weiterer p-Teiler von N, so sind, für unabhängige Reste modulo N, $x_i \bmod p$ und $x_i \bmod q$ ebenfalls unabhängige Zufallsvariablen (Chin. Restsatz).
- D.h. mit großer Wahrscheinlichkeit $x_t \not\equiv x_{t+l} \bmod q$ und somit $\mathrm{GGT}(x_{t+l} - x_t, N)$ ist nicht trivialer Faktor von N.

Pollards ϱ-Methode (Forts.)

- Frage: Wie groß sin t, l?
  Offenbar $t + l \leq p$ und der erwartete Wert ist $O(\sqrt{p})$ für eine Zufallsfolge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$.
- Geburtstagproblem: Wieviel Personen benötigt man um eine Wahrscheinlichkeit (zwei personen mit gleichem Geburtstag zu haben) $\geq 1/2$ zu erhalten (23 reichen 50,7%)
- Auswahl (mit Wiederholung) aus Urne mit p Marken. Die erwartete Anzahl von Wahlen bis zu einer Kollision is $O(\sqrt{p})$
- Wie bestimmt man Zykel : Floyd's Trick.
  Sei $x_0 \in \{0, \cdots, p-1\}$ $f : \{0, \cdots, p-1\} \to \{0, \cdots, p-1\}$
  Betrachte $(x_i)_{i \geq 0}$ mit $x_{i+1} = f(x_i)$.
- Zykel der Länge $l > 0$ mit $x_i = x_{i+l}$ für alle $i \geq t$ für $t \in \mathbb{N}$

Pollards ϱ-Methode (Forts.)

l, t seien minimal



$t = 3$ $l = 7$

Speichere Folge
bis $x_i = x_j$
$O(t + l)$
zuviel Platz

Floyd's 1-step/2-step cycle detection method::
Führe zweite sequenz mit $y_i = x_{2i}$ speichere nur x_i, y_i bis $x_i = y_i = x_{2i}$

FLOYD_Cycle_Det_ALG

$y_0 \leftarrow x_0$; $i \leftarrow 0$;
repeat $i \leftarrow i + 1$; $x_i \leftarrow f(x_{i-1})$; $y_i \leftarrow f(f(y_{i-1}))$ **until** $x_i = y_i$;
return i

Floyd's 1-Step/2-Step cycle Detection Method

7.7 Lemma FLOYD_Cycle_Det_ALG hält nach höchstens $t + l$ Iterationen.

Beweis: Da $x_{2i} = y_i$ für alle i gilt:

- $x_i = y_i$ gdw. $i \geq t$ und $l \mid (2i - i) = i$, und der Kleinste Index ist $i = t + (-t \text{ REM } l) < t + l$ falls $t > 0$ und $i = l$ falls $t = 0$.

★ Pollard's ϱ-Methode zur Faktorisierung von N:
Erzeuge Folge $x_0, x_1, \cdots \in \{0, \cdots N-1\}$ wie folgt:
x_0 wird zufällig gewählt, $x_{i+1} = f(x_i) = x_i^2 + 1 \text{ REM } N$.

- Sei p Kleinste Primzahl die N teilt $\rightsquigarrow x_{i+1} \equiv x_i^2 + 1 \bmod p$ für $i \geq 0$. Kollision mod p kann nach $O(\sqrt{p})$ Schritte erwartet werden. Verwende hierfür FLOYD'S-ALG.

Pollards ϱ-Methode zur Faktorisierung

3. Pollard_ϱ_Faktorisierung

{Eingabe: $N \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, weder Prim noch perfekte Potenz}

{Ausgabe: entweder echter Teiler oder „Failure“}

begin

1 Wähle $x_0 \in \{0, \cdots, N-1\}$ zufällig; $y_0 \leftarrow x_0$; $i \leftarrow 0$;

2 **repeat**

3 $\quad i \leftarrow i+1$; $x_i \leftarrow x_{i-1}^2 + 1 \bmod N$; $y_i \leftarrow (y_{i-1}^2+1)^2 + 1 \bmod N$;

4 $\quad g \leftarrow \mathrm{GGT}(x_i - y_i, N)$;

if $1 < g < N$ **then return** g

else if $g = N$ **then return** „Failure“

end

7.8 Satz Ist p der kleinste P-Teiler von $N \rightsquigarrow$ erwartete Laufzeit ersten Teiler zu finden $O(\sqrt{p}M(\log N)\log\log N)$.

Vollständige Faktorisierung $S_2(N)^{1/2}0^{\sim}(\log^2 N) \approx 0\ (N^{1/4})$

Pollards S-Methode zur Faktorisierung (Forts.)

7.9 Beispiel $N = 82123 \quad x_0 = 631$

i	$x_i \bmod N$	$x_i \bmod 41$	$y_i \bmod N$	GGT $(x_i - y_i, N)$
0	631	16	631	N
1	69670	11	28986	1
2	28986	40	13166	1
3	69907	2	40816	1
4	13166	5	20459	1
5	64027	26	6685	1
6	40816	21	75835	1
7	80802	32	17539	41
8	20459	0		
9	71874	1		
10	6685	2		

$$N = 41 \cdot 2003$$
$$x_{38} \equiv 4430 \equiv x_{143} \bmod N$$

Dixon's Random Square Faktorisierungsmethode

- Erstes Verfahren mit Aufwand kleiner als $\exp(\varepsilon \cdot \log N)$ für jedes $\varepsilon > 0$
  Idee: Die Gleichungen
  $$N = s^2 - t^2 = (s+t)(s-t)$$
  $$N = a \cdot b = \left(\tfrac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{a-b}{2}\right)^2$$
  Beschreiben Bijektion zwischen Faktorisierungen von N und Darstellungen von N als Differenz zweier Quadrate.

- Naiver Faktorisierungsalgorithmus: Für $t = \lceil\sqrt{N}\rceil, \lceil\sqrt{N}\rceil + 1, \cdots$
  Teste ob $t^2 - N$ perfektes Quadrat ist.
  Findet man solch ein Quadrat so Faktorisierung erfolgreich!

- Gut Falls $N = ab$ mit $|a-b|$ klein, da Laufzeit abhängig von $|a-b|$ ist.
  Fermat kannte dieses Argument: $N = 2027651281 \quad \sqrt{N} \approx 45029$

$$N = 45041^2 - 1020^2 = 46061 \cdot 44021$$

Dixon's Random Square Methode (Forts.)

- Variante: Wähle $k \ll N$ $t = \lceil\sqrt{kN}\rceil, \lceil\sqrt{kN}\rceil + 1, \cdots$ und teste ob $t^2 - kN$ perfektes Quadrat.
  Falls $t^2 - kN = s^2$ so $\mathrm{GGT}(s + t, N)$ ist hoffentlich nichttrivialer Faktor von N, so dass $s \not\equiv \pm t \bmod N$
- Das finden von Relationen der Form $s^2 \equiv t^2 \bmod N$ auf dieser Weise ist für große N sehr unwahrscheinlich.

7.10 Beispiel

$N = 2183$ Angenommen wir haben folgende Kongruenzen

$$453^2 \equiv 7 \bmod N \qquad 1014^2 \equiv 3 \bmod N \qquad 209^2 \equiv 21 \bmod N$$

Dann $(453 \cdot 1014 \cdot 209)^2 \equiv 21^2 \bmod N$ oder

$$687^2 \equiv 21^2 \bmod N \qquad \rightsquigarrow$$

$37 = \mathrm{GGT}(687 - 21, N)$ $\qquad$ $59 = \mathrm{GGT}(687 + 21, N)$

Dieses ist auch die Faktorisierung von N

Dixon's Random Square Methode (Forts.)

- Systematisches Vorgehen:
  Wähle b zufällig und hoffe, dass b^2 REM N Produkt kleiner Primzahlen ist. Sind genügend solcher gefunden, so erhält man eine Kongruenz $s^2 \equiv t^2 \bmod N$. Dann GGT$(s-t, N)$ bzw. GGT$(s+t, N)$
- Faktorisierungsbasis Primzahlen $p_1, \cdots, p_h$ bis zu einer Schranke $B \in \mathbb{R}^+$
  Eine Zahl b heißt B-Zahl falls b^2 REM N (Rest der Division von b^2 durch N) Produkt der P-Zahlen $p_1, \cdots, p_h$ ist.
- Im Beispiel sind 453, 1014, 209 B-Zahlen für jedes $B \geq 7$ und $N = 2183$
- Für eine B-Zahl b sei $b^2 \equiv p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_h^{\alpha_h} \bmod N$ mit $\alpha_1 \cdots \alpha_h \in \mathbb{N}$.
  Assoziere dazu Binären Exponenten Vektor

$$\varepsilon = (\alpha_1 \bmod 2, \alpha_2 \bmod 2, \cdots, \alpha_h \bmod 2) \in \mathbb{F}_2^h$$

- Für B-Zahl b_i, sei $b_i^2 \equiv \prod_{1 \leq i \leq h} p_i^{\alpha_{ij}} \bmod N$

Dixon's Random Square Methode (Forts.)

- Angenommen man hat $b_1, \cdots, b_l$ mit $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_l = 0$ in $\mathbb{F}_2^h$ dann

$$\left(\prod_{1\le i\le l} b_i\right)^2 = \prod_{1\le j\le h} p_j^{\sum_{1\le i\le l}\alpha_{ij}} = \prod_{1\le j\le h} p_j^{2\gamma_j} = \left(\prod_{1\le j\le h} p_j^{\gamma_j}\right)^2 \bmod N$$

wobei $\gamma_j = \frac{1}{2}\sum_{1\le i\le l}\alpha_{ij}$ (durch 2 teilbar nach Voraussetzung)

- Dann $s^2 \equiv t^2 \bmod N$ mit

$$s = \prod_{1\le i\le l} b_i \qquad t = \prod_{1\le j\le h} p_j^{\gamma_j}$$

! Man benötigt nicht mehr als $h+1$ B-Zahlen, d.h. $l \le h+1$, da jede Menge von $h+1$ Vektoren in $\mathbb{F}_2^h$ linear abhängig ist.

Dixon's Random Square Methode (Forts.)

! Die Hoffnung ist nun s, t gefunden zu haben mit $s \not\equiv \pm t \bmod N$

- Ist N keine Primzahlpotenz mit $r \geq 2$ verschiedene Primfaktoren, so folgt aus Chinesischer-Restsatz, dass jedes Quadrat in $\mathbb{Z}_N^x$ genau 2^r Quadratwurzeln in $\mathbb{Z}_N$ hat.
- Ist somit s eine zufällige Quadratwurzel von t^2 so gilt

$$\text{Prob } \{s \equiv \pm t \bmod N\} = \frac{2}{2^r} \leq \frac{1}{2}$$

- Im Beispiel mit $B = \{2, 3, 5, 7\}$ gilt
  $\varepsilon_1 = (0, 0, 0, 1) \quad \varepsilon_2 = (0, 1, 0, 0) \quad \varepsilon_3 = (0, 1, 0, 1)$
  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$ in $\mathbb{F}_2^4$ und $\gamma_1 = \gamma_3 = 0 \quad \gamma_2 = \gamma_4 = 1$
  $s = 453 \cdot 1014 \cdot 209 \quad t = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^1$

Dixon's Random Square Methode (Forts.)

- Analyse: Sei $L(N) = e^{\sqrt{lnN\ lnln\ N}}$
  Dixon's Random Square Methode faktorisiert eine Zahl N mit erwarteten Wert von $O\ (L(N)^{\sqrt{9/2}})$ Wortoperationen.
- Zu den Kosten des folgenden Dixon's Random Squares Algorithmus:
  - Sei $n = \log N$. Kosten für Basis von Primzahlen $O(h \log^2 h \log\log h)$ Wortoperationen.
  - Teilbarkeitstest $O(h \cdot M(n))$.
  - Kosten für eine Iteration in Schleife 2 sind $O(M(n) \log n)$, für GGT, $O(M(n))$ Wortoperationen für $b^2 \mathrm{REM} N$ und $O((h+n)M(n))$ Operationen um B-Zahl Check durchzuführen.
  - Ist k die Anzahl der Iterationen von 2, so kosten $O(k(h+n)M(n))$ Wortoperationen.
  - Lösen des linearen Gleichungssystems: $O(h^3)$
  - $\rightsquigarrow O(h^3 + k(h+n)M(n))$ Wortoperationen.

Dixon's Random Squares Methode zur Faktorisierung

4. Dixon's_Random_Squares_Faktorisierung
   {Eingabe: Ungerade Zahl $N \geq 3$, weder Prim noch perfekte Potenz $B \in \mathbb{R}^+$}
   {Ausgabe: entweder echter Teiler oder „Failure“}

1 Berechne alle P-Zahlen $p_1, \cdots, p_h \leq B$
  if $p_i \mid N$ für ein $i \in \{1, \cdots, h\}$ **then** return p_i
2 $A \leftarrow \emptyset$ //Initialisiere Menge der B-Zahlen//
  repeat
3 Wähle zufällig $b \in \{2, \cdots, N-2\}$
   $g \leftarrow \mathrm{GGT}(b, N)$ **if** $g > 1$ **then** return g
4 $a \leftarrow b^2$ REM N //Faktorisiere a über $\{p_1, \cdots p_h\}$//
   for $i = 1 \cdots h$ **do** //Bestimme Vielfachheit von p_i in a//
5 $\alpha_i \leftarrow 0$; **while** $p_i \mid a$ **do** $a \leftarrow \frac{a}{p_i}$, $\alpha_i \leftarrow \alpha_i + 1$
6 **if** $a = 1$ **then** $\alpha \leftarrow (\alpha_1, \cdots \alpha_h)$, $A \leftarrow A \cup \{(b, \alpha)\}$
7 **until** $\#A = h + 1$

Dixon's Random Squares Methode zur Faktorisierung

8 Finde verschiedene Paare $(b_1, \alpha^{(1)}), \cdots, (b_l, \alpha^{(l)}) \in A$ mit $\alpha^{(1)} + \cdots + \alpha^{(l)} \equiv 0 \bmod 2$ in $\mathbb{F}_2^h$ für ein $l \geq 1$ durch lösen eines $(h+1) \times h$ System von linearen Gleichungen in $\mathbb{F}_2$

9 $(\gamma_1, \cdots, \gamma_h) \leftarrow \frac{1}{2}(\alpha^{(1)} + \cdots + \alpha^{(l)})$;

$s \leftarrow \prod_{1 \leq i \leq l} b_i$; $t \leftarrow \prod_{1 \leq j \leq h} p_j^{\gamma_j}$; $g \leftarrow \mathrm{GGT}(s+t, N)$;

if $g < N$ **then** **return** g **else return** „Failure"

! Abschätzung für k und geeignete Wahl von B siehe vz. Gathen/Gerhard 19.5 (S.527 - 530)

- Fixiere $r \in \mathbb{N}$, $n = ln\ N$ $B = N^{1/2r}$, d.h. $ln\ B = N/2r$, $h = \Pi(B) > B/ln\ (B)$ für $B \geq 59$ nach PZ-Satz
- Die Erwartete Anzahl k erfüllt dann $\frac{N}{h^{2r}}(2r)! < n^{2r} \rightsquigarrow$ Schranke.
- Sei $\Psi(x,y) = \{a \in \mathbb{N} : 1 \leq a \leq x, \forall p \text{ prim } p \mid a \Rightarrow p \leq y\}$ die Menge der y glatten Zahlen. b ist B-Zahl gdw. $b^2 REM\ N \in \Psi(N, B)$.

Pollard's $p-1$ Methode

- Als Einführung in der Methode der elliptischen Kurven. Annahme N hat Primfaktor p, mit $p-1$ B-Zahl, d.h. Primpotenzen $l^e \mid p-1$ erfüllen $l^e \leq B$, (sie sind also B zahm für geeignet gewähltes B).

  5. Pollard's_$p-1$_Faktorisierung

  $\{$Eingabe: $N \geq 3$, $B > 0\}$
  $\{$Ausgabe: entweder echter Teiler von N oder „Failure“$\}$

  1 $k \leftarrow \mathrm{KGV}\{i : 2 \leq i \leq B\}$
  2 Wähle $a \in \{2, \cdots N-2\}$ zufällig
  3 $b \leftarrow a^k \bmod N$; $d \leftarrow \mathrm{GGT}(b-1, N)$;
  4 **if** $1 < d < N$ **then return** d **else return** „Failure“

- Hoffnung d ist nichttrivialer Teiler von N. Die Annahme garantiert $a^k \equiv 1 \bmod p$, da $p-1 \mid k$, d.h. $d > 1$. Um $d < N$ zu garantieren, genügt es, wenn N einen weiteren Primfaktor q hat, mit $a^k \not\equiv 1 \bmod q$
- Grundlage ist die Gruppe $G = \mathbb{Z}_N^x$. Hoffnung ist $|G \bmod p|$ ist B-Zahl.

Lentra's Elliptische-Kurven Methode (1987)

- Statt $G = \mathbb{Z}_N^x$, werden Gruppen von Elliptischen-Kurven und deren Ordnung als Testkandidat B-Zahl zu sein, verwendet.
  Algebraische Geometrie
- Sei F Körper mit char $\neq 2, 3$ und $x^3 + ax + b \in F[x]$ quadratfrei. Dann ist

$$E = \{(u, v) \in F^2 : v^2 = u^3 + au + b\} \cup \{O\} \subseteq F^2 \cup \{O\}$$

  eine elliptische Kurve über F. O Punkt im Unendlichen von E.
- $x^3 - x = x(x-1)(x+1), x^3 - x + b$ definieren elliptische Kurven.
- Gruppenstruktur:E wird zu einer abelschen Gruppe mit $+$ wie folgt:: Ist $P = (u, v) \in E$, so sei der Spiegelpunkt $-P = (u, -v)$ wobei $-O = O$ Sind $P, Q \in E$, so schneidet die Gerade durch P, Q E in Punkt S. Dann $R = P + Q = -S$. Spezialfälle $P = Q$ (Tangente), $P + O = -(-P) = P$ und $P + (-P) = -O = O$.

Lentra's Elliptische-Kurven Methode (1987)

- Die Größe elliptischer Kurven über $\mathbb{F}_q$::
- Sei E elliptische Kurve über $\mathbb{F}_q$, $char > 3$, dann gilt $\mid E \mid \leq 2q+1$.
- Hasse's Schranke:: $\mid\mid E \mid -(q+1) \mid \leq 2\sqrt{q}$
- Sei $y^2 = x^3 + x$ mit $q = 7$. E enthält $(0,0),(1,0),(4,2),(4,5),(5,1),(5,6),(6,0),O$. Die Gruppe wird von $(4,2)$ mit Ordnung 4 und $(0,0)$ mit Ordnung 2 erzeugt, d.h. isomorph zu $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$.
- $\mid E \mid \cdot P = O$. Die Ordnung eines Elements ist wie üblich definiert.
- Rationale Funktionen zur Berechnung der Summe $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)$

$$x_1 \neq x_2 \rightsquigarrow x_3 = (\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1})^2 - x_1 - x_2, y_3 = -y_1 + \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \cdot (x_1 - x_3)$$

$$(x_1,y_1) = (x_2,y_2) \rightsquigarrow x_3 = (\frac{3x_1^2+a}{2y_1})^2 - 2x_1, y_3 = -y_1 + \frac{3x_1^2+a}{2y_1} \cdot (x_1 - x_3)$$

Lenstra's Elliptische-Kurven Faktorisierungsalgorithmus

5. Lenstra's_Elliptic_Curve_Faktorisierung

{Eingabe: Ungerade Zahl $N, 3 \nmid N$, keine perfekte Potenz, $B \in \mathbb{R}^+, min_{p|N} \leq C$}

{Ausgabe: entweder echter Teiler oder „Failure“}

1 Wähle zufällig $(a, u, v) \in \{0, ..., N-1\}^3$;
$b \leftarrow v^2 - u^3 - au; g \leftarrow GGT(4a^3 + 27b^2, N)$;
if $1 < g < N$ **then return** g **else if** $g = N$ **return** „Failure“;

2 //Sei E die "elliptische Kurve"über $\mathbb{Z}_N$ mit Koeffizienten a, b//
Berechne die Primzahlen $p_1 = 2 < ... < p_h \leq B$;
$P \leftarrow (u, v); Q \leftarrow P; t \leftarrow 1$;

3 **for** $1 \leq j \leq h$ **do**
$e_i \leftarrow \lfloor \log_{p_i}(C * 2\sqrt{C} + 1) \rfloor$;
for $0 \leq j < e_i$ **do** //Invarianten: $t = p_i^j \prod_{1 \leq r \leq i} p_r^{e_r}$ und $Q = tP$//

4 Versuche $p_i Q$ in E über $\mathbb{Z}_N$ zu berechnen;
if ein Zähler w Nullteiler in $\mathbb{Z}_N$ **then return** $GGT(w, N)$
else $Q \leftarrow p_i Q; t \leftarrow p_i t$;

5 **return** „Failure“

Analyse von Lenstra's Faktorisierungsalgorithmus

- Benötigt wird: E mod p ist elliptische Kurve für jeden Primteiler $p \mid N$. E ist i.A. keine Gruppe mit $+$ definiert durch die Gleichungen, d.h die rationalen Ausdrücke müssen nicht $\bmod N$ wohldefiniert sein.
- Sei $p \mid N$ prim, dann $p \nmid 4a^3 + 27b^2$, da sonst Ausgang in 1. Sei E_p die Reduktion von E mod p, d.h. die elliptische Kurve über $\mathbb{Z}_p$ mit Koeffizienten $a, b \bmod p$. Zu $P \in E$ sei P_p der korrespondierende Punkt $P \bmod p$. O_p korrespondiert zu O und für alle $P \in E \setminus \{O\}$ gilt $P_p \neq O_p$.
- Bis der Teiler p in Schritt 4 gefunden wird ($p \mid GGT(w, N)$), implementieren die Berechnungen die Arithmetik von E_p in folgenden Sinn:: Ein partielles Ergebnis $Q = tP$ in E liefert $(\bmod p)$ das partielle Ergebnis $Q_p = tP_p$ in E_p, d.h. $tP_p = (tP)_p$.
- Eine Faktorisierung wird gefunden wenn für zwei Primteiler p, q von N ein Vielfaches der Ordnung von P_p in E_p erreicht wird, der nicht Vielfaches der Ordnung von P_q in E_q ist.

Analyse von Lenstra's Faktorisierungsalgorithmus

7.11 Lemma Angenommen (E, P) ist gewählt, $p, q \mid N$ verschieden, I sei der größte Primfaktor der Ordnung von P_p in E_p, $p \leq C$, $\mid E_p \mid$ sei B-glatt und $I \nmid \mid E_q \mid$. Dann wird N vom Algorithmus faktorisiert.
Beweis: Sei $k = \prod_{1 \leq r \leq h} p_r^{e_r}$, e_r wie in 3.

- Da $\mid E_p \mid$ B-glatt ist und $p \leq C$, folgt aus der Hasse Schranke:: $\mid E_p \mid \mid k$.
- Sei d die Ordnung von P_p in E_p. Dann $d \mid \mid E_p \mid$ und somit $I \leq B$ und $d \mid k$.
- Sei $p_i = I$ und e der Exponent von I in d, d.h. $1 \leq e \leq e_i$. Ist $j = e - 1$ so

  $t = I^{e-1} \prod_{1 \leq r < i} p_r^{e_r}$ und $Q = tP$ vor Schritt 4. $t \not\equiv 0 \bmod d$ und $It \equiv 0 \bmod d$

  Somit $Q_p = tP_p \neq O_p$ und $IQ_p = ItP_p = O_p$. Wir zeigen, der Algorithmus kommt **nicht** bis zu dieser Stelle. Angenommen $IQ = O$, dann auch $IQ_q = (ItP)_q = O$. Da aber $I \nmid \mid E_q \mid$ muss bereits $Q_q = tP_q = O_q$ gelten und somit $Q = O$. Aber dann $Q_p = O_p$ ↯

Analyse von Lenstra's Faktorisierungsalgorithmus

7.12 Satz (Lenstra) Sei p Primzahl, $S \subseteq (p+1-\sqrt{p}, p+1+\sqrt{p}) \subset \mathbb{N}$ und seien $a, b \in \mathbb{F}_p$ zufällig gewählt.
Sei

$$E_p = \{(u,v) : v^2 = u^3 + au + b\} \cup \{O\}$$

eine elliptische Kurve über $\mathbb{F}_p$. Dann gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}^+$ mit

$$prob\{\mid E_p \mid \in S\} \geq \frac{c \mid S \mid}{\sqrt{p}\log p}$$

7.13 Folgerung Sei $p \leq C$ ein Primteiler von N und $\sigma = \mid \{B-\text{glatte Zahlen in } (p+1-\sqrt{p}, p+1+\sqrt{p})\} \mid$. Dann erfüllt die Anzahl M der Tripel $(a,u,v) \in \{0,...,N-1\}^3$ für die der Algorithmus N faktorisiert

$$\frac{M}{N^3} \geq \frac{c_1\sigma}{\sqrt{p}\log p} \text{ für ein } c_1 \in \mathbb{R}^+$$

Laufzeitanalyse von Lenstra's Faktorisierungsalgorithmus

- Die Laufzeit hängt wesentlich ab von der Anzahl der Auswahlen die der Algorithmus benötigt um mit großer Wahrscheinlichkeit erfolgreich zu faktorisieren (Siehe Seite 540 vzG,G).
- **Vermutung**: Für $x, u \in \mathbb{R}^+$ und $d \in \mathbb{Z}$ zufällig gewählt aus Intervall $(x - \sqrt{x}, x + \sqrt{x})$ gilt

$$prob\{d \text{ ist } x^{\frac{1}{u}} \text{ glatt}\} = u^{-u(1+o(1))}$$

- Unter der Annahme der Vermutung, kann man eine erwartete Laufzeitschranke von

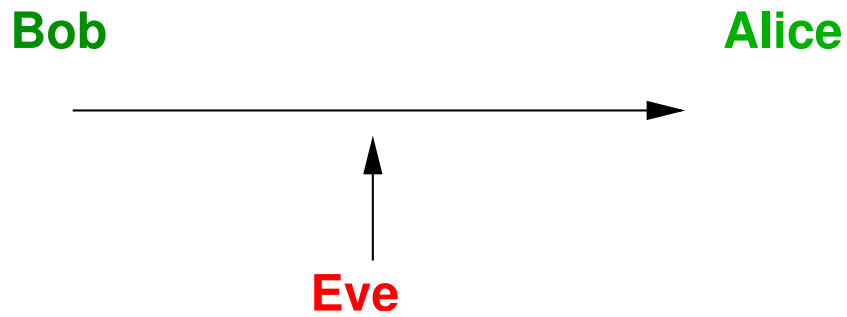
$$L(p)^{\sqrt{2}+o(1)} \text{ wobei } L(p) = e^{\sqrt{lnplnlnp}}$$

zeigen. Praxis: Wähle C "klein" und bestimme $B = e^{\sqrt{(lnClnlnC)/2}}$. Verdopple C falls nicht erfolgreich.

Moderne Anwendung: Public Key Cryptography

Cryptosysteme

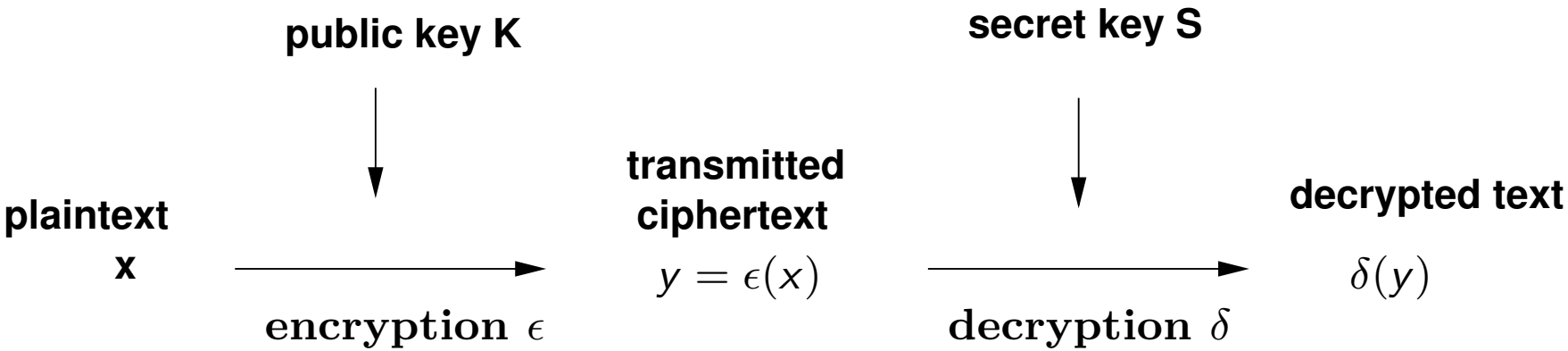
- Szenario:: Bob will Nachricht an Alice senden, so dass ein Lauscher (Eve) die Nachricht nicht verstehen kann. Dies wird durch eine Chiffrierung der Nachricht erreicht, so dass nur Alice, mit den richtigen Schlüssel, die Nachricht leicht entschlüsseln kann aber Eve ohne den richtigen Schlüssel die Nachricht nicht verstehen kann.



- Klassische Chiffrierungen: Caesar Chiffrierung: Permutationen vom Alphabet mit 26 Buchstaben oder One -Time Pad: Um eine Nachricht der Länge n zu Verschlüsseln wird ein zufälliges Wort gleicher Länge buchstabenweise mod26 aufaddiert. **Symmetrisch**.

Public Key Cryptosysteme: Diffie & Hellman

- Idee: Zwei verschiedene Schlüssel K für die Verschlüsselung und S für die Entschlüsselung, beide "einfach" aber Entschlüsselung ohne S "hart".



K kann öffentlich bekannt sein. Da $x = \delta(y) = \delta(\epsilon(x))$ ist δ Inverse von ϵ. Funktionen die leicht zu berechnen sind aber eine harte Inverse besitzen heißen **trapdoor Funktionen**. K ist der öffentliche Schlüssel und S der geheime Schlüssel. Hier genügen n öffentliche-geheime Schlüsselpaare um sichere Kommunikation zwischen je zwei Partnern unter n zu realisieren.

Public Key Cryptosysteme: Anforderungen

- Ein Cryptosystem gilt als geknackt, wenn es ein Boolsches Prädikat $B(x)$ gibt - z.B. die Parität von x falls x eine Zahl ist - und ein pol. Zeit probabilistischer Algorithmus der $B(x)$ mit einer etwas besseren Wahrscheinlichkeit als Zufallsraten berechnet.
  Andernfalls gilt das System als semantisch sicher.
- Was bedeutet ein Cryptosystem ist "hart"? Möglichkeiten::
  - Der Erfinder (oder niemand) kennt keinen pol. Zeit Algorithmus.
  - Falls das System geknackt wird, so wird möglicherweise ein bekanntes "harte" Problem gelöst werden.
  - Falls das System geknackt wird, so ist ein bekanntes "harte" Problem gelöst.
  - Falls das System geknackt wird, so ist eine pol. Zeit Lösung für ein **NP**-vollständiges Problem gefunden.
  - Es gibt nachweisbar keinen (prob.) pol. Zeit Algorithmus wie oben.

Das RSA Cryptosystem

Rivest, Shamir & Adleman (1978) basiert auf die vermeintliche "Härte" der Faktorisierung in $\mathbb{Z}$. Das Prinzip ist einfach: Alice wählt zufällig zwei große Primzahlen (etwa 150 stellig) $p \neq q$ und setzt $N = pq$. Jeder der N faktorisieren kann, kann auch das System knacken.
Nachrichten werden als Folgen von Elementen aus $\mathbb{Z}_N = \{0, 1, ..., N-1\}$ kodiert. Verwendet man als Alphabet $\Sigma = \{A, ..., Z\}$ mit $\mid \Sigma \mid = 26$, so kann man Nachrichten mit bis zu $212 = \lfloor log_{26} 10^{300} \rfloor$ Buchstaben mit einer Zahl darstellen, durch Verwendung der 26-adischen Darstellung. Etwa "CAESAR" wird dargestellt durch

$$2 \cdot 26^0 + 0 \cdot 26^1 + 4 \cdot 26^2 + 18 \cdot 26^3 + 0 \cdot 26^4 + 17 \cdot 26^5 = 200233302466 \in \mathbb{Z}_N$$

Will Alice Nachrichten von Bob erhalten, so wählt sie zufällig $e \in \{2, ..., \varphi(N) - 2\}$ mit $GGT(e, \varphi(N)) = 1, (\varphi(N) = (p-1)(q-1))$. Dann berechnet sie $d \in \{2, ..., \varphi(N) - 2\}$ mit $de \equiv 1 \bmod \varphi(N)$.
$K = (N, e)$ ist ihr öffentlicher Schlüssel und $S = (N, d)$ ihr geheimer Schlüssel.

Das RSA Cryptosystem (Fort.)

- Die Ver- und Entschlüsselungsfunktion $\epsilon, \delta : \mathbb{Z}^\times \to \mathbb{Z}^\times$ werden durch $\epsilon(x) = x^e$ bzw. $\delta(y) = y^d$ definiert.
- Bob schickt eine Nachricht x an Alice in dem er $y = \epsilon(x)$ berechnet und versendet. Alice berechnet dann $\delta(y)$ mit ihren geheimen Schlüssel.
- Ist $u \in \mathbb{Z}$ mit $de - 1 = u\varphi(N)$, so gilt

$$(\delta \circ \epsilon)(x) = x^{de} = x^{1+u\varphi(N)} = x(x^{\varphi(N)})^u \equiv x \bmod N$$

  (Man sollte darauf achten, dass $GGT(x, N) = 1$, da sonst eine Faktorisierung von N ermöglicht wird. Dies ist aber sehr unwahrscheinlich)
- RSA kann auch zur Authentifizierung verwendet werden, d.h der Sender muss nachweisen, dass es seine Nachricht ist.$\rightsquigarrow$ Digitale Signaturen.

Das RSA Cryptosystem (Fort.)

- Bob versendet entweder $y = \delta_B(x)$ oder $y = \epsilon_A(\delta_B(x))$, da Alice ϵ_B kennt kann sie diese Nachrichten entschlüsseln.

7.14 Satz Folgende Probleme sind polynom-Zeit äquivalent:

- N zu faktorisieren
- $\varphi(N)$ zu berechnen
- Berechnung von $d \in \mathbb{N}$ mit $de \equiv 1 \bmod \varphi(N)$ aus $K = (N, e)$

Das Diffie-Hellman Schlüsselaustauschprotokoll (1976)

- **Zweck**: Protokoll zum Austausch von Schlüsseln zum Versenden von Nachrichten mit einem symmetrischen Cryptosystem.
- sei $q \in \mathbb{N}$ eine große Primzahlpotenz (etwa 1000 bits) und g ein Erzeuger (Generator) von $\mathbb{F}_q^\times$. Dann ist $\mathbb{F}_q^\times$ isomorph zur additiven (zyklischen) Gruppe $\mathbb{Z}_{q-1}$ via $g^i \longleftrightarrow i$.
- Das Protokoll arbeitet wie folgt:
  - Alice und Bob einigen sich auf q und g die öffentlich sein können.
  - Alice wählt für sich $a \in \mathbb{Z}_{q-1}$, berechnet und sendet $u = g^a \in \mathbb{F}_q^\times$ an Bob.
  - Bob wählt für sich $b \in \mathbb{Z}_{q-1}$, berechnet und sendet $v = g^b \in \mathbb{F}_q^\times$ an Alice.
  - Alice und Bob berechnen $v^a = g^{ab} = u^b$ und benützen dies als gemeinsamen Schlüssel.

Das Diffie-Hellman Schlüsselaustauschprotokoll: Probleme

- Problem 1: Diffie-Hellman Problem:: DH

$$\text{Gegeben } g^a, g^b \in \mathbb{F}_q^\times, \text{ berechne } g^{ab}.$$

- Problem 2: Diskreter Logarithmus Problem:: DL

$$\text{Gegeben } g^a \in \mathbb{F}_q^\times, \text{ berechne } a.$$

- Es wird vermutet, dass DH ein hartes Problem ist. Die bisher schnellsten Algorithmen haben Laufzeiten wie die Faktorisierung in $\mathbb{Z}$. Scheint nicht NP-vollständig zu sein. Ein Lauscher der q, g, u, v kennt muss DH lösen um g^{ab} (den Schlüssel) zu berechnen. Dies ist pol-reduzibel auf DL (die Umkehrung ist nicht bekannt).
- Die beste Schranke für die Berechnung von DL in $\mathbb{F}_q^\times$ ist $exp(O((nlog^2 n)^{1/3}))$ Wortoperationen mit $n \approx log_2 q$.

Das ElGamal Cryptosystem

- Wie gehabt $\mathbb{F}_q^\times$ groß und g Generator.
- Um Nachrichten von Bob zu erhalten wählt Alice zufällig $S = b \in \mathbb{Z}_{q-1}$ als ihr geheimer Schlüssel und gibt $K = (q, g, g^b)$ als ihr öffentlicher Schlüssel bekannt.
- Will Bob eine Nachricht x an Alice senden, wählt er zufällig $k \in \mathbb{Z}_{q-1}$, berechnet g^k und xg^{kb} und sendet $y = (u, v) = (g^k, xg^{kb})$ an Alice.
- Alice berechnet $x = v/u^b$
- Die Berechnung von x aus y ohne Kenntnis von S ist pol Zeit äquivalent zu DH.

Rabin's Cryptosystem

- Basiert auf die Härte der Berechnung von Quadratwurzeln modulo $N = pq$, hierbei sind p, q Primzahlen wie bei RSA.
- Die Faktorisierung von N kann auf die Berechnung von Quadratwurzeln wie folgt reduziert werden: Wähle $x \in \mathbb{Z}_N$ und berechne $y = \sqrt{x^2}$. Dann $x^2 \equiv y^2 \bmod N$ oder $pq = N \mid (x+y)(x-y)$. Ist $x \not\equiv \pm y \bmod N$, so erhält man eine Faktorisierung von N (Siehe Dixons's random square A).
- Um eine Nachricht x an Alice zu senden, verwendet Bob ihr öffentlicher Schlüssel N und sendet $x^2 \bmod N$. Alice berechnet die zwei Quadratwurzeln von y mod p und q mit EDF und kombiniert sie mit CRA. Es gibt Tricks um mit den 4 Möglichkeiten umzugehen.
- System ist anfällig für aktive Attacken: Falls Eve ein zufälliges x wählt und Alice dazu bringt eine Nachricht $y \equiv x^2 \bmod N$ zu signieren, in dem sie die Quadratwurzel z von y mod N zurückgibt, so ist mit Wahrscheinlichkeit $1/2$, $GGT(x-z, N)$ ein echter Teiler von N.

Cryptosystem die auf elliptische Kurven basieren

- Die Idee ist analog zum ElGamal System, man verwendet an Stelle von $\mathbb{F}_q^\times$ die additive Gruppe einer elliptischen Kurve E über $\mathbb{F}_q$.
- Die Kurve E und ein Punkt $P \in E$ sind öffentlich. Sei n die Ordnung von P in E.
- Alice wählt zufällig $a \in \{2, ..., n-2\}$ und gibt aP bekannt.
- Wenn Bob eine Nachricht $(m_1, m_2) \in \mathbb{F}_q^2$ an Alice senden, so wählt er ein zufälliges k, berechnet $kP = (r_1, r_2)$ und $k \cdot aP = (s_1, s_2)$ und sendet $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (r_1, r_2, s_1 m_1, s_2 m_2) \in \mathbb{F}_q^4$ an Alice.
- Alice berechnet $a \cdot (r_1, r_2) = a \cdot kP = (s_1, s_2)$ und berechnet die Nachricht als $(m_1, m_2) = (s_1^{-1} y_3, s_2^{-1} y_4)$.
- Kommerzielle Implementierung auf Chip mit $\mathbb{F}_{2^{155}}$.

Inhalt Kapitel 8

Polynomideale und Gröbner-Basen
- Motivation: Buchberger's Algorithmus
- Reduktionstechniken zur Lösung des Wortproblems
- Termordnungen und multivariate Division mit Rest: Reduktion in $K[x_1, \ldots, x_n]$
- Polynom-Reduktion
- Längen von Reduktionsketten
- Term-Ideale und Hilbert's Basissatz
- Gröbnerbasen und S-Polynome
- Buchberger's Algorithmus
- Anwendungen von Gröbner Basen
- Eliminationseigenschaften - Polynomgleichungen (Syzygien)
- Zur Komplexität der Berechnung von G-Basen

Motivation: Buchberger's Algorithmus

Polynomringe in mehreren Variablen. Werkzeug zur Modellierung vieler Probleme aus der (Alg)-Geometrie, Robotik (eukl. Geometrie), Invarianten, Singularitäten.
Polynomideale: $\{p_1, \ldots, p_k\} \subseteq R[x_1, \ldots, x_n] = \mathfrak{R}$, $\langle p_1, \ldots, p_k \rangle_{\mathfrak{R}}$ Ideal.
Wortproblem: $p \in \mathfrak{R}$ gilt $p \in \langle p_1, \ldots, p_k \rangle$.
Gegebenenfalls berechne Darstellung

$$p = \sum_{i=1}^{k} f_i p_i \text{ mit } f_i \in \mathfrak{R}$$

Division durch $\langle p_1, \ldots, p_k \rangle$ mit Rest: $p = \sum_{i=1}^{k} f_i p_i + \text{Rest}$.

- Polynomideale als Kern von Homomorphismen
- Rechnen im Quotientenring

Buchberger's Algorithmus

- z. B. in $\mathbb{Q}[x, y, z]$
  - $p_1 = x^3yz - xz^2$
  - $p_2 = xy^2z - xyz$
  - $p_3 = x^2y^2 - z^2$

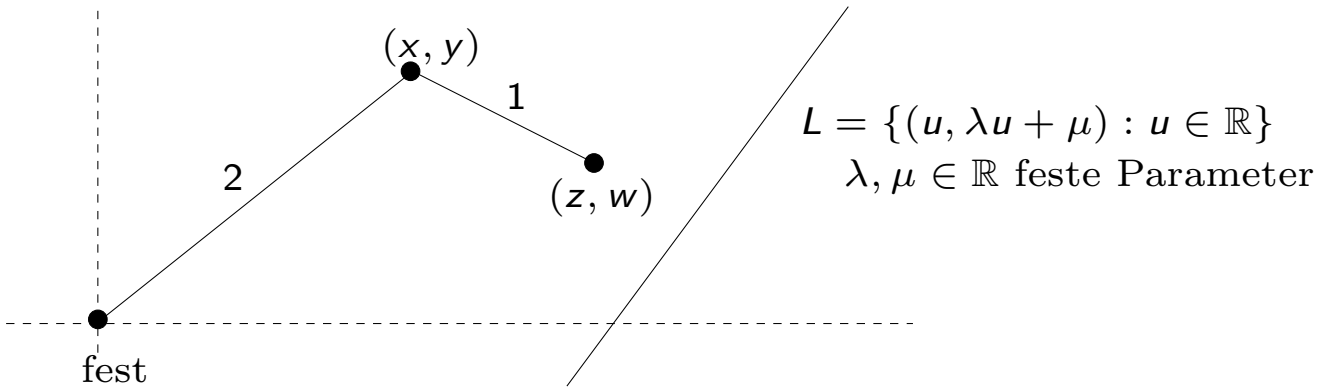
  Frage: Liegt $q = x^2yz - z^3 \in \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$.

  Gegebenenfalls finde $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{Q}[x, y, z]$ mit $q = \sum_{i=1}^{3} f_i p_i$.
- Spezialfall vom O-Äquivalenzproblem:

  $q \approx 0 \bmod \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$
  $\approx$ Kongruenz, die von $\mathfrak{i} = \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ induziert wird.
- $q_1 \approx_{\mathfrak{i}} q_2 \text{ gdw } q_1 - q_2 \in \mathfrak{i}$

Beispiele

8.1 Beispiel Einfacher Roboter



- Die möglichen Positionen $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ des Roboters sind charakterisiert durch

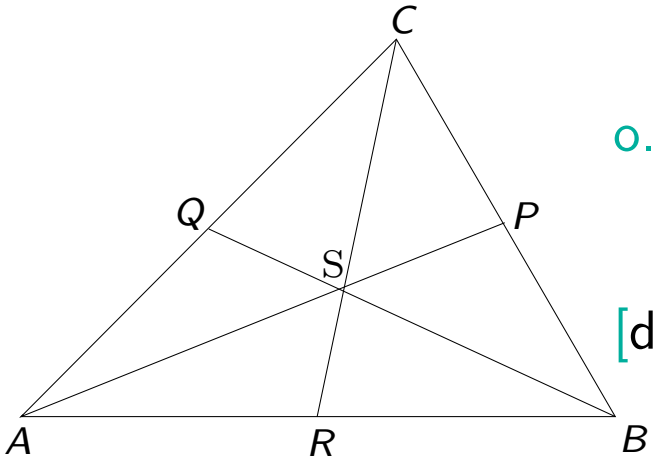
  $(*)$ $\quad x^2 + y^2 = 4 \qquad (z - x)^2 + (w - y)^2 = 1$

- Frage: Kann der Roboter die Linie erreichen?

  $(*)$ muss erfüllt sein und $w = \lambda z + \mu$.

Beispiele

8.2 Beispiel Euklidische Geometrie:: Die drei Medianen eines Δ schneiden sich in einem Punkt. Schnittpunkt drittelt jedes Median.



o.B.d.A.:

$A = (0,0) \quad B = (1,0)$

$C = (x,y) \quad x,y \in \mathbb{R}$

[da Satz invariant unter transl, rot., Skalierung]

- d.h. $P = ((x+1)/2, y/2)$, $Q = (x/2, y/2)$, $R = (1/2, 0)$.
  Sei $S = (u,v)$ Schnittpunkt $\overline{AP}$ und $\overline{BQ}$.
- S liegt auf AP ist äquivalent zur Aussage $\overline{AS}$ und $\overline{AP}$ haben gleiche Steigung, d. h.
  $\frac{u}{v} = \frac{x+1}{y}$ $\qquad f_1 := uy - v(x+1) = 0$
- S liegt auf $\overline{BQ}$ analog $\qquad f_2 := (u-1)y - v(x-2) = 0$

Beispiele (Forts.)

- S liegt auch auf $\overline{CR}$:

$$\begin{aligned} g_1 &:= -2(u-x)y - (v-y)(1-2x) \\ &= -2uy - (v-y) + 2vx = 0 \end{aligned}$$

- S drittelt die drei Medianen: d. h.
  - $(u, v) = \overline{AS} = 2\overline{SP} = (x + 1 - 2u, y - 2v)$
  - $(u - 1, v) = \overline{BS} = 2\overline{SQ} = (x - 2u, y - 2v)$
  - $(u - x, v - y) = \overline{CS} = 2\overline{SR} = (2u - 1, 2v)$
    oder äquivalent dazu:
  - $g_2 := 3u - x - 1 = 0$
  - $g_3 := 3v - y = 0$

- Offenbar gilt $g_1 = -f_1 - f_2$, d. h. $g_1 = 0$ folgt aus $f_1 = f_2 = 0$, d. h. die drei Medianen schneiden sich in S.

Erinnerung: Grundlagen

- Sei F Körper $R = F[x_1, \ldots, x_n]$ Polynomring in n-Variablen. $f_1, \ldots, f_s \in R$. Die Polynome $f_1, \ldots, f_s$ erzeugen ideal I.

$$I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle = \left\{ \sum_{1 \le i \le s} q_i f_i : q_i \in R \right\}$$

$$\begin{aligned} V(I) &:= \{u \in F^n : f(u) = 0 \text{ für alle } f \in I\} \\ &= \{u \in F^n : f_1(u) = \cdots = f_s(u) = 0\} \end{aligned}$$

Die Varietät von I.

- Schreibe $V(f_1, \ldots, f_s)$ statt $V(\langle f_1, \ldots, f_s \rangle)$.
- Fragen über Varietäten bzw. I:
  - Ist $V(I) \neq \varnothing$?
  - Ist $V(I)$ endlich?
  - Wortproblem: $f \in R$ gilt $f \in I$.
  - Trivialitätsproblem: Gilt $I = R$?

Beispiele (Forts.)

Fortsetzung Beispiel

$$g_1 = -f_1 - f_2 \in \langle f_1, f_2 \rangle \subseteq \mathbb{R}[u, v, x, y]$$

d.h. $V(f_1, f_2) \subseteq V(g_1)$

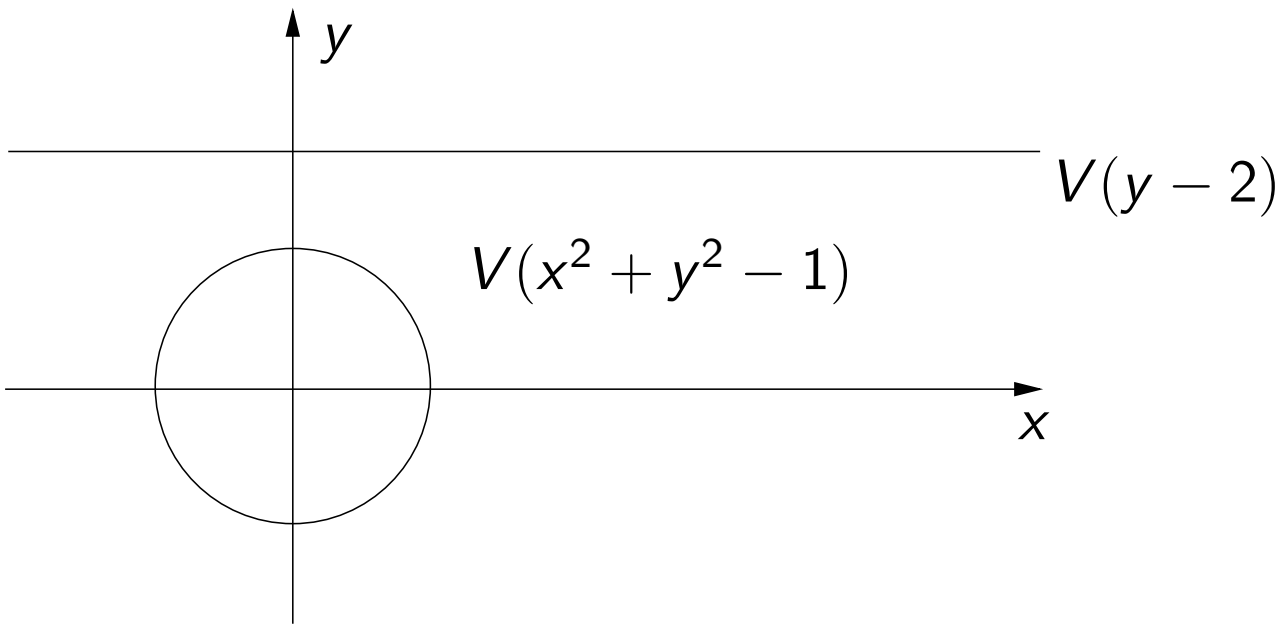
- S drittelt Medianen: d.h. $AS = 2SP \quad BS = 2SQ \quad CS = 2SR$ oder
$$\begin{pmatrix} u - (x + 1 - 2u) \\ v - (y - 2v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - 1 - (x - 2u) \\ v - (y - 2v) \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} u - x - (1 - 2u) \\ v - y + 2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
d.h. $g_2 = 3u - x - 1 = 0$ und $g_3 = 3v - y = 0$
- Zeige also $g_2, g_3 \in \langle f_1, f_2 \rangle$ oder $V(f_1, f_2) \subseteq V(g_2)$ und $V(g_3)$.

Beispiele (Forts.)

8.3 Beispiel

i) Sei $f_1 = x^2 + y^2 - 1 \qquad f_2 = y - 2 \in \mathbb{R}[x, y]$
$I = \langle f_1, f_2 \rangle$. Dann

$$\begin{aligned} V(I) &= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 - 1 = v - 2 = 0\} \\ &= \{(u, 2) \in \mathbb{R}^2 : u^2 = -3\} = \varnothing \end{aligned}$$



Beispiele (Forts.)

- Betrachtet man f_1, f_2 als Polynome in $\mathbb{C}[x, y]$ und $V(I)$ als Varietät über $\mathbb{C}^2$, so

$$V(I) = \{(u, 2) \in \mathbb{C}^2 : u^2 = -3\} = \{(\sqrt{3}i, 2), (-\sqrt{3}i, 2)\}$$

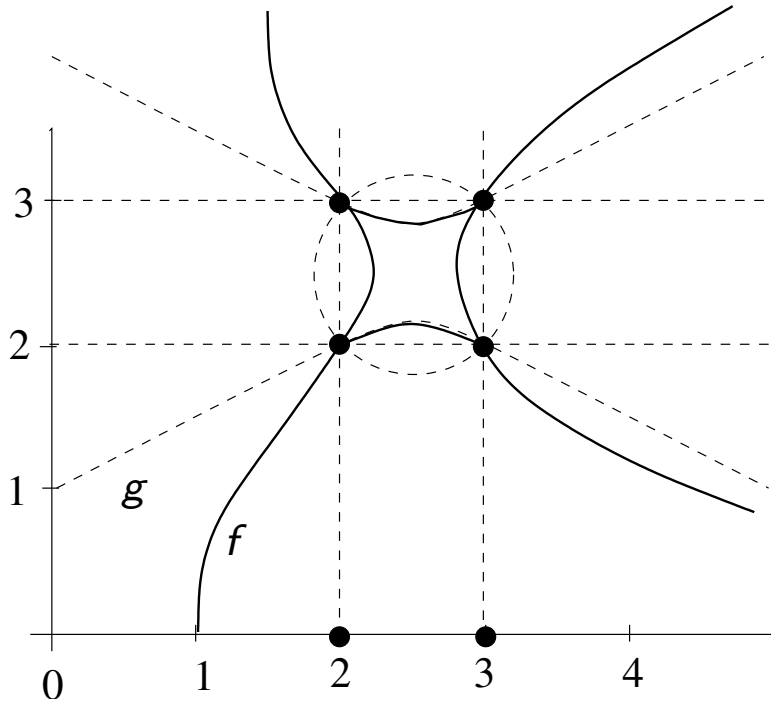
- d.h. 2 Punkte (mit $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$).

- ii) Sei $f = (y^2 + 6)(x - 1) - y(x^2 + 1)$
  $g = (x^2 + 6)(y - 1) - x(y^2 + 1)$ in $\mathbb{C}[x, y]$
  $h = (x - 5/2)^2 + (y - 5/2)^2 - 1/2$

  $I = \langle f, g \rangle$

Beispiele (Forts.)

Maple Implicitplot



$h = -f - g \in I$, d. h. h ist 0 auf $V(I)$.

- $V(I) = \{(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),\left(\frac{1\pm\sqrt{15}i}{2}, 1 \mp \sqrt{15}i\right)\} \quad \subseteq \mathbb{C}^2$

Beispiel (Forts.)

- Sei $h^* = x^2 + y^2 - 5x - 5y + 11 \in \mathbb{C}[x, y]$.

  $V(h^*) \cap \mathbb{R}^2$ ist Kreis mit Mittelpunkt $(5/2, 5/2)$ und größerem Radius als der von $V(h) \cap \mathbb{R}^2$, enthält somit keine Punkte aus $V(I)$. D. h. $h^* \notin I$.
  Es gilt $-f - g - h^* = 1$ in $\mathbb{C}[x, y]$.
  Also $\langle f, g, h^* \rangle = \mathbb{C}[x, y]$ und somit $V(f, g, h^*) = \varnothing$.
  Da jede gemeinsame Wurzel von f, g, h auch Nullstelle von 1 wäre.
  Hilberts Nullstellensatz besagt genau dies:
  $V(J) = \varnothing \rightsquigarrow 1 \in J$ (dies gilt über alg. abg. Körper) aber nicht über $\mathbb{R}$ wie Beispiel i) zeigt.

- Studium der Varietäten + Eigenschaften: alg. Geometrie.
  Gröbner Basen (oder Standard Basen Hironaka) sind spezielle Idealbasen für die viele der obigen Fragen leicht zu lösen sind.

Erinnerung: Grundlagen

- Der Fall $n = 1$, d. h. $F[x]$ ist leicht da $F[x]$ euklidischer Bereich ist (und somit PID Hauptidealring),
  d. h. $\langle f_1, \ldots, f_s \rangle = \langle GGT(f_1, \ldots, f_s) \rangle$, d. h. o.B.d.A. $s = 1$.
  - $f, g \in F[x]$, $f = qg + r$ mit grad $r <$ grad g. Dann
  - $f \in \langle g \rangle$ gdw $r = 0$ und
  - $V(g) = \{u_1, \ldots, u_s\}$, falls $x - u_1, \ldots, x - u_d$ die verschiedenen linearen Faktoren von g in $F[x]$ sind.

  Beachte:
  $\langle f_1, \ldots, f_s \rangle = \langle GGT(f_1, \ldots, f_s) \rangle$ ist nicht mehr gültig für $F[x, y]$. z. B.
  $GGT(x, y) = 1$ in $F[x, y]$ aber $\langle x, y \rangle \neq \langle 1 \rangle = F[x, y]$
  ($F[x, y]$ ist nicht euklidisch $\nexists p, q \quad p \cdot x + q \cdot y = 1$).
- Gröbner Basen erlauben es einige der Eigenschaften zu erhalten (Division mit Rest).
- Erinnerung Reduktionstechniken.

Reduktionstechniken zur Lösung des Wortproblems

$U, \approx$ Äquivalenzrelation auf U (Kongruenz)
$U/\approx$ Struktur effektiv?

$WP(U, \approx) : u, v \qquad u \overset{?}{\approx} v$ Wortproblem.

- Simplifikation, kanonische Funktionen.
  $u \mapsto \mathrm{rep}(u)$ effektiv mit
  $\mathrm{rep} : U \to U \; u \approx v \text{ gdw } \mathrm{rep}(u) = \mathrm{rep}(v)$

- Reduktionsmethode:: Schrittweise: $u \to u'$ mit u' "einfacher" als u.
  $u \to u_1 \to u_2 \to \cdots \to \mathrm{rep}(u)$

- Termersetzungssysteme, Wortersetzungssysteme, Polynomersetzungssysteme

Reduktionstechniken zur Lösung des Wortproblems (Forts.)

- Reduktionsrelation $\rightarrow \subseteq U \times U : a \rightarrow b$
  Komposition $\rightarrow \circ \rightarrow' : \; a \rightarrow \rightarrow' b : a \rightarrow c \rightarrow' b$
  Inverse Relation $\leftarrow : \; a \leftarrow b \text{ gdw } b \rightarrow a$
  Symmetrischer Abschluß $\leftrightarrow : \; \rightarrow \cup \leftarrow$
  Potenz $\rightarrow^i : \; \rightarrow^0 = id \;\; \rightarrow^{i+1} = \rightarrow^i \circ \rightarrow$
  Transitive Hülle $\xrightarrow{+} \; = \; \bigcup_{i=1}^{\infty} \rightarrow^i$
  Reflex. trans. Hülle $\xrightarrow{*} \; = \; \bigcup_{i=0}^{\infty} \rightarrow^i$
  Reflex. trans. symm. Hülle $\xleftrightarrow{*}$ Äquivalenzrelation
  i. Allg. $\rightarrow$ rekursiv
- Spezialfälle: WP Monoide, WP Gruppen
  $B = \langle a, b; ab = 1 \rangle$ monoid (byzykl. Monoid)
  $G = \langle \{a, b\} \mid \{a^2, b^2, aba^{-1}b^{-1}\} \rangle$

Reduktionstechniken zur Lösung des Wortproblems (Forts.)

- R kommutativer Ring $I \subseteq R$ ideal
  $\text{gdw } p, q \in I \rightsquigarrow p - q \in I \qquad p \in I, r \in R \rightsquigarrow rp \in I.$
- $R[x_1, \ldots, x_n]$, R Ring (i.A. kommutativ), $I = \langle p_1, \ldots, p_m \rangle$ von $p_1, \ldots, p_m$ erzeugt Ideal in $R[x_1, \ldots, x_n]$.

  $f, g \in R[x_1, \ldots, x_n]$, $f \equiv g \pmod{I}$
  oder $f - g \in I$, d. h. f, g stellen gleiche Elemente im Quotientenring $R[x_1, \ldots, x_n]/I$ dar.
- Idee: Finde Reduktionsrelation $\rightarrow_I$ mit

$$\overset{*}{\longleftrightarrow}_I \equiv \equiv_I$$

Reduktionstechniken zur Lösung des Wortproblems (Forts.)

- Standardbegriffe für $\longrightarrow$ Reduktionsrelation:
  - $x \longrightarrow$ x ist reduzibel d. h. $\exists y : x \longrightarrow y$
  - $\underline{x}$ x ist irreduzibel oder in Normalform
  - $x \downarrow y$ $(x \uparrow y)$ x, y haben gemeinsamen direkten Nachfolger / Vorgänger, d.h.
    $\exists z : x \longrightarrow z \longleftarrow y$ / $x \longleftarrow z \longrightarrow y$
  - x ist eine $\longrightarrow$ -Normalform von y gdw $y \longrightarrow^* \underline{x}$

Wichtige Eigenschaften von $\longrightarrow$:

- Noethersch:
  Jede Reduktionsfolge terminiert
  d. h. es gibt keine ∞ Folge $x_1 \longrightarrow x_2 \longrightarrow \cdots$
- Church Rosser $a \overset{*}{\longleftrightarrow} b \rightsquigarrow a \downarrow_* b$
- konfluent $a \uparrow^* b \rightsquigarrow a \downarrow^* b$
- lokal-konfluent $a \uparrow b \rightsquigarrow a \downarrow^* b$

Reduktionstechniken zur Lösung des Wortproblems (Forts.)

8.4 Satz $\longrightarrow$ noethersch und Church Rosser, so WP für $\overset{*}{\longleftrightarrow}$ entscheidbar.
d.h. Kanonische Simplifikationsfunktion

$x \longmapsto y$ mit $x \overset{*}{\longrightarrow} \underline{y}$ NF für x (Beachte $\longrightarrow$ effektiv).

8.5 Beispiel

1) Kommutative Halbgruppe mit Erzeugenden a, b, c, f, s. Relationen

$$as = c^2 s \quad bs = cs \quad s = f \quad :: E$$

Reduktionsrelation auf der freien kommutativen Halbgruppe in a, b, c, f, s

$R: \quad s \longrightarrow f \quad cf \longrightarrow bf \quad b^2 f \longrightarrow af$

auf Wörter in $a, b, c, f, s : u \longrightarrow v$, so $ut \longrightarrow vt$.

$\longrightarrow_R$ ist noethersch, Church-Rosser und äquivalent zu E.

$$a^3 bcf^3 =_E a^2 b^4 f s^2$$

Reduktionstechniken: Beispiel (Forts.)

2) I ideal in $\mathbb{Q}[x, y]$ erzeugt von $x^3 - x^2 \qquad x^2y - x^2$

   $\longrightarrow$ Def. auf $\mathbb{Q}[x, y]$: Jedes "Vorkommen" von x^3 oder x^2y kann durch x^2 ersetzt werden.

   Behauptung: $\longrightarrow$ ist noethersch + Church Rosser.

   8.6 Satz

a) $\longrightarrow$ Church Rosser gdw $\longrightarrow$ konfluent.

b) Newman Lemma. Sei $\longrightarrow$ noethersch:
   $\longrightarrow$ konfluent gdw $\longrightarrow$ lokal konfluent.

- Verbunden unterhalb.

Termordnungen

- Partialordnung $<$ auf S ist eine irreflexive transitive Relation $<\subseteq S \times S$.
  d.h. $\neg(\alpha < \alpha) \wedge \alpha < \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$ für alle $\alpha, \beta, \gamma \in S$
  d. h. $<$ ist asymmetrisch.
- Partialordnung ist total, falls $\alpha = \beta \vee \alpha < \beta \vee \beta < \alpha \qquad (\alpha, \beta \in S)$.
- Ordnung ist eine Wohlordnung, falls jede nicht leere Menge ein kleinstes Element besitzt.
- Schreibe $\alpha \leq \beta$, falls $\alpha = \beta$ oder $\alpha < \beta$.
- $<$ auf $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sind total, nur auf $\mathbb{N}$ Wohlordnung.
- $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$: freie kommutative Halbgruppe (Monoid) über X ist die Menge der Terme über X.
  Darstellung der Terme:: Sei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.
  Identifikation $\alpha \to x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \in F[x_1, \ldots, x_n]$,
  d. h. $\mathbb{N}^n \simeq$ Menge der Terme über $X := T(X)$. Operationen: $\cdot, |, KGV, ..$

Termordnungen

8.7 Definition Eine Termordnung auf $T(X)$ ist eine Relation $\prec$ auf $\mathbb{N}^n$ mit

i) $\prec$ ist totale Ordnung.

ii) $\alpha \prec \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \prec \beta + \gamma$ für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$
($s \prec t \Rightarrow su < tu$ für alle $s, t, u \in T(X)$ kompatibel mit Multiplikation)

iii) $\prec$ ist Wohlordnung

$$!(\text{insbesondere } 1 = x_1^0 \cdots x_n^0 \prec t \text{ für alle } t \in T(X) \backslash 1).!$$

- Falls i) gilt so ist iii) äquivalent zu, es gibt keine ∞-fallende Ketten.
- $n = 1$ Standard Ordnung auf $\mathbb{N}$ ist die übliche Grad Ordnung auf $T(X)$.

Beispiel: Termordnungen

8.8 Beispiel 3 Standard Termordnungen

i) Lexikographische Ordnung

- $\alpha \prec_{lex} \beta$ gdw erste nicht Null-Eintrag in $\alpha - \beta$ ist negativ (von links). (Entspricht Präzedenz $x_1 \succ x_2 \succ \cdots \succ x_n$).
- $n = 3 \quad \alpha_1 = (0,4,0)\ \alpha_2 = (1,1,2)\ \alpha_3 = (1,2,1)\ \alpha_4 = (3,0,0)$. Dann $\alpha_1 \prec_{lex} \alpha_2 \prec \alpha_3 \prec \alpha_4$.

ii) Graduierte lexikographische Ordnung:
$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \quad \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$

- $\alpha \prec_{grlex} \beta$ gdw $\sum_{1 \le i \le n} \alpha_i < \sum_{1 \le i \le n} \beta_i$ oder $\left(\sum \alpha_i = \sum \beta_i \wedge \alpha <_{lex} \beta\right)$
  (oft noch mit Gewichtsfunktion $W : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}^+$).
- Es gilt $\alpha_4 \prec_{grlex} \alpha_1 \prec_{grlex} \alpha_2 \prec_{grlex} \alpha_3$.

Beispiel:Termordnungen (Fort.)

iii) Graduierte inverse lexikographische Ordnung:

- $\alpha \prec_{grevlex} \beta$ gdw $\sum_{1 \le i \le n} \alpha_i < \sum_{1 \le i \le n} \beta_i$ oder
  $(\sum \alpha_i = \sum \beta_i \quad \wedge$ am weitesten rechts stehende nicht Null-Eintrag in $\alpha - \beta$ ist positiv).
- Es gilt $\alpha_4 \prec_{grevlex} \alpha_2 \prec_{grevlex} \alpha_3 \prec_{grevlex} \alpha_1$.

$\hookrightarrow$ $n = 1 \quad \prec_{lex} = \prec_{grlex} = \prec_{grevlex}$.

$\hookrightarrow$ $f = 4xyz^2 + 4x^3 - 5y^4 + 7xy^2z \in \mathbb{Q}[x, y, z]$
$lex : 4x^3 + 7xy^2z + 4xyz^2 - 5y^4$
$grlex : 7xy^2z + 4xyz^2 - 5y^4 + 4x^3$.

Termordnungen: Zentrales Lemma

8.9 Lemma

a) $\prec_{lex}, \prec_{grlex}, \prec_{grevlex}$ sind Termordnungen.

b) $s, t \in T[X]$, $s \mid t$ dann ist $s \preceq t$ für jede Termordnung $\prec$.

c) Die antilexikographische Ordnung $\prec_{alex}$ auf $\mathbb{N}^2$ mit
$\alpha \prec_{alex} \beta$ gdw $\beta \prec_{lex} \alpha$ ist Ordnung für die Bedingung iii) nicht gilt.

z. B. $S = \mathbb{N} \times \{0\}$ hat kein kleinstes Element, da
$(0,0) \succ_{alex} (1,0) \succ_{alex} (2,0) \succ \cdots$

Wichtige Begriffe für Polynome und deren Reduktion

8.10 Definition Sei $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_x x^\alpha \in R = K[x_1, \ldots, x_n], f \neq 0.$

$c_\alpha \in F$ (nur endlich viele $\neq 0$), $\prec$ Termordnung.

i) $c_\alpha x^\alpha$ ist Monom in f für $c_\alpha \neq 0$ $\quad$ $\mathrm{Coeff}(f, \alpha) = c_\alpha$.

ii) Der Multigrad von f ist $\mathrm{mdeg}(f) = \max_\prec \{\alpha \in \mathbb{N}^n : c_\alpha \neq 0\}$

iii) $LT(f) := x^{\mathrm{mdeg}(f)} = \max_\prec \{t \in T[X] \mid \mathrm{Coeff}(f, t) \neq 0\}$
Leitterm (Hauptterm) von f.

iv) $LC(f) := c_{\mathrm{mdeg}(f)} \in F \backslash \{0\}$ $\quad$ Leitkoeffizient.

v) $LM(f) = LC(f) \cdot LT(f) \in R$ $\quad$ Leitmonom.

vi) $Red(f) = f - LM(f)$ $\quad$ Redukt von f.

Beispiel

$\hookrightarrow$ $\prec$ induziert noethersche Partialordnung $<<$ auf R: (Beweis!)

- $f << g$ gdw $f = 0$ und $g \neq 0$ oder
- $f \neq 0, g \neq 0 \wedge LT(f) \prec LT(g)$ oder
- $f \neq 0, g \neq 0 \wedge LT(f) = LT(g) \wedge Red(f) << Red(g)$

8.11 Beispiel Sei $f = 4xyz^2 + 4x^3 - 5y^4 + 7xy^2z \in \mathbb{Q}[x, y, z]$

	$\prec_{lex}$	$\prec_{grlex}$	$\prec_{grevlex}$
$\text{mdeg}(f)$	$(3, 0, 0)$	$(1, 2, 1)$	$(0, 4, 0)$
$LC(f)$	4	7	-5
$LT(f)$	x^3	xy^2z	y^4
$LM(f)$	$4x^3$	$7xy^2z$	$-5y^4$

Lemma

8.12 Lemma Sei $\prec$ Termordnung auf $T[X]$, $f, g \in R \backslash \{0\}$.

i) $\operatorname{mdeg}(fg) = \operatorname{mdeg}(f) + \operatorname{mdeg}(g)$
$(LT(fg) = LT(f) \circ LT(g)$ in $T[X])$

ii) $f + g \neq 0$ so $\operatorname{mdeg}(f + g) \leq \max\{\operatorname{mdeg}(f), \operatorname{mdeg}(g)\}$
d. h. $LT(f + g) \leq \max\{LT(f), LT(g)\}$
Gleichheit, falls $\operatorname{mdeg}(f) \neq \operatorname{mdeg}(g)$.

- Verallgemeinerung der Division mit Rest: Reduktion
- $f, f_1, \ldots, f_s \in R$ gesucht Darstellung von f mit $f = q_1 f_1 + \cdots + q_s f_s + r$ mit $q_1, \ldots, q_s, r \in R$.

? Wie bestimmt man q_i, welche Eigenschaften hat r?

Beispiel

8.13 Beispiel

a) Sei $\prec = \prec_{lex}$ $\quad f = xy^2 + 1 \quad f_1 = xy + 1 \quad f_2 = y + 1$

	$xy+1$	$y+1$
xy^2+1	y	
$-(xy^2+y)$		
$-y+1$		-1
$-(-y-1)$		
2		

$f = yf_1 - 1 \cdot f_2 + 2$

	$xy+1$	$y+1$
xy^2+1		xy
$-(xy^2+xy)$		
$-xy+1$		$-x$
$-(-xy-x)$		
$x+1$		

$f = 0 \cdot f_1 + (xy - x) \cdot f_2 + (x+1)$

- Kein Term in 2 bzw. $-x+1$ ist durch ein $LT(f_i)$ teilbar.

b) Sei $\prec = \prec_{lex}$ $\quad f = x^2y + xy^2 + y^2$ $\quad f_1 = xy - 1$ $\quad f_2 = y^2 - 1$

	$xy-1$	y^2-1	Rest
$x^2y + xy^2 + y^2$ $-(x^2y - x)$	x		
$xy^2 + x + y^2$ $-(xy^2 - y)$	y		
$x + y^2 + y$ $-x$			x
$y^2 + y$ $-(y^2 - 1)$		1	
$y + 1$			

$$f = (x + y) \cdot f_1 + 1 \cdot f_2 + (x + y + 1)$$

- Kein Term in $x + y + 1$ durch ein $LT(f_i)$ teilbar.

Polynom-Reduktion

procedure Algorithmus multivariate Division mit Rest

{Eingabe: Polynome $f, f_1, \ldots, f_s \in R = F[x_1, \ldots, x_n]$, F Körper}

{Termordnung $\prec$ auf $T[x]$.}

{Ausgabe: $q_1, \ldots, q_s, r \in R$ mit $f = q_1 f_1 + \cdots + q_s f_s + r$.}

{ Kein Monom in r ist durch ein $LT(f_1), \ldots, LT(f_s)$ teilbar.}

begin

1 $r := 0; p := f;$

for $i = 1, \cdots, s$ **do** $q_i := 0$

2 **while** $p \neq 0$ **do**

3 **if** LM $(f_i) \mid$ LM(p) für ein $i \in \{1, \ldots, s\}$

then choose some such i: $q_i := q_i + \frac{LM(p)}{LM(f_i)}; p := p - \frac{LM(p)}{LM(f_i)} f_i;$

else $r := r + LM(p); p := p - LM(p)$

4 **return** $q_1, \ldots, q_s, r$

end

Polynom-Reduktion (Forts.)

8.14 Satz Bei Schritt 3 gelten folgende Invarianten

i) $\mathrm{mdeg}(p) \preceq \mathrm{mdeg}(f) \qquad f = p + q_1 f_1 + \cdots + q_s f_s + r.$

ii) $q_i \neq 0 \Rightarrow \mathrm{mdeg}(q_i f_i) \preceq \mathrm{mdeg}(f) \quad 1 \leq i \leq s.$

iii) Kein Term in r ist teilbar durch ein $LM(f_i)$.

- Ist p_j der Wert von p in Durchgang j, so $p_{j+1} \prec p_j$.
- Der Algorithmus terminiert

Frage: Platz und Zeit Bedarf für den Algorithmus? Wovon hängen diese ab?.

Einschrittreduktion mit einer Menge $P = \{f_1, \ldots, f_s\}$

- Einschritt Reduktionsrelation:: $f, g, h \in K[x]$ $\quad g \underset{f}{\longrightarrow} h$
  g reduziert sich nach h mit f gdw. es gibt $s, t \in T[X]$
  $\text{Coeff}(g, s) = c \neq 0$ $\quad s = \text{LT}(f)t$ (d.h. $\text{LT}(f) \mid s$) und

$$h = g - \frac{c}{\text{LC}(f)} \cdot t \cdot f \qquad \text{Ein „Monom“ in } g \text{ wird ersetzt}$$

- $g \underset{P}{\longrightarrow} h$ gdw $\exists f_i \in P \quad g \underset{f_i}{\longrightarrow} h$
- $\underset{P}{\overset{*}{\longrightarrow}}, \underset{P}{\overset{*}{\longleftrightarrow}}$ wie üblich.
- Beachte: Multivariate Division mit Rest liefert ein r mit $r \underset{P}{\longrightarrow}$ irreduzibel und $g \underset{P}{\overset{*}{\longrightarrow}} r$. Strategie: Left-Most-Reduktion.
- Es gilt $\underset{P}{\overset{*}{\longleftrightarrow}} = \equiv_{\langle P \rangle}$ (Übung)

Beispiel

8.15 Beispiel $\prec = \prec_{lex}$, $f = x^2y + xy^2 + y^2$, $f_1 = xy - 1$, $f_2 = y^2 - 1$
f ist mit f_1 reduzibel in x^2y und xy^2
f ist mit f_2 reduzibel in xy^2 und y^2

	$xy-1$	y^2-1	Rest	
$x^2y + xy^2 + y^2$ $-(x^2y - x)$	x	x		$x^2y + xy^2 + y^2$ $-(xy^2 - x)$
$xy^2 + x + y^2$ $-(xy^2 - y)$	y	1		$x^2y + y^2 + x$ $-(y^2 - 1)$
$x + y^2 + y$ $-x$	x		x	$x^2y + x + 1$ $-(x^2y - x)$
$y^2 + y$ $-(y^2 - 1)$		1		
$x + y + 1$				$2x + 1$

d.h. Rest muss nicht eindeutg sein, d. h. i. Allg. keine Konfluenz.

Beispiel (Forts.)

Beachte i. Allg. Wahl von i mit $HT(f_i) \mid HT(P)$. Wähle kleinstes $i \rightsquigarrow$ die Quotienten $q_1, \ldots, q_s$ und der Rest r sind eindeutig festgelegt, schreibe
$r = f \text{ rem}(f_1, \ldots, f_s)$ für diese Wahl.
Gewünscht wird:

- $f \in \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ gdw $r = f \text{ rem}(f_1, \ldots, f_s) = 0$
  - Dies stimmt, falls $s = 1$ ist.
  - Für $s \geq 2$ für Gröbner Basen! Sonst i. Allg. nicht
- "$\Leftarrow$" stimmt aber $\Rightarrow$ nicht.

8.16 Beispiel $f = xy^2 - x$, $f_1 = xy + 1$, $f_2 = y^2 - 1$

$xy^2 - x \underset{f_1}{\longrightarrow} -x - y = r$, d. h. $f = yf_1 + 0f_2 + (-x - y)$,

aber $f = 0f_1 + xf_2 + 0$, d. h. $f \in \langle f_1, f_2 \rangle$.

Nachtrag: Längen von Reduktionsketten

$$x_1 > x_2 > \cdots > x_n \qquad x, y, z$$

$<_{lex}$ $\quad 1 < z < z^2 < \cdots < y < yz < y^2 < \cdots < x < xz < \cdots < xy < \cdots < x^2 < \cdots$

$<_{grlex}$ $\quad 1 < z < y < x < z^2 < yz < \ldots < y^2 < xz < xy < x^2 < \cdots$

$<_{grevlex}$ $\quad 1 < z < y < x < z^2 < yz < xz < y^2 < xy < x^2 < \cdots$

$G \subset K[x_1, \cdots, x_n] = R$, G endlich, $\qquad f \in R$

- $K = K(G, f)$ Max. Länge einer Reduktionsfolge

$$f = h_1 \xrightarrow{G} h_2 \xrightarrow{G} h_3 \xrightarrow{G} \cdots \xrightarrow{G} h_k$$

Siehe: Dube, Mishra, Yap Report 88 Courant Institute NY University 1986
Yap Fundamental Problems of algorithmic Algebra. Oxford.

Längen von Reduktionsketten (Forts.)

$\mathrm{Term}(f) = (t_1, t_2, \cdots, t_l)$ mit $t_1 > t_2 > \cdots > t_l$,

$l :=$ Länge von f $\qquad \Delta := \mathrm{Max}\{W_i(t_1) : i = 1, \cdots, n\}$

$\mu_0 := \mathrm{Min}\{\mu(g) : g \in G\}$ $\qquad M_0 := \mathrm{Max}\{1, \mathrm{Max}\{M(g) : g \in G\}\}$

(W_i, μ, M hängen von der Ordnung ab.
Robbiano's Charakterisierung von Termordnungen:
$W_k(x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}) = \sum_{i=1\ldots n} w_{k,i}\alpha_i \qquad (k = 1, \ldots, n)$, mit $w_{k,i} \in \mathbb{R}$.
Z.B.max. Grad eines Terms bzw. max. Grad einer Variable in Term, z.B. für *lex*-Ordnung ist d max. Grad einer Variable in den Termen von f, so $1 \leq \mu(f) \leq d \qquad 1 \leq M(f) \leq d$)

- $K(G, f) \leq 2^{1+(\Delta S^n / M_0)}$ mit $S = (M_0/\mu_0) + 1$ (Lex)
- $K(G, f) \leq 2^{(\Delta+1)^n}$ Δmax. Grad einer Variable in f(DLex)
  $\leq (\Delta + 1)^n$ für Head Reduktion

Längen von Reduktionsketten (Forts.)

- Seien d, Δ, l, L mit $d \geq l-2 > 0$ $\Delta > L$

$$
\begin{aligned}
f &= x_1^{\Delta} x_n^{L} + x_1^{\Delta} x_n^{L-1} + \cdots + x_1^{\Delta} x_n \quad \text{mit } G \\
g_1 &= x_1 - (x_2^d x_3^d \cdots x_{n-1}^d)(x_n^d + x_n^{d-1} + \cdots + x_n^{d-l+2}) \\
g_2 &= x_2 - (x_3^d x_4^d \cdots x_{n-1}^d)(x_n^d + x_n^{d-1} + \cdots + x_n^{d-l+2}) \\
&\vdots \\
g_n &= x_n^l - x_n^{l-1} - \cdots - x_n \\
g_{n+1} &= x_n^{l-1} - x_n^{l-2} - \cdots - x_n \\
&\vdots \\
g_{n+l-2} &= x_n^2 - x_n \\
g_{n+l-1} &= x_n - 1
\end{aligned}
$$

- Reduktionsfolge, die $\min_{<_{lex}}$ Monom zum Reduzieren wählt, hat Länge der oberen Schranke

  Andere Schranken (genauere) Dube, Mishra, Yap.

Längen von Reduktionsketten (Forts.)

Für jede Termordnung gilt:

- $K(G,f) \leq \begin{cases} L & l = 1 \\ (1 + R_F \overline{u})L & l = 2 \\ 2^{R_F \overline{u}} L & l \geq 3 \end{cases}$
  - L Anzahl der Monome in f
  - l Max. Anzahl von Monomen in Polynom aus G
  - R_F Konstante, die von $>$ und G abhängt
  - $\overline{u}$ Maximum der „Gewichte“ der Monomen in f ($\overline{u} = O(\text{grad}(f))$)
- Head-Reduktion
  - $<_{lex}$: $\leq (d+1)^{\frac{n^2+n}{2}} D^n$
  - $<_{grlex}$: $\leq (d+1)^n D^n$

  • d Max. Grad eines Mon. in f
  • D Max. Grad eines Mon. in $g \in G$
  bzw. $(D+1)^n$

Term-Ideale und Hilbert's Basissatz

8.17 Definition Ein Termideal $I \subseteq R = F[x_1, \ldots, x_n]$ ist ein von Terme erzeugtes Ideal in R, d. h. es gibt eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}^n$ mit

$$I = \langle x^A \rangle = \langle \{x^\alpha : \alpha \in A\} \rangle$$

D.h. es wird von Monomen mit Koeffizienten 1 erzeugt.

8.18 Lemma Sei $I = \langle x^A \rangle \subseteq R$ Termideal, $\beta \in \mathbb{N}^n$, dann

$$x^\beta \in I \text{ gdw } \exists \alpha \in A : x^\alpha \mid x^\beta$$

Beweis: "$\Leftarrow$" klar, "$\Rightarrow$" sei $x^\beta \in I$, dann
$x^\beta = \sum_{i \in E} q_i x^{\alpha_i}$ für eine endliche Menge E mit $q_i \in R = F[x_1, \ldots, x_n]$. Jeder Term, der in der rechten Summe vorkommt, ist teilbar durch ein $\alpha \in A$. x^β muss als Term in der rechten Seite vorkommen, also folgt die Behauptung.

Term-Ideale und Hilbert's Basissatz (Forts.)

8.19 Lemma Sei $I \subseteq R = F[x_1, \ldots, x_n]$ Termideal, $f \in R$, dann sind äquivalent

i) $f \in I$.

ii) Jedes Monom von f liegt in I.

iii) f ist eine F-Linearkombination von Terme in I.

Beweis:
i) $\Rightarrow$ ii) nach Voraussetzung $f = \sum_{i \in E} q_i x^{\alpha_i} \qquad \alpha_i \in A$.
Jeder Term in f ist teilbar durch ein x^γ mit $\gamma \in A$ also ist jedes Monom von f in I.
ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ i) klar. (gilt sogar für beliebige Ideale).

Term-Ideale und Hilbert's Basissatz (Forts.)

8.20 Beispiel $I = \langle x^3, x^2y \rangle \subseteq \mathbb{Q}[x,y] \rightsquigarrow 3x^4 + 5x^2y^3 \in I$
$2x^4y + 7x^2 \notin I$.

Die Implikation i) $\Rightarrow$ ii) ist i. Allg. falsch. z. B.
$g = x^3 - 2xy$, $h = x^2y - 2y^2 + x$, $I = \langle g, h \rangle$
$x^2 = -yg + xh$, dann $x^2 \in \langle LT(I) \rangle$, $x^2 \notin \langle LT(g), LT(h) \rangle$.

8.21 Folgerung Gleichheit von Termidealen::
Zwei Termideale sind gleich gdw sie enthalten die gleichen Terme.

8.22 Satz Dickson's Lemma
Termideale sind endlich erzeugt, d.h. für $A \subseteq \mathbb{N}^n$ gibt es eine endliche Teilmenge $B \subseteq A$ mit $\langle x^A \rangle = \langle x^B \rangle$.

Beweis: $A = \varnothing$ so klar. Sei $A \neq \varnothing$.

Dickson's Lemma (Forts.)

- Betrachte $\leq$ auf $\mathbb{N}^n$ mit
  $\alpha \leq \beta$ gdw $\alpha_i \leq \beta_i$, $1 \leq i \leq n$ (d. h. $x^\alpha \mid x^\beta$).
  Schreibe $\alpha < \beta$, falls $\alpha \leq \beta$ und $\alpha \neq \beta$.
- $<$ ist Partialordnung auf $\mathbb{N}^n$ die i.Allg. nicht total ist $n \neq 1$.
- Sei $B = \{\alpha \in A : \forall \beta \in A, \beta \not< \alpha\}$ die Menge der minimalen Elemente von A bzgl. $<$.

  Behauptung: B ist endlich, $B \subseteq A$,

  $$(*) \quad \forall \alpha \in A \ \ \exists \beta \in B, \beta \leq \alpha$$

- Für $\alpha \in \mathbb{N}^n$ gibt es nur endlich viele $\beta \in \mathbb{N}^n$ mit $\beta \leq \alpha$.
  d.h. Es gibt keine ∞ fallende Kette

  $$\alpha^{(1)} > \alpha^{(2)} > \alpha^{(3)} > \cdots \text{ in } \mathbb{N}^n$$

- Insbesondere folgt $(*)$.

Dickson's Lemma (Forts.)

- z. Z. B ist endlich. Induktion nach n.
  - $n = 1$, dann ist $<$ total $B = \{$kleinstes Element von $A\}$.
  - $n \geq 2$, sei $A^* = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1} : \exists \alpha_n \in \mathbb{N} : (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in A\}$ nach Induktionvorraussetzung ist die Menge B^* der minimalen Elemente von A^* endlich.
- Für jedes $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}) \in B^*$ wähle $b_\beta \in \mathbb{N}$ mit $(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, b_\beta) \in A$ und sei $b = \max\{b_\beta : \beta \in B^*\}$.
- Behauptung: $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B$, so $\alpha_n \leq b$.
- Sei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in A$, dann gibt es ein minimales Element $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}) \in B^*$ von A^* mit $\beta \leq (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$.

Dickson's Lemma (Forts.)

- Ist $\alpha_n > b$, so

$$(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, b_\beta) \leq (\beta_1, \ldots, \beta_n, b) < \alpha$$

  α ist nicht minimal, d. h. $\alpha_n \leq b$.

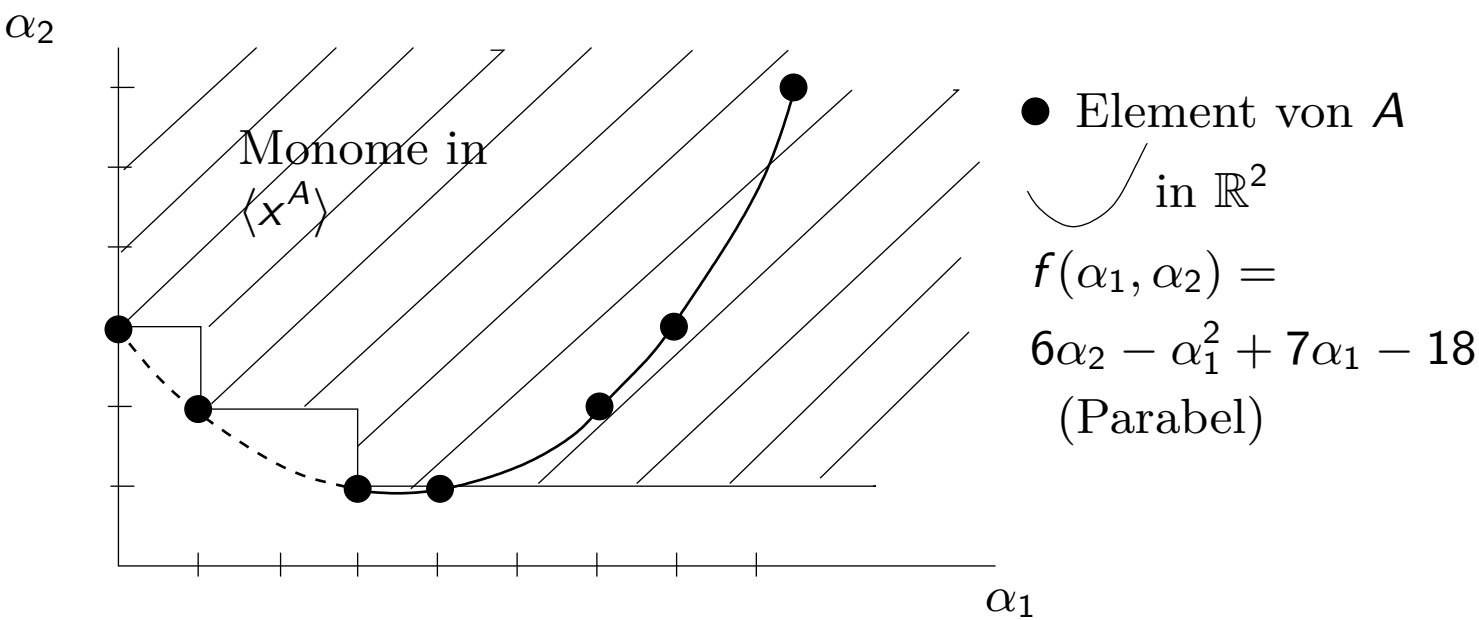
- Analog zeigt man, dass alle Komponenten beschränkt sind, es gibt nur endlich viele $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B$.

- $\alpha \leq \beta$ gdw $x^\alpha \mid x^\beta \rightsquigarrow x^A \subseteq \langle x^B \rangle$ und somit $\langle x^A \rangle \subseteq \langle x^B \rangle$.
  $\supseteq$ folgt aus $B \subseteq A$.

- Beachte: Ideale können auch in Monoiden betrachtet werden. Ideale in e.e. kommutativen Monoiden sind endlich erzeugt (als Ideal).

Beispiel

8.23 Beispiel $n = 2$, $A = \{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2 : 6\alpha_2 = \alpha_1^2 - 7\alpha_1 + 18\}$
Die Menge der minimalen Elemente ist
$B = \{(0,3), (1,2), (3,1)\}$, d. h. $\langle x^A \rangle = \langle y^3, xy^2, x^3y \rangle$



Folgerung

8.24 Folgerung Sei $\prec$ eine totale Ordung auf $\mathbb{N}^n$ mit $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n,\ \alpha \prec \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \prec \beta + \gamma$.

- $\prec$ ist wohlfundiert $\mathrm{gdw}\ \alpha \succeq 0$ für $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

  Beweis: "$\Leftarrow$" $A \subseteq \mathbb{N}^n$, $A \neq \varnothing$, $I = \langle x^A \rangle \subseteq R$ ist endlich erzeugt nach Dickson's Lemma, d. h. $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_s \in A$:

  $I = \langle x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_s} \rangle$ seien sie als $\alpha_1 \prec \alpha_2 \prec \cdots \prec \alpha_s$ geordnet.
  Behauptung $\min_\prec A = \alpha_1$.
  - Sei $\alpha \in A$ beliebig, da $x^\alpha \in I\ \exists i \leq s,\ \gamma \in \mathbb{N}^n : \alpha = \alpha_i + \gamma$, d. h.

  $\alpha = \alpha_i + \gamma \succeq \alpha_1 + \gamma \succeq \alpha_1 + 0 = \alpha_1 \rightsquigarrow \alpha_1 = \min_\prec A$.

- D.h. die Bedingung iii) der Termordnungen kann durch (iii)* $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ \alpha \succeq 0$ ersetzt werden.

Notation-Beispiel

Schreibweise: $G \subseteq R = F[x_1, \ldots, x_n]$

$LM(G) = \{LM(g) : g \in G\}$, $LT(G) = \{LT(g) : g \in G\}$

- Ist $I \subseteq R$ ideal, dann gibt es eine endliche Teilmenge $G \subseteq I$ mit $\langle LT(G)\rangle = \langle LT(I)\rangle$ nach Dickson's Lemma.
- Es kann aber endliche Mengen G die I erzeugen geben mit

$$\langle LT(G)\rangle \subsetneq \langle LT(I)\rangle$$

- Beispiel: $g = x^3 - 2xy \qquad h = x^2y - 2y^2 + x \qquad \prec = \prec_{grlex}$
  $G = \{g, h\} \qquad I = \langle G\rangle \qquad x^2 = -yg + xh$, d. h.
  $x^2 \in \langle LT(I)\rangle$, aber $x^2 \notin \langle LT(G)\rangle = \langle x^3, x^2y\rangle$.

Hilbert's Basissatz

8.25 Lemma Sei I ideal in $R = F[x_1, \ldots, x_n]$.
Ist $G \subseteq I$ endlich mit $\langle LT(G)\rangle = \langle LT(I)\rangle$, so gilt $\langle G\rangle = I$.

Beweis: Sei $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ $f \in I$ beliebig.

Division mit Rest liefert

- $f = q_1 g_1 + \cdots + q_s g_s + r$ mit $q_1, \ldots, q_s, r \in R$.
  Wobei $r = 0$ oder kein Term in r ist durch $LT(f_i)$ für ein i teilbar.
- $r = f - q_1 g_1 - \cdots - q_s g_s \in I \rightsquigarrow LT(r) \in LT(I) \subseteq \langle LT(G)\rangle$.
- Wegen Lemma 8.18 folgt $r = 0$. Also $f \in \langle g_1, \ldots, g_s\rangle = \langle G\rangle$.

8.26 Satz Hilbert's Basissatz
Jedes Ideal I in $R = F[x_1, \ldots, x_n]$ ist endlich erzeugt. Genauer, es gibt endliche Teilmenge $G \subseteq I$ mit $\langle G\rangle = I$ und $\langle LT(G)\rangle = \langle LT(I)\rangle$.

- Dickson's Lemma angewendet auf $\langle LT(I)\rangle$.

Folgerungen

8.27 Folgerung Aufsteigende Kettenbedingung (E.Noether)
Sei $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \cdots$ eine aufsteigende Kette von Idealen in R. Dann gibt es ein n mit

$I_n = I_{n+1} = I_{n+2} = \cdots$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: $I = \bigcup_{j \geq 1} I_j$ ist ideal, endlich erzeugt d. h.

$I = \langle g_1, \ldots, g_s \rangle$. Wähle $n = \min\{j \geq 1, g_1, \ldots, g_s \in I_j\}$.

- Ringe die diese Bedingung erfüllen heißen noethersch, d. h. $F[x_1, \ldots, x_n]$ ist noethersch.

- Allgemeiner gilt: Ist R noethersch so auch $R[x]$.

Gröbnerbasen bezüglich Termordnungen

8.28 Definition Sei $\prec$ eine Termordnung und $I \subseteq R$ ein Ideal. Eine endliche Teilmenge $G \subseteq I$ heißt Gröbner Basis für I bzgl. $\prec$, falls $\langle LT(G)\rangle = \langle LT(I)\rangle$.

Beachte: Jede Gröbner Basis für I ist eine Idealbasis von I nach Lemma 8.25, es gilt

$$f \in I \quad \text{gdw} \quad r = f \text{ rem}(G) = 0$$
$$\text{gdw} \quad f \xrightarrow[G]{*} 0$$

- d. h. $\xrightarrow[G]{}$ ist konfluent auf I.

8.29 Folgerung Jedes Ideal I in $R = F[x_1, \ldots, x_n]$ hat eine Gröbner Basis (Satz 8.26 Hilbert's Basissatz).

8.30 Beispiel $g = x^3 - 2xy$, $h = x^2y - 2y^2 + x$ ist keine G-Basis von $\langle g, h\rangle$.

Konfluenz von $\xrightarrow[G]{}$ für Gröbner Basen

8.31 Lemma Sei G G-Basis für $I \subseteq R$, $f \in R$.
Dann gibt es ein eindeutiges Polynom $r \in R$ mit

i) $f - r \in I$.

ii) Kein Monom in r ist teilbar durch ein Element in $LT(G)$.

Beweis:

- Existenz folgt aus Algorithmus multivariate Division mit Rest.
- Eindeutigkeit: Angenommen $f = h_1 + r_1 = h_2 + r_2 \qquad h_1, h_2 \in I$.
  Kein Monom in r_1, r_2 ist teilbar durch ein Element in $LT(G)$.
  $r_1 - r_2 = h_2 - h_1 \in I \rightsquigarrow LM(r_1 - r_2)$ ist teilbar durch $LT(g)$ mit $g \in G$
  nach Lemma 8.18 $\rightsquigarrow r_1 - r_2 = 0$.

Konfluenz von $\xrightarrow[G]{}$ für Gröbner Basen (Forts.)

- **Folgerung**: Wir können für Gröbnerbasen G schreiben
  f rem $G = r \in R$
  r ist die einzige Normalform von f bzgl. $\xrightarrow[G]{}$.

- $\rightsquigarrow\xrightarrow[G]{}$ ist konvergent.

8.32 Satz Sei G Gröbner-Basis für $I \subseteq R$ bzgl. Termordnung $\prec$, $f \in R$.

- $f \in I$ gdw f rem $G = 0$ gdw $f \xrightarrow[G]{*} 0$.

Umgekehrt: Falls diese Eigenschaft für G gilt, so ist G eine Gröbner Basis (Beweis!).
Beachte: Beweis von Hilbert's Basissatz nicht konstruktiv, auch Dickson's Lemma liefert uns keine Konstruktion für die Menge der minimalen Elemente für $A = \{\alpha : x^\alpha \in \langle LT(I)\rangle\}$.

S-Polynome: Konfluenztest

8.33 Definition

Seien $g, h \in R$ nicht Null, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \text{mdeg}(g)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) = \text{mdeg}(h)$ und $\gamma = (\max\{\alpha_1, \beta_1\}, \ldots, \max\{\alpha_n, \beta_n\})$ das S-Polynom von g und h ist

$$S(g,h) = \frac{x^\gamma}{LM(g)} g - \frac{x^\gamma}{LM(h)} h \qquad \in R$$

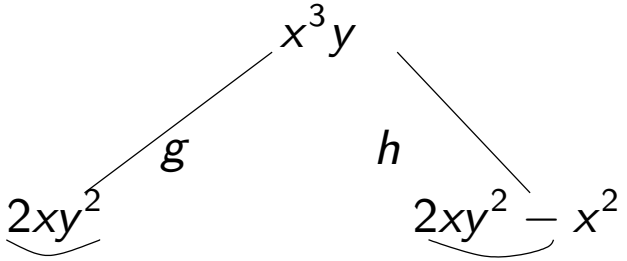
- Offenbar $S(g,h) = -S(h,g)$.
- Da $\frac{x^\gamma}{LM(g)}, \frac{x^\gamma}{LM(h)} \in R$ gilt, folgt $S(g,h) \in \langle g, h \rangle$.
- Beachte: $LT(S(g,h)) \prec x^\gamma$.
  (Wichtig für Noethersche Induktionsbeweise nach $\prec$).

S-Polynome: Konfluenztest (Forts.)

8.34 Beispiel $g = x^3 - 2xy \qquad h = x^2y - 2y2 + x \qquad \in \mathbb{Q}[x,y] \prec_{grlex}$

$\hookrightarrow \alpha = (3,0),\ \beta = (2,1),\ \gamma = (3,1)$

- $S(g,h) = \frac{x^3y}{x^3}g - \frac{x^3y}{x^2y}h \quad = y(x^3 - 2xy) \qquad = -x^2$
  $-x(x^2y - 2y^2 + x)$



Differenz ist $-x^2$

- Um Konfluenz auf $\langle g,h\rangle$ zu erreichen müssen S-Polynome sich nach 0 reduzieren lassen. Frage: Folgt aus $u - v \to^*_{\langle g,h\rangle} 0$ auch $u \downarrow^*_{\langle g,h\rangle} v$
- Die Leitmonome bei Linearkombinationen können sich wegheben, dieses kann durch die S-Polynome charakterisiert werden.

S-Polynome: Hauptlemma

8.35 Lemma Sei $g_1, \ldots, g_s \in R$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{N}^n$, $c_1 \ldots c_s \in F \setminus \{0\}$

- $f = \sum_{1 \le i \le s} c_i x^{\alpha_i} g_i \quad \in R$ und
- $\delta \in \mathbb{N}^n$ mit $\alpha_i + \mathrm{mdeg}(g_i) = \delta$ für $1 \le i \le s$ und $\mathrm{mdeg}(f) < \delta$ (d. h. x^δ ist nicht Leitterm von f).

Dann gilt $x^{\gamma_{ij}}$ teilt x^δ für $1 \le i < j \le s$ wobei $x^{\gamma_{ij}} = \mathrm{KGV}(LT(g_i), LT(g_j))$ und es gibt $c_{ij} \in F$ mit

$$(*) \qquad f = \sum_{1 \le i < j \le s} c_{ij} x^{\delta - \gamma_{ij}} S(g_i, g_j)$$

und $\mathrm{mdeg}(x^{\delta - \gamma_{ij}} S(g_i, g_j)) \prec \delta$ für alle $1 \le i < j \le s$.

S-Polynome: Hauptlemma-Beweis

Beweis: O.b.d.A. $LC(g_i) = 1$ (sonst verändere die c_i) und somit $LT(g_i) = LM(g_i) = x^{\text{mdeg}(g_i)}$ für alle i.

- Sei $1 \leq i < j \leq s$. Der Term $x^\delta = x^{\alpha_i} LT(g_i) = x^{\alpha_j} LT(g_j)$ ist gemeinsamer Vielfacher von $LT(g_1)$ und $LT(g_j)$

$\hookrightarrow$ d. h. $x^{\gamma_{ij}} \mid x^\delta$ und $\alpha_i + \text{mdeg}(g_i) = \alpha_j + \text{mdeg}(g_j) = \delta$
Wegen

$$S(g_i, g_j) = \frac{x^{\gamma_{ij}}}{LT(g_i)} g_i - \frac{x^{\gamma_{ij}}}{LT(g_j)} g_j$$

- Also $\text{mdeg}(S(g_i, g_j)) \prec \gamma_{ij}$, da die Leitterme in dieser Summe sich wegheben, es gilt somit
- $\text{mdeg}(x^{\delta - \gamma_{ij}} S(g_i, g_j)) = \delta - \gamma_{ij} + \text{mdeg}(S(g_i, g_j)) \prec \delta - \gamma_{ij} + \gamma_{ij} = \delta$
- $(*)$ Wird nun durch Induktion nach s bewiesen.
- $s = 1$ nicht möglich, Behauptung richtig.

S-Polynome: Hauptlemma-Beweis

- Sei $s \geq 2$

$$
\begin{aligned}
g = \quad & f - c_1 x^{\delta-\gamma_{12}} S(g_1, g_2) \\
= \quad & c_1 x^{\alpha_1} g_1 + c_2 x^{\alpha_2} g_2 + \sum_{3 \leq i \leq s} c_i x^{\alpha_i} g_i - c_1 x^{\delta-\gamma_{12}} \left(\frac{x^{\gamma_{12}}}{LT(g_1)} g_1 - \frac{x^{\gamma_{12}}}{LT(g_2)} g_2 \right) \\
& = c_1 (\underbrace{x^{\alpha_1} - x^{\delta-\mathrm{mdeg}(g_1)}}_{=0}) g_1 + (c_2 x^{\alpha_2} + c_1 x^{\delta-\mathrm{mdeg}(g_2)}) g_2 + \sum_{3 \leq i \leq s} c_i x^{\alpha_i} g_i \\
& = (c_1 + c_2) x^{\alpha_2} g_2 + \textstyle\sum_{3 \leq i \leq s} c_i x^{\alpha_i} g_i
\end{aligned}
$$

- Hierbei verwende $\alpha_1 + \mathrm{mdeg}(g_1) = \delta = \alpha_2 + \mathrm{mdeg}(g_2)$.

S-Polynome: Hauptlemma-Beweis

- $\mathrm{mdeg}(g) \preceq \max_{\prec}\{\mathrm{mdeg}(f), \mathrm{mdeg}(x^{\delta-\gamma_{12}} S(g_1, g_2)\} \prec \delta$,
  g hat die ursprüngliche Gestalt mit $s-1$ Summanden (falls $c_1 + c_2 \neq 0$)
  sonst $s-2$ Summanden.

↪ Nach Induktionsvor. $g = \sum_{2 \leq i < j \leq s} c_{ij} x^{\delta-\gamma_{ij}} S(g_i, g_j))$.

Für $c_{ij} \in F$ $(2 \leq i < j \leq s)$. $g = 0$, falls $s = 2$.
Setzt man $c_{12} = c_1$ und $c_{1j} = 0$ für $3 \leq j \leq s$, so

↪

$$f = g + c_1 x^{\delta-\gamma_{ij}} S(g_1, g_2) = \sum_{1 \leq i < j \leq s} c_{ij} x^{\delta-\gamma_{ij}} S(g_i, g_s)$$

Charakterisierungssatz mit S-Polynome

8.36 Satz Eine endliche Menge $G = \{g_1, \ldots, g_s\} \subseteq R$ ist eine Gröbner Basis für $\langle G \rangle$ gdw

$$S(g_i, g_j) \text{ REM } (g_1, \ldots, g_s) = 0 \text{ für } 1 \leq i < j \leq s$$

gdw $$S(g_i, g_j) \xrightarrow[G]{*} 0 \text{ für } 1 \leq i < j \leq S.$$

Beweis: "$\Rightarrow$" klar, "$\Leftarrow$" sei $f \in I \backslash \{0\}$ zeige $LT(F) \in \langle LT(G) \rangle$
$f = \sum_{1 \leq i \leq s} q_i g_i$ ▶ $\delta = \max_{\prec}\{\text{mdeg}(q_i g_i),\ 1 \leq i \leq s\}$
Angenommen $\text{mdeg}(f) \prec \delta$, d. h. δ Monome heben sich weg.

- $f^* = \sum_{1 \leq i \leq s, mdeg(q_i g_i) = \delta} LM(q_i) g_i$ hat die Gestalt, wie sie in Lemma 8.35 vorausgesetzt wird.
- f^* lässt sich als Linearkombination von Polynomen der Form $x^{\alpha_{ij}} S(g_i, g_j)$ mit $\alpha_{ij} \in \mathbb{N}^n$ darstellen, wobei $\alpha_{ij} + \text{mdeg}(S(g_i, g_j)) \prec \delta$ nach Lemma 8.35.

Charakterisierungssatz mit S-Polynome

- Nach Voraussetzung gilt $S(g_i, g_j)$ rem $(g_1, \ldots, g_s) = 0$, d. h.

$$f^* = \sum_{1 \le i \le s} q_i^* g_i \text{ mit } \max_{\prec}\{\text{mdeg}(q_i^* g_i) : 1 \le i \le s\} \prec \delta$$

- $f - f^*$ und f^* haben Darstellungen der Form $\sum q_i, g_i$ mit $\max_{\prec}\{\text{mdeg}(q_i g_i) : 1 \le i \le s\} \prec \delta$ also auch f.
- Wiederholte Anwendung liefert Darstellung von f mit

  $f = \sum_{1 \le i \le s} q_i g_i$ und mdeg $= \delta = \max\{\text{mdeg } q_i g_i\}$

  d. h. $\text{mdeg}(f) = \text{mdeg}(q_i g_i)$ für mindestens ein i und somit $LT(f) \in \langle LT(G) \rangle$.

Beispiel

8.37 Beispiel Twisted Cubic

$C = V(G)$ mit $G = \{y - x^2, z - x^3\}$, d. h. $C = \{(a, a^2, a^3) : a \in F\}$.
In $\mathbb{R}^3$ Schnitt von $V(y - x^2)$ und $V(z - x^3)$.

G ist Gröbner Basis für $\langle G \rangle$ bzgl. lex. Ordnung $y \succ z \succ x$.

- $S(y - x^2, z - x^3) = z(y - x^2) - y(z - x^3) = yx^3 - zx^2 \xrightarrow[G]{*} 0$
  $= x^3(y - x^2) + (-x^2)(z - x^3) + 0$

Buchberger's Algorithmus

$\{$Eingabe: $f_1, \ldots, f_s \in R = F[x_1, \ldots, x_n]$, $\prec$ Termordnung.$\}$
$\{$Ausgabe: Gröbner Basis $G \subseteq R$ für $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ bzgl. $\prec\}$
$\{$ mit $\{f_1, \ldots, f_s\} \subseteq G$.$\}$

begin
1 $G := \{f_1, \ldots, f_s\}$
2 **repeat**
  $S := \varnothing$
  Ordne die Elemente von G als $g_1, \ldots, g_t$
  for $i \leq j \leq t$ **do**
    $r := S(g_i, g_j)$ rem $(g_1, \ldots, g_t)$
    if $r \neq 0$ **then** $S := S \cup \{r\}$
  if $S = \varnothing$ **then** return G **else** $G := G \cup S$
end

Buchberger's Algorithmus: Korrektheit

8.38 Satz Algorithmus ist korrekt und terminierend.
Beweis: Es gilt stets $\langle G \rangle = I$ (nur Elemente aus I hinzu), falls Terminierung, so korrekt.

- $G_i \subseteq G_{i+1}$, d. h. $\langle LT(G_i) \rangle \subseteq \langle LT(G_{i+1} \rangle$
  aufsteigende Kette, die stabil werden muss.
  D.h., wenn $G_i = G_{i+1}$, so erfüllen alle S Polynome von G_i:
  $S(\cdot, \cdot)$ rem $(G_i) = 0$.

- **Frage:** Platz und Zeitbedarf, Implementierungen.

8.39 Folgerung Folgende Probleme sind mit G-Basen entscheidbar

i) Wortproblem ($f \in \langle G \rangle$)

ii) $\langle G \rangle \subseteq \langle H \rangle$

iii) $\langle G \rangle = \langle H \rangle$

Beispiel

$f_1 = x^3 - 2xy \qquad f_2 = x^2y - 2y^2 + x \quad \in \mathbb{Q}[x,y], y < x \prec = \prec_{grlex}$

- $S(f_1, f_2) = -x^2 \qquad LT(S(f_1, f_2)) = -x^2 \notin \langle x^3, x^2y \rangle$
  - $f_3 := S(f_1, f_2)$ rem $(f_1, f_2) = -x^2$.

  Dann $S(f_1, f_2)$ rem $(f_1, f_2, f_3) = 0$

- $S(f_1, f_3) = 1f_1 - (-x)f_3 = -2xy$
  $S(f_1, f_3)$ rem $(f_1, f_2, f_3) = -2xy =: f_4$ •
  $S(f_1, f_3) \xrightarrow[f_1,f_2,f_3,f_4]{*} 0$

- $S(f_1, f_4) = yf_1 - (-\frac{1}{2}x^2)f_4 = -2xy^2 = yf_4 \xrightarrow{*} 0$

- $S(f_2, f_3) = 1f_2 - (-y)f_3 = -2y^2 + x$ irred.
  - $f_5 = S(f_2, f_3)$ rem $(f_1, \ldots, f_4) = -2y^2 + x$

  $\rightsquigarrow S(f_i, f_j)$ rem $(f_1, \ldots, f_5) = 0$ für $1 \leq i < j \leq 5$,
  d. h. $\{f_1, \ldots, f_5\}$ ist Gröbner Basis.

Buchberger's Algorithmus (Forts.)

- Varianten des Buchberger Algorithmus um:
  1. Gewisse S-Polynome nicht zu reduzieren.
  2. Basis so klein wie möglich zu halten.
  3. Wiederholungen zu vermeiden.
- Ziel:: Implementierung zu optimieren

Beachte:
Ist G Gröbner Basis und $f \in \langle G \rangle$, so ist $G \cup \{f\}$ auch Gröbner Basis.

8.40 Lemma Ist G Gröbner Basis von $I \subset R$, $g \in G$.
$LT(g) \in \langle LT(G \backslash \{g\}) \rangle$, dann ist $G \backslash \{g\}$ Gröbner Basis von I.

Beweis: z.z. $\langle LT(G) \rangle = \langle LT(G \backslash \{g\}) \rangle = \langle LT(I) \rangle$ wegen
$LT(g) \in \langle LT(G \backslash \{g\}) \rangle$ folgt die Behauptung.

Minimale- und reduzierte- Gröbner Basen

8.41 Definition Eine Menge $G \subseteq R$ heißt minimale (bzw. reduzierte) Gröbner Basis für $I = \langle G \rangle$, falls G eine G-Basis ist und für alle $g \in G$

i) $LC(g) = 1$

ii) $LT(g) \notin \langle LT(G \backslash \{g\}) \rangle$ (minimal)

iii) g ist irreduzibel bzgl. $G \backslash \{g\}$. (reduzierte)

8.42 Satz Eindeutigkeitssatz
Jedes Ideal hat eine eindeutige reduzierte Gröbner Basis bzgl. $\prec$.
Beweis: Existenz: Anwendung von Lemma 8.40 o.B.d.A.
$G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ minimal.

$$\begin{aligned} \text{Sei } h_i &= g_i \text{ rem } \{h_1, \ldots, h_{i-1}, g_{i+1}, \ldots, g_s\} \qquad i = 1, \ldots, s \\ &= \mathrm{NF}(g_i, G \backslash \{g_i\}) \end{aligned}$$

Eindeutigkeit reduzierter Gröbner Basen

- Seien G, G^* reduzierte Gröbner Basen für I. Dann $LT(G) = LT(G^*)$:
  für $t \in LT(G) \subseteq \langle LT(G)\rangle = \langle LT(I)\rangle = \langle LT(G^*)\rangle$ gibt es $g^* \in G^*$ mit $LT(g^*) \mid t$ und es gibt $g \in G$ mit $LT(g) \mid LT(g^*) \mid t$.
  G ist reduziert $\rightsquigarrow LT(g) = LT(g^*) = t \rightsquigarrow LT(G) \subseteq LT(G^*)$.
  $=$ aus Symmetrie

- Sei $g \in G$ und $g^* \in G^*$ mit $LT(g) = LT(g^*)$. Da beide reduziert sind, ist kein Monom in $g - g^* \in I$ reduzibel also $g = g^*$, d. h. $G \subseteq G^*$ und umgekehrt.

8.43 Lemma Translationslemma:
$p - q \longrightarrow_F h \rightsquigarrow \exists p', q' : p \xrightarrow{*}_F p', q \xrightarrow{*}_F q', h = p' - q'$
$p - q \xrightarrow{*} 0 \rightsquigarrow \exists g : p \xrightarrow{*} g, q \xrightarrow{*} g$
$p \longrightarrow q \rightsquigarrow tp \longrightarrow tq \wedge p + h \downarrow^* q + h$

Frage: Wieviele Polynome müssen hinzugenommen werden, um eine Gröbner Basis zu bekommen?

Äquivalente Charakterisierungen für GB

8.44 Satz Chakterisierungssatz für Gröbner Basen bzgl. $\prec$
Sei $G \subseteq R$ endlich $I = \langle G \rangle$. Dann sind äquivalent

1. (Normalform) jedes $f \in R$ hat eindeutige $\xrightarrow[G]{}$ Normalform
2. (Standard Basen) $\langle LT(G) \rangle = \langle LT(I) \rangle$
3. (Buchberger Krit.) für alle $f, g \in G$ gilt $S(f,g) \xrightarrow[G]{*} 0$
4. (Church Rosser) $\xrightarrow[G]{}$ ist Church-Rosser, d. h. $f \xleftrightarrow[G]{*} g$, so $f \downarrow_G^* g$
5. (Extended Standard) Jedes $f \in I$ hat eine Darstellung

$$f = \sum_{1 \le i \le s} q_i g_i \qquad \text{mit } \operatorname{mdeg}(f) \succeq \operatorname{mdeg}(q_i g_i) \qquad i = 1, \ldots, s$$

6. (Ideal Membership) für alle $f \in I$ gilt $f \xrightarrow[G]{*} 0$ oder $f \operatorname{rem}(G) = 0$.

Beispiele von GB

8.45 Beispiel $\{f_1, \ldots, f_5\}$, Beispiel ist Gröbner Basis
$x^3 - 2xy, \quad x^2y - 2y^2 + x, \quad -x^2, \quad -2xy, \quad -2y^2 + x$

$\hookrightarrow$ $\{x^2, xy, y^2 - \frac{1}{2}x\}$ ist minimale reduzierte Gröbner Basis, sie ist eindeutig bzgl. $\prec_{grlex}$.

Beachte: Bzgl. einer anderen Ordnung kann die G-Basis mehr oder weniger Polynome enthalten.

z.B. $x \succ y$: $\{x - 2y^2, y^3\}$
$y \succ x$: $\{y^2 - \frac{1}{2}x, yx, x^2\}$

Beachte: Termideale, Monomideale und homogene Ideale haben reduzierte Gröbner Basen, die unabhängig von der Ordnung sind.

Homogene Ideale

Ein Polynom $f = \sum \alpha_e x^e$ ist homogen, falls alle Terme x^e gleichen Grad haben, d. h. $\sum_{i=1}^{n} e_i = k$ :: f ist dann homogen vom Grad k.

- Jedes Polynom lässt sich eindeutig als Summe homogener Polynome (die homogenen Komponenten) darstellen.
- I ist homogen, falls $I = \langle G \rangle$, G enthält homogene Polynome $\mathrm{gdw}\ \forall f \in I$ jede homogene Komponente von f liegt in I.

Anwendungen von Gröbner Basen

1. Berechnungen in Quotientenringen: $K[x_1, \ldots, x_n]/I$

$$a \in R \mapsto \bar{a} = a + I \in S = R/I$$

$\bar{a}$ Restklasse von a.

- Ist G eine reduzierte G-Basis von I, so kann man als Repräsentant von a die Normalform von a bzgl. $\xrightarrow[G]{}$ wählen, d. h. $rep_G(a) = a \text{ rem } (G)$.
  Offenbar
  $\bar{a} = \bar{b}$ gdw $a - b \in I$ gdw $rep_G(a - b) = 0$ gdw $rep_G(a) = rep_G(b)$
- Arithmetik in s:

$$\begin{aligned} \bar{a} \pm \bar{b} &\leftrightarrow rep_G(a) \pm rep_g(b) \\ \bar{a} \cdot \bar{b} &\leftrightarrow rep_G(rep_G(a) \cdot rep_G(b)) \end{aligned}$$

Anwendungen von Gröbner Basen (Forts.)

8.46 Lemma Sei $I \subseteq R = K[x_1, \ldots, x_n]$, G Gröbnerbasis von I.

i) $V = R/I$ ist K-Vektorraum.

ii) $B = \{t \in T[X] : t = rep_G(t)\}$. Dann ist $\bar{B} = \{\bar{t} : t \in B\}$ eine K-Vektorraumbasis von V.

iii) V hat endliche K-Dimension gdw I nulldimensional.

- Eine Teilmenge $S \subseteq R$ ist nulldimensional, falls $\mathrm{Zero}(S) \subseteq \bar{K}^n$, ($\bar{K}$ alg. Abschluss von K) endlich ist
- hier $\mathrm{Var}_{\bar{K}}(I)$ endlich. (S Ideal)

Anwendungen von Gröbner Basen (Forts.)

8.47 Satz $I \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$.
I ist nulldimensional gdw für jedes $i = 1, \ldots, n \quad I \cap K[x_i] \neq \{0\}$.

Beweis:

"$\Leftarrow$" Sei $0 \neq f_i \in I \cap K[x_i] \quad i = 1, \ldots, n$.
Sei $\xi \in \mathrm{Var}(I)$, ξ muss Nullstelle von f_i sein, d. h. ξ_i muss Nullstelle von f_i sein und davon gibt es nur endlich viele. $\rightsquigarrow \mathrm{Var}(I)$ ist endlich.

"$\Rightarrow$" angenommen $\mathrm{Var}_{\bar{K}}(I) = \{\xi^1, \ldots, \xi^m\}$ mit $\xi^j = (\xi_1^j, \ldots, \xi_n^j)$. Da $\xi_i^j \in \bar{K}$, gibt es Polynome $f_i \in K[x_i]$ mit $f_i(\xi_i^j) = 0$ für $j = 1, \ldots, m$, d. h. f_i ist null auf $\mathrm{Var}(I)$.
Nach Hilbert's Nullstellensatz gibt es $m_i \in \mathbb{N}^+$ mit $f_i^{m_i} \in I$, d. h.
$I \cap K[x_i] \neq \{0\}$.

Anwendungen von Gröbner Basen (Forts.)

8.48 Folgerung Sei G eine Gröbner Basis für I.
I ist nulldimensional gdw für jedes $i = 1, \ldots, n$ es ein $g_i \in G$ gibt mit $LT(g_i) \in T[x_i]$ gdw $V = R/I$ hat endliche K-Dimension.

Beweis: $\langle LT(G)\rangle = \langle LT(I)\rangle$, da Gröbner Basis. Für $i = 1, \ldots, k$:

$$\begin{aligned} I \cap K[x_i] \neq \{0\} \quad &\text{gdw } \langle LT(I)\rangle \cap K[x_i] \neq \{0\} \\ &\text{gdw } LT(G) \cap K[x_i] \neq \varnothing \\ &\text{gdw } B = \{t \in T[x] : t = rep_G(t)\} \text{ ist endlich.} \end{aligned}$$

Bedingung: "$\Rightarrow$" klar, da x_i^k, $k > k_i$ reduzibel.
"$\Leftarrow$" Ist I nicht nulldimensional, so gibt es eine Variable x_i, so dass $x_i^l \in B$ für alle $l \geq 0$, d. h. B ist unendlich und V ist ∞-dimensional als K-Vektorraum.

Beispiele

8.49 Beispiel $I = \langle x^3y - 2y^2 - 1, x^2y^2 + x + y\rangle$ in $\mathbb{Q}[x,y]$.

- $\prec = \prec_{grlex}$ mit $x \succ y$.
  $GB(I,\prec) = \{ \quad \underline{x^4} + x^2y - 2xy + 1, \underline{x^3y} - 2y^2 - 1, \underline{x^2y^2} + x + y,$
  $x^2 + xy + \underline{2y^3} + y\}$

- $\prec = \prec_{lex}$ mit $y \succ x$.
  $GB(I,\prec) = \{ \quad 34y + 8x^8 - x^7 - 2x^6 - 4x^5 + 7x^3 - 35x^2 + 30x - 8,$
  $x^9 + x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2\}$

- Dimension als $\mathbb{Q}$-Vektorraum:

  1) $\{x^3, x^2, x, x^2y, xy, y^2, y, xy^2, 1\}$ irr. Terme
  2) $\{x^8, x^7, x^6, x^5, x^4, x^3, x^2, x, 1\}$ irr. Terme.

  d.h. $\mathrm{DIM}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[x,y]/I) = 9$

  Übung: Berechne Polynome in $I \cap \mathbb{Q}[x]$ und $I \cap \mathbb{Q}[y]$.

Beispiele

- Man kann auch eine Multiplikationstafel für B berechnen: für $p, q \in B$ berechne Normalform von pq (ist dann Polynom), z. B. oben $x \cdot x^3 = -x^2y + 2xy - 1$

Wortproblem für I bzw. $\equiv_I$ Idealmembership.
Problem für e.e. Ideale $I \subseteq R = K[x_1, \ldots, x_n]$.

Gegeben: $f, f_1, \ldots, f_m \in R$.
Frage: $f \in \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ ggf. Darstellung.

Lösung: Berechne G-Basis $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ für I, wobei die Darstellungen von $g_i = \sum_{j=1}^{m} q_j^i f_j$ berechnet werden.
$f \in \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ gdw f res $(G) = 0 +$ Darstellung in $g_i \rightsquigarrow$ Darstellung in f_j berechnen.

Beispiele (Forts.)

8.50 Beispiel Folgende Polynomrelationen seien gegeben.

$$I :: \begin{array}{rl} f_1 = & 4z - 4xy^2 - 16x^2 - 1 = 0 \\ f_2 = & 2y^2z + 4x + 1 = 0 \\ f_3 = & 2x^2z + 2y^2 + x = 0 \end{array} \quad f_i \in \mathbb{R}[x, y, z]$$

- Folgt hieraus

$$g(x, y) = 4xy^2 + 16x^2y^2 + y^2 + 8x + 2 = 0$$

  Für (x, y) mit $\exists z : (x, y, z) \in \mathrm{Var}(I)$?

- Ist $g \in I = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$? g ist irreduzibel bzgl. $\{f_1, f_2, f_3\}$

Beispiele (Forts.)

- Berechne Gröbner Basis bzgl. lex. Ordnung $x < y < z$ liefert:

$$\begin{aligned} g_1 &= 32x^7 - 216x^6 + 34x^4 - 12x^3 - x^2 + 30x + 8 \\ g_2 &= 2745y^2 - 112x^6 - 812x^5 + 10592x^4 - 61x^3 - 812x^2 + 988x + 2 \\ g_3 &= 4z - 4xy^2 - 16x^2 - 1 \end{aligned}$$

- $\rightsquigarrow$ $\mathrm{Var}(I)$ ist endlich.

$$g \xrightarrow[G]{*} 0 \qquad \text{, d. h.} \qquad g(x,y) = 0 \qquad \text{auf Var. } I.$$

- Lösung von Systemen von Polynomgleichungen

$$V = \{a \in K^n : f_1(a) = \cdots = f_m(a) = 0\}$$

Fragen: $V \neq \varnothing$? Gegebenenfalls finde $a \in V$.
$g \in K[x_1, \ldots, x_n]$, ist $g(a) = 0$ für alle $a \in V$.

$\hookrightarrow$ Hilbert's Nullstellensatz, Radikal, Eliminationsmethoden.

Eliminationseigenschaften - Polynomgleichungen

8.51 Definition Sei $I \subseteq K[x_1, \ldots, x_n] = R$, radikal($I$) ist ideal in R mit:

$$f \in \text{radikal}(I) \text{ gdw } f^n \in I \text{ für ein } n \in \mathbb{N}^+$$

Schreibweise Lit: $\sqrt{I}$ (Übung $\sqrt{I}$ ist Ideal).
Motivation: Sei $\mathbb{Z} \subseteq R_0 \subseteq R_1 \subseteq \mathbb{C}$ (oder alg. abg. Körper).

- $R_1^d = \mathbb{A}^d(R_1)$ d-dimensionaler affiner Raum von R_1.
- $U \subseteq \mathbb{A}^d(R_1), f \in R_0[x_1, \ldots, x_d]$, f verschwindet auf U, falls $f(a) = 0$ für alle $a \in U$.
- Ideal(U) $\subseteq R_0[x_1, \ldots, x_d]$ sei definiert durch
  Ideal(U) $= \{f \in R_0[x_1, \ldots, x_d] \mid f$ verschwindet auf $U\}$ ist Ideal!.
- $I = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle$, $f_i \in R_0[x_1, \ldots, x_d]$
  $\text{Zero}_{R_1}(I) = \text{Var}_{R_1}(I) = \{a \in \mathbb{A}^d(R_1) : f_i(a) = 0, i = 1, \ldots, n\}$

Eliminationseigenschaften - Polynomgleichungen (Forts.)

- $U \mapsto \text{Ideal}(U)$ für $U \subseteq \mathbb{A}^d(R_1)$
- $I \mapsto \text{Zero}_{R_1}(I)$ für $I = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle \subseteq R_0[x_1, \ldots, x_d]$

Algebraische Teilmengen von $\mathbb{A}^d(R_1)$ (Zariski Topologie)

- Es gilt: für $I \subseteq R_0[x_1, \ldots, x_d]$ und $U \subseteq \mathbb{A}^d(R_1)$.
  - $I \subseteq \text{Ideal}[\text{Zero}_{R_1}(I)]$
  - $U \subseteq \text{Zero}_{R_1}[\text{Ideal}(U)]$
  - $\text{Zero}[\text{Ideal}[\text{Zero}(I)]] = \text{Zero}(I) \quad I \subseteq R_0[x_1, \ldots, x_d]$
  - $\text{Ideal}[\text{Zero}[\text{Ideal}(U)]] = \text{Ideal}(U) \quad U \subseteq \mathbb{A}^d(R_1)$
- Schränkt man die Abbildungen auf ideale und alg. Mengen, sind sie dann invers zueinander?
  Nur für ideale, die radikal sind, d. h. $f^n \in I$, $n \geq 1 \rightsquigarrow f \in I$.
  Da $\text{Ideal}(U)$ stets radikal ist.

Hilbert's Nullstellensatz

- Hilberts Nullstellensatz (schwache Form)
  Sei D noetherscher ZPE-Ring, $\bar{D}$ alg. Abschluss.
  Ein Ideal $I \subseteq D[x_1, \ldots, x_d]$ hat keine Nullstellen in $\mathbb{A}^d(\bar{D})$ gdw I enthält nichtriviales Element von D.

- Hilberts Nullstellensatz (starke Form)
  Sei D wie oben. $I \subseteq D[x_1, \ldots, x_d]$ Ideal und $f \in D[x_1, \ldots, x_d]$.
  f verschwindet auf $\mathrm{Var}_{\bar{D}}(I)$ gdw es gibt $m \geq 0$, $0 \neq a \in D$ mit $a \cdot f^m \in I$.

$\hookrightarrow$ d.h. $f \in \sqrt{I}$ (Körperfall).

$\hookrightarrow$ $f_1(\bar{x}) = 0 \wedge \cdots \wedge f_m(\bar{x}) = 0 \Rightarrow f(\bar{x}) = 0$

$\rightsquigarrow f \in \sqrt{\langle f_1, \ldots, f_m \rangle}$

Hilbert's Nullstellensatz: Motivation

- Offenbar gilt:
  - Starke Form $\rightsquigarrow$ schwache Form.
  - Schwache Form $\rightsquigarrow$ starke Form:
    Sei $f \in D[x_1, \ldots, x_d]$, f verschwindet auf $\mathrm{Var}_{\bar{D}}(I)$.
    Sei $I = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ "Rabinowitz-Trick" neue Var. z: Setze $g := 1 - z \cdot f$, dann hat das Ideal $\langle f_1, \ldots, f_m, g \rangle$ keine Nullstellen, da g nicht null an den Nullstellen von $f_1, \ldots, f_m \rightsquigarrow$ es gibt $0 \neq a \in D \cap \langle f_1, \ldots, f_m, g \rangle$

$$a = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i + \beta(1 - zf) \qquad \alpha_i, \beta \in D[x_1, \ldots, x_d, z]$$

- Setze $z = 1/f \rightsquigarrow a = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i' f_i$ mit $\alpha_i' \in D(x_1, \ldots, x_d)$.
  Rationale Funktionen mit Nenner Potenz von $f \rightsquigarrow$
- $a \cdot f^n = \sum(\alpha_i' f^{m_i}) f_i$ mit $\alpha_i' f^{m_i} \in D[x_1, \ldots, x_d]$.

Anwendungen von Hilberts's Nullstellensatz

Anwendung: Radikal-Membership-Problem

- Seien $f_1, \ldots, f_m \in K[x_1, \ldots, x_d]$, $f \in K[x_1, \ldots, x_d]$

  Frage: Gilt $f \in \sqrt{\langle f_1, \ldots, f_m \rangle}$?

$$
\begin{aligned}
f \in \sqrt{\langle f_1, \ldots, f_m \rangle} \quad & \text{gdw} \quad f \text{ verschwindet auf } \mathrm{Var}_K(\langle f_1, \ldots, f_m \rangle) \\
& \text{gdw} \quad f_1(\bar{x}) = f_1(\bar{x}) = \cdots = (1 - z \cdot f)(\bar{x}) = 0 \\
& \qquad \text{hat keine Lösungen in } \bar{K}^d \\
& \text{gdw} \quad 1 \in \langle f_1, \ldots, f_m, 1 - zf \rangle_{K[x_1, \ldots, x_d, z]} \\
\text{d.h. } f \in \sqrt{\langle f_1, \ldots, f_m \rangle} \quad & \text{gdw} \quad 1 \in GB(f_1, \ldots, f_m, 1 - zf)
\end{aligned}
$$

- Frage: Gilt $\mathrm{Var}_{\bar{K}}(\langle f_1, \ldots, f_m \rangle) = \varnothing$
  Lösung: Ja, falls $1 \in GB(f_1, \ldots, f_m)$.

Anwendungen: Eliminationseigenschaften, Varietäten

- Frage: Gilt $\mathrm{Var}_{\bar{K}}(\langle f_1, \ldots, f_m \rangle)$ ist endlich, $I = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ ist nulldimensional.
  Lösung: Berechne GB und K-Dimension von $K[x_1, \ldots, x_d]/I$.

  Angenommen $\mathrm{Var}_{\bar{K}}(\langle f_1, \ldots, f_m \rangle)$ sei endlich:

- Frage: Kann man die Lösungen explizit darstellen?

8.52 Satz Eliminationseigenschaft für Gröbner Basen.
Sei G Gröbner Basis von $I = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ bzgl. der Lex-Ordnung mit $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Dann gilt

$$J = I \cap K[x_1, \ldots, x_i] = \langle G \cap K[x_1, \ldots, x_i] \rangle_{K[x_1, \ldots, x_i]}$$

Insbesondere ist $G \cap K[x_1, \ldots, x_i]$ eine G-Basis für J.

Eliminationseigenschaften: Beweis

Beweis:

"$\supseteq$" klar.

"$\subseteq$" $LT(f) \in T[x_1, \ldots, x_i]$ gdw $f \in K[x_1, \ldots, x_i]$,
$f \in I \cap K[x_1, \ldots, x_i] \rightsquigarrow f \xrightarrow[G]{*} 0$ und die Leitterme der Basispolynome bei der Reduktion liegen in $T[x_1, \ldots, x_i]$, d. h. diese Basispolynome liegen in $G \cap K[x_1, \ldots, x_i]$.

8.53 Folgerung Sei G G-Basis von I bzgl. der Lex Ordnung mit $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.

I ist nulldimensional gdw für jedes $i = 1, \ldots, n$ gibt es ein $g_i \in G$ mit $HT(g_i) \in K[x_1, \ldots, x_i] \backslash K[x_1, \ldots, x_{i-1}]$.

Eliminationseigenschaften: Beweis (Forts.)

Beweis:

"$\curvearrowright$" klar
"$\curvearrowleft$" $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathrm{Var}_{\bar{K}}(I)$. So $g_i(\xi_1, \ldots, \xi_i) = 0 \qquad i = 1, \ldots, n.$

- $i = 1 \qquad g_1$ Polynom in einer Var. $\rightsquigarrow$ endlich viele Nullstellen, d.h. nur endlich viele Möglichkeiten für ξ_1.

- Induktiv $\rightsquigarrow \qquad g_i(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_i) = 0 \qquad$ für $\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}$ nur endlich viele Möglichkeiten $\rightsquigarrow$ für ξ_i nur endlich viele Möglichkeiten.

Anwendung: Polynomgleichungen

8.54 Beispiel Pol. Gleichungssystem

$$\begin{array}{lllllll} f_1 :: & 4xz & -4xy^2 & -16x^2 & -1 & = 0 & \\ f_2 :: & & 2y^2z & +4x & +1 & = 0 & \mathbb{Q}[x,y,z] \\ f_3 :: & & 2x^2z & +2y^2 & +x & = 0 & x < y < z \end{array}$$

- Gröbner Basis bzgl. lex. Ordnung:

$$\begin{array}{llllllll} g_1 = & 65z & +64x^4 & -423x^3 & +168x^2 & -354x & +104 \\ g_2 = & 26y^2 & -16x^4 & +108x^3 & -16x^2 & +17x & \\ g_3 = & 32x^5 & -216x^4 & +64x^3 & -42x^2 & +32x & +5 \end{array}$$

Anwendung: Polynomgleichungen (Forts.)

↪ $\mathrm{Var}_{\mathbb{C}}(\langle f_1, f_2, f_3\rangle)$ ist endlich, $\mathrm{DIM}_K(\mathbb{Q}[x,y,z]/I) = 10$,
d. h. $|\mathrm{Zero}(f_1, f_2, f_3)| = 10$ (Nullstellen mit Vielfachheit zählen).

- Lösungen von g_3 als Parameter: α (5-Nullstellen)

$$(\alpha, \pm\frac{1}{\sqrt{26}}\sqrt{\alpha}\sqrt{16\alpha^3 - 108\alpha^2 + 16\alpha - 17}, \frac{1}{65}(64\alpha^4 - 423\alpha^3 + \cdots))$$

↪ Darstellung von $\mathrm{Var}_{\mathbb{C}}(\langle f_1, f_2, f_3\rangle)$.

Beispiel: Polynomgleichungen

8.55 Beispiel Parametrisiertes Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} f_1 &:= x_4 + b - d && = 0 \\ f_2 &:= x_4 + x_3 + x_2 + x_1 - a - c - d && = 0 \\ f_3 &:= x_3x_4 + x_1x_4 + x_1x_3 - ad - ac - cd && = 0 \\ f_4 &:= x_1x_3x_4 - acd && = 0 \end{aligned}$$

- Parameter: $a, b, c, d \in K$, $<:: x_1 < x_2 < x_3 < x_4$

  G-Basis bzgl. lex Ordnung: $\mathbb{Q}(a, b, c, d)[x_1, x_2, x_3, x_4]$

  $g_1 = x_4 + b - d$

  $g_2 = x_3 - \frac{b^2-2bd+d^2}{acd}x_1^2 - \frac{abc+abd-2acd-ad^2+bcd-cd^2}{acd}x_1 - a - c - d$

  $g_3 = x_2 + \cdots \qquad g_4 = x_1^3 + \cdots$

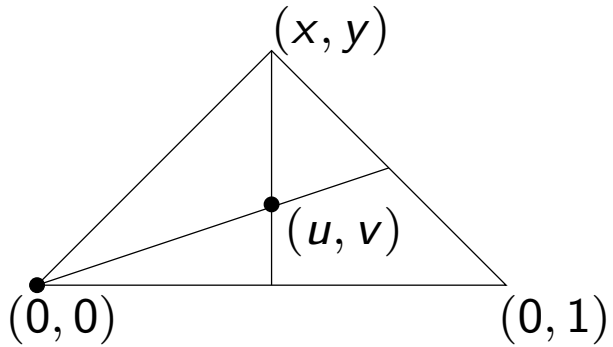
  Eine Wurzel von g_4 ist $\frac{-ad}{b-d}$ (?)

  $\rightsquigarrow \left(\frac{-ad}{bd}, \frac{ab+b^2-bd}{b-d}, c, -b + d\right)$

- Anwendungen: Schaltungsentwurf: Verstärker usw.

Automatisches Beweisen in der Geometrie

8.56 Beispiel Dreieck, Schnitt der Medianen, Formulierung:
$f_1, f_2 \in \mathbb{R}[u, v, x, y]$



- $f_1 = 0 \wedge f_2 = 0 \Rightarrow g_1 = 0 \wedge g_2 = 0 \wedge g_3 = 0$,
- falls $g_1, g_2, g_3 \in \langle f_1, f_2 \rangle$, so ok. g_1 bereits gezeigt.
- $GB(\langle f_1, f_2 \rangle)$ $\quad u \succ v \succ x \succ y$ lex Ordnung.
  $f_1 = uy - vx - v \quad f_2 = uy - vx + 2v - y$

$\hookrightarrow$ $S(f_1, f_2) = f_1 - f_2 = -3v + y = -g_3$
$\{f_1, f_2, g_3\}$ ist Gröbner Basis.

Automatisches Beweisen in der Geometrie (Forts.)

- Die eindeutige reduzierte G-Basis ist

$$G = \{uy - \frac{1}{3}xy - \frac{1}{3}y, v - \frac{1}{3}y\}$$

$$\begin{array}{lll} g_1 = & -2uy - (v - y) + 2vx & \xrightarrow[G]{*} 0 \\ g_2 = & 3u - x - 1 & \text{irreduzibel d. h. } g_2 \notin \langle G \rangle \\ g_3 = & 3v - y & \xrightarrow[G]{*} 0 \end{array}$$

- Beachte aber $yg_2 = 3uy - xy - y \longrightarrow_G 0$, d. h. $yg_2 \in I$

↪ d.h. $g_2(x, y) = 0$, falls $(x, y) \in V(I)$ und $y \neq 0$
nicht Degeneriertheitsbedingung $y \neq 0$.

- Nimmt man $1 - yz$ zu G hinzu, z neue Variablen garantiert.
$y \neq 0$: $g_2 = g_2 \cdot (1 - yz) + zyg_2 \in \langle f_1, f_2, 1 - yz \rangle$

Implizitierung (Implicitation)

- Seien $f_1, \ldots, f_n \in K[t_1, \ldots, t_m]$ und eine affine Alg. Varietät $V \subseteq K^n$ sei in parametrisierte Form gegeben, d. h.

$$x_1 = f_1(t_1, \ldots, t_m)$$
$$\vdots$$
$$x_n = f_n(t_1, \ldots, t_m)$$

$\hookrightarrow$ $V = \{a \in K^n : \exists b \in K^m \quad a = (f_1(b), \ldots, f_n(b))\}$

- Finde Polynome $g_1, \ldots, g_s \in K[x_1, \ldots, x_n]$, so dass $V = \mathrm{Var}(I)$ mit $I = \langle g_1, \ldots, g_s \rangle$ "implizite Darstellung".

8.57 Beispiel

- Twisted Cubic: $x = t \quad y = t^2 \quad z = t^3$
  Implizitierung: $g_1 = y - x^2 \quad g_2 = z - x^3$
- $x = t^2, y = t^3, z = t^4$
  Implizitierung: $g_1 = z - x^2 \quad g_2 = y^2 - x^3$

Implizitierung : Lösungsansatz

Lösung mit G-Basen:

- Betrachte $J = \langle x_1 - f_1, \ldots, x_n - f_n \rangle \subseteq K[t_1, \ldots, t_m, x_1, \ldots, x_n]$. Wähle Ordnung $t_1 \succ \cdots \succ t_m \succ x_1 \succ \cdots \succ x_n \quad \prec_{lex}$.

$\hookrightarrow$ Einige der g in $GB(J)$ hängen nur von $x_1, \ldots, x_n$ ab, dies sind Kandidaten für die Implizitierung.

8.58 Beispiel

- $t \succ z \succ y \succ x$
- $GB\{x - t, y - t^2, z - t_3\}$ ist $\{t - x, z - x^3, y - x^2\}$
- $GB\langle x - t^2, y - t^3, z - t^4 \rangle$ ist $\{t^2 - x, ty - x^2, tx - y, z - x^2, y^2 - x^3\}$
- Die Varietät, die von $G \cap K[x_1, \ldots, x_n]$ definiert wird, ist die kleinste Varietät (Alg-Menge), die das Bild der Parametrisierung enthält.

Lösung linearer Gleichungen in $K[\bar{x}]$:: Syzygien

Lösung linearer Gleichungen in $K[\bar{x}]$

Gegeben: $f_1, \ldots, f_s, f \in K[\bar{x}] = R$.
Gesucht: Lösungen von $f_1 z_1 + \cdots + f_s z_s = f$
bzw. $f_1 z_1 + \cdots + f_s z_s = 0 \qquad (*)$
mit $z_i \in K[\bar{x}]$.

- Jede Lösung von $(*)$ heißt eine Syzygie von $f_1, \ldots, f_s$.
- Beachte die Menge der Lösungen von $(*)$ ist ein R-Modul, hat eine endliche Basis.
- Gesucht wird eine Modul-Basis für $syz(\{f_1, \ldots, f_s\})$.

Basis für Syszygienmodul für Gröbner-Basen

8.59 Satz Basis für Syszygienmodul für Gröbner-Basen.
Sei $G = \{f_1, \ldots, f_s\}$ Gröbner-Basis. Eine Basis S für $syz(G)$ erhält man wie folgt:

- Für $1 \leq i \leq s$ sei $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^s$ i-te Einheitsvektor.
- Für $1 \leq i < j \leq s$ $\quad t_{ij} = KGV(LT(f_i), LT(f_j))$

  $p_{ij} = \frac{t_{ij}}{LM(f_i)} \qquad q_{ij} = \frac{t_{ij}}{LM(f_j)}$

  - $S(f_i, f_j) = p_{ij} f_i - q_{ij} f_j \xrightarrow[G]{*} 0$

    $= \sum_{l=1}^{s} k_{ij}^l f_l$ mit $k_{ij}^l \in R$
  - $S = \{p_{ij} e_i - q_{ij} e_j - (k_{ij}^1, \ldots, k_{ij}^s) \mid 1 \leq i < j \leq s\}$

Basis für Syszygienmodul für Gröbner-Basen (Forts.)

Beweis:

- Jedes Element in S ist eine Syzygie von G.
  Sei $s_{ij} = p_{ij} e_i - q_{ij} e_j - (k_{ij}^1 \cdots k_{ij}^s)$ als Zeilenvektor.

$$\hookrightarrow \; s_{ij} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_s \end{pmatrix} = p_{ij} f_i - q_{ij} f_j - \sum_{l=1}^{s} k_{ij}^l f_l = 0$$

- Sei $z = (z_1, \ldots, z_s) \in R^s$ nichttriviale Syzygie von G, d. h. $\sum z_i f_i = 0$, und p maximaler Term in dieser Summe. Lemma 8.35 liefert das Ergebnis: Durch Abziehen geeigneter Vielfacher von $s_{i,j}$ von z lässt sich Summe mit kleinerem p erreichen, d. h. z ist Linearkombination der s_{ij} und somit bildet S eine Basis für $syz(G)$.

Basis für Syszygienmodul für Gröbner-Basen (Forts.)

8.60 Satz Sei $F = (f_1, \ldots, f_s)^T$ mit $f_i \in K[\bar{x}]$ und $G = (g_1, \ldots, g_m)^T$ eine Gröbner-Basis für $\langle F \rangle$. (Betrachte F, G als Spaltenvektoren aus R^s bzw. R^m).

- Die Matrix $R_{r\times m}$ bestehe aus r Zeilen, die eine Basis für $syz(G)$ bilden (S von 8.59). Weiterhin seien die Matrizen A, B definiert durch $G = A_{m\times s}F$ bzw. $F = B_{s\times m}G$ (Darstellungen der g_i in den f_i und umgekehrt.)

  Sei $Q := \begin{pmatrix} I_s - B \cdot A \\ R \cdot A \end{pmatrix}_{s+r,s}$

  Dann bilden die Zeilen von Q eine Basis für $syz(F)$.

Beweis

Beweis Seien $b_1, \ldots, b_{s+r}$ Polynome $b = (b_1 \ldots b_{s+r})$.

$$\begin{aligned}(b \cdot Q)F &= ((b_1, \ldots, b_s)(I_s - BA) + (b_{s+1} \cdots b_{s+r})RA)F \\ &= (b_1 \cdots b_s)(F - \underbrace{BAF}_{=F}) + (b_{s+1} \cdots b_{s+r})R\underbrace{AF}_{=G} \\ &= 0\end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ d.h. Jede Linearkombination der Zeilen von Q ist eine Syzygie von F.

- Sei $H = (h_1 \ldots h_s)$ eine Syzygie von F. Dann ist $H \cdot B$ eine Syzygie von G. Für ein H' gilt dann $H \cdot B = H' \cdot R$ und somit $H \cdot B \cdot A = H' \cdot R \cdot A$, d. h. $H = H \cdot (I_S - BA) + H' \cdot R \cdot A = (H, H')Q$, also ist H Linearkombination der Zeilen von Q.

Lösung inhomogener Gleichungen

- $f_1 z_1 + \cdots + f_s z_s = f$ Existenz gdw $f \in \langle F \rangle$ Gröbner Basis für F, $G = A \cdot F$, $f \xrightarrow[G]{*} f' \neq 0$ nicht lösbar, sonst $f \xrightarrow[G]{*} 0$, $g_1 h'_1 + \cdots + g_m h'_m = f \hookrightarrow H = (h'_1 \cdots h'_m)A$ ist partikuläre Lösung.

Effektive Operationen mit Idealen

Seien $I = \langle f_1, ..., f_r \rangle$ und $J = \langle g_1, ..., g_s \rangle$ Ideale in $K[X]$

- $I + J := \{f + g : f \in I, g \in J\} = \langle f_1, ..., f_r, g_1, ..., g_s \rangle$
- $I \cdot J := \{fg : f \in I, g \in J\} = \langle f_i g_j : 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s \rangle$
- $I \cap J := \{f : f \in I \text{ und } f \in J\} = (\langle t \rangle I + \langle 1 - t \rangle J) \cap K[X]$
- $I : J := \{f : fg \in I, \forall g \in J\} = \cap_{j=i,...,s}(I : \langle g_j \rangle)$
  wobei $I : \langle g \rangle = \langle h_1/g, ..., h_m/g \rangle$ mit $I \cap \langle g \rangle = \langle h_1, ..., h_m \rangle$
- Transformation von G-Basen bzgl. verschiedener Termordnungen (Lazard)
- GGT-Berechnung mit G-Basen (Gianni, Trager)

Zur Komplexität der Berechnung von G-Basen

Probleme:

- Ordnungen, Längen von Ketten bei Reduktion.
- Wachstum der Größen bei der Berechnung: Eingabe weniger Polynome, kleine Grade, kleine Koeffizienten: Ausgabe Polynome mit großen Graden, große Koeffizienten.

  D. h. Ergebnisse können groß werden.

  - Klassen P, BPP, NP, EXPSPACE

- EXPSPACE-vollständige Probleme benötigen $2^{2^{O(n)}}$ Zeit.

  IM (Wortproblem für Ideale über $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_s]$.)

- Mayr & Mayer 82: IM ist EXPSPACE-hart für allg. Ideale.
- Mayr 89,92: IM ist in EXPSPACE, d h. IM ist vollständig.

Zur Komplexität der Berechnung von G-Basen (Forts.)

- $f \in \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ gdw $f \xrightarrow[GB(f_1,\ldots,f_m)]{*} 0$
- $f \xrightarrow[GB]{*} 0$ kann in $\mathrm{EXPSPACE}$ berechnet werden (für G-Basen).
- Entscheidungsproblem: Ist $\{f_1, \ldots, f_m\}$ Gröbner Basis
  ist $\mathrm{EXPSPACE}$-hart.

8.61 Satz Kühnle, Mayr 96
Die Berechnung einer reduzierten G-Basis kann in $\mathrm{EXPSPACE}$ erfolgen.
(Beachte $\mathrm{EXPSPACE} = \mathrm{DSPACE}(2^{lin})$ wird nur Platz auf Arbeitsband gemessen).

- Gleiche Ergebnisse gelten für binomial-ideale, d. h. Ideale werden durch Binome $x^\alpha - x^\beta$ erzeugt.

Zur Komplexität der Berechnung von G-Basen (Forts.)

- Bürgisser (98) K ∞-Körper. IM benötigt exponentielle parallele Zeit.
- Für homogene Ideale: Mayr 95: IM ist PSPACE-vollständig.
  Berechnung der G-Basis bleibt $\mathrm{EXPSPACE}$-hart.

  Gradschranken
- Hermann 1926: $f \in \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$, $f = \sum_{1 \leq i \leq s} q_i f_i$

  Grade der q_i doppeltexponentiell. Siehe auch Mayr & Mayer 82.
- Die Grade der Polynome in einer reduzierten Gröbner Basis für $\langle f_1, \ldots, f_s \rangle \subseteq F[x_1, \ldots, x_n]$ sind höchstens

$$2\left(\frac{d^2}{2} + d\right)^{2^{n-1}}$$

  wobei $deg(f_i) \leq d$ für alle i.

Zur Komplexität der Berechnung von G-Basen (Forts.)

Beachte: die Schranke hängt nicht von der Anzahl der Polynome oder von den Koeffizienten ab. Sie ist polynomial im Grad und doppelt exponentiell in der Anzahl der Variablen.

- Es gibt Ideale, für die jede G-Basis mindestens $2^{2^{cn}}$ Elemente enthält mit Elementen vom Grad mindestens $2^{2^{c^* n}}$ $(c, c^* \in \mathbb{R}^+)$.
- Varietäten: $V(f_1, \ldots, f_s)$ ist leer gdw $1 \in \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ in PSPACE.
- Für nulldimensionale Ideale einfache Exp-Schranken. Lakshman (90), Mayr (97) Übersicht.
- Systeme: Macaulay, Singular. Projekte: Posso Frisco.