SS 2010 02.07.2010

Übungen zur Vorlesung Computeralgebra
Blatt 14

Prof. Dr. Klaus Madlener Abgabe bis 19.07.2010

Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie, dass $\{y - x^2, z - x^3\}$ keine Gröbnerbasis für die lexikographische Ordnung mit $x > y > z$ ist.

b) Sei $\{x + 1, y + 1, xy + z\} \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z]$. Berechnen Sie eine Gröbnerbasis für $\langle F\rangle$ bezüglich der lexikographischen Ordnung mit $x > y > z$. Verwenden Sie auch andere Termordnungen, um ein Gefühl für die Komplexität des Buchberger-Algorithmus zu bekommen.

Aufgabe 2:
Man fixiere eine zulässige Termordnung. Seien G und $\hat{G}$ minimale Gröbnerbasen des Ideales I.

a) Zeigen Sie, dass G und $\hat{G}$ die gleichen Leitterme haben.

b) Zeigen Sie, dass G und $\hat{G}$ gleichviele Elemente besitzen.

Aufgabe 3:
Betrachten Sie folgendes polynomiale Gleichungssystem $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 0$, wobei

$$\begin{aligned}
f_1 &= x_4 + b - d,\\
f_2 &= x_4 + x_3 + x_2 + x_1 - a - c - d,\\
f_3 &= x_3x_4 + x_1x_4 + x_1x_3 - ad - ac - cd,\\
f_4 &= x_1x_3x_4 - acd
\end{aligned}$$

Polynome in den Variablen x_1, x_2, x_3, x_4 sind und die Parameter a, b, c, d enthalten, d. h. $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathbb{Q}(a, b, c, d)[x_1, x_2, x_3, x_4]$. Sei $<$ die lexikographische Ordnung mit $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Zeigen oder widerlegen Sie: Das System hat unendlich viele Lösungen. Berechnen Sie eine Lösung des Systems (wenn es überhaupt eine Lösung besitzt).

Aufgabe 4:
Seien $I = \langle f_1, \ldots, f_r\rangle$ und $J = \langle g_1, \ldots, g_s\rangle$ Ideale in $K[X]$, K Körper. Zeigen Sie:

a) $I \cap J = (\langle t\rangle \cdot I + \langle 1 - t\rangle \cdot J) \cap K[X]$, wobei t eine neue Variable ist.

b) $I : J$ ist definiert als $I : J = \{f \mid f \cdot g \in I \text{ für alle } g \in J\}$.

Es gilt: $I : J = \bigcap_{j=1}^{s}(I : \langle g_j\rangle)$ und $I : \langle g\rangle = \langle h_1/g, \ldots, h_m/g\rangle$, wobei $I \cap \langle g\rangle = \langle h_1, \ldots, h_m\rangle$.

Was bedeutet dies für die Berechenbarkeit der obigen Idealoperationen?