Grundlagen der Prädikatenlogik

Beziehungen zwischen Eigenschaften von Elementen
Funktionen, Prädikate

Funktionen, Prädikate

- Beschreibung von Strukturen (Datentypen, Algebren,. . .)
- Beschreibung von Integritätsbedingungen (Relationen,. . .)
- Lösbarkeit von Anfragen (Gleichungen,. . .)

Beispiel 3.1

Bereich $\mathbb{Z}$, Operationen, Prädikate,...

- Zahlen: Konstanten: $\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$
- Individuenvariablen (Abzählb.): $x, y, z, \ldots$
- Funktionszeichen (Operatoren): $+, \cdot, -$ (Stelligkeit 2)
- Prädikatszeichen (Relationen): $<, >$ (Stelligkeit 2)
- Logische Zeichen: $=, \wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \ldots$
- Quantoren: $\forall$ (für alle), $\exists$ (es gibt)
- Trennzeichen: $(,), \cdots$

Hilberts-10-Problem: Gibt es ein Verfahren, um zu entscheiden, ob eine diophantische Gleichung eine Lösung hat?

- Hat ein Polynom in mehreren Veränderlichen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ eine Lösung in $\mathbb{Z}$?
  $\exists x, y, z. 3x^2 - 2xy^3 + 5z^3 + 6 = 0$
- Entscheide effektiv, ob eine Aussage in $\mathbb{Z}$ gilt.
- Beschreibung von Eigenschaften:
  $U(x) \equiv \exists z. x = 2 \cdot z + 1, \quad G(x) \equiv \exists z. x = 2 \cdot z$

$$\forall x (U(x) \vee G(x))$$

Aufbau von Formeln:
Aus Konstanten, Funktionen, Individuenvariablen können **Terme** definiert werden. Terme dienen als Bezeichner für Elemente.

- Jede Variable ist Term, jede ganze Zahl ist Term
  t_1, t_2 Terme, so auch $(t_1 + t_2), (t_1 - t_2), (t_1 \cdot t_2)$
- **Atomare Formeln**:
- t_1, t_2 Terme: So sind $t_1 = t_2, t_1 < t_2, t_1 > t_2$ Atomare Formeln.
- A, B Formeln: So sind $(A \wedge B), (A \vee B), (A \to B), (\neg A)$, und für
- x Variable, A Formel: $\forall x.A$, $\exists x.A$ Formeln.

Interpretationen

- **Bedeutung von Termen und Formeln**. Interpretation:
  Hier in $\mathbb{Z}$: Terme klar $+, -, \cdot$ durch die Operatoren auf $\mathbb{Z}$.
  Bedeutung von: $(x + 5) = y$, $\forall x.(x + 5) = 0$, $\exists x.(x + 5) = 0$,
  $\forall x.\exists y.(x + 5) = y$
- **Interpretation:** Bereich, Funktionen, Prädikate.
  Belegung der Individuen-Variablen.

▶ $x \to 3 \qquad y \to 8$, dann $(x + 5) = y$ wahr.

- **Allgemeinere Formeln**: Quantifizierung über Funktionen, Prädikaten.
- $A \equiv \exists F.((F(a) = b) \land \forall x.[p(x) \to F(x) = g(x, F(f(x)))]$
  wobei F Funktionsvariable, a, b Individuenkonstanten, p Prädikatskonstante und f, g Funktionskonstanten sind.

Interpretationen

$$A \equiv \exists F.((F(a) = b) \wedge \forall x.[p(x) \to F(x) = g(x, F(f(x)))]$$

1. $D = \mathbb{N}$ $\quad a = 0, b = 1$ $\quad f(x) = x \dot{-} 1$
   $g(x, y) = x \cdot y$ $\quad p(x) \equiv x > 0$
   - Gibt es eine Funktion $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:
     $F(0) = 1$ $\qquad F(x) = x \cdot F(x \dot{-} 1) \quad (x > 0)$
2. $D = \mathbb{N}$ $\quad a = 0, b = 1$ $\quad f(x) = x$
   $g(x, y) = y + 1$ $\quad p(x) \equiv x > 0$
   - Gibt es eine Funktion $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:
     $F(0) = 1$ $\qquad F(x) = F(x) + 1 \quad (x > 0)$

Allgemeine Sprache der Prädikatenlogik zweiter Stufe

Definition 3.2 (Syntax)

(a) Alphabet:

1. **Wahrheitswerte:** W, F (Log-Konstanten)
2. **Logische Symbole:**
   - 2.1 **Junktoren:** $\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow, \cdots$, **If _ Then _ Else _**
   - 2.2 **Operatoren:** $=$, **if _ then _ else _**
   - 2.3 **Quantoren:** $\forall$ (Allquantor), $\exists$ (Existenzquantor)
3. **Variablensymbole:**
   - 3.1 n-stellige **Funktionsvariablen:** $F_j^n (j \geq 1, n \geq 0)$
     $n = 0$ **Individuenvariablen:** Bezeichnung x_j
   - 3.2 n-stellige **Prädikatenvariablen:** $P_j^n (j \geq 1, n \geq 0)$
     $n = 0$ **aussagenlogische Variablen**

4. **Konstantensymbole:**
   - 4.1 n-stellige **Funktionskonstanten:** $f_j^n (j \geq 1, n \geq 0)$
     f_j^0 **Individuenkonstanten:** Bezeichnung a_j
   - 4.2 n-stellige **Prädikatskonstanten:** $p_j^n (j \geq 1, n \geq 0)$
     p_j^0 **A-log-Konstanten** Bezeichnung p_j
5. **Hilfssymbole** (Klammern).

- ! Alle Zeichen verschieden, kein Buchstabe Teilwort eines anderen.
- ! Entscheidbare Teilalphabete. Stelligkeiten eindeutig festgelegt.
- ! Spezielle Sprachen werden durch Festlegung der Konstanten (oft nur endlich viele) definiert.

Allgemeine Sprache der Prädikatenlogik zweiter Stufe (Forts.)

(b) Ausdrücke: Terme - Formeln

1. Die Menge **Term** der Terme (Bezeichner):

   i. Jede Individuenvariable x_j und Individuenkonstante a_j $(j \geq 1)$ ist ein (atomarer) Term
   ii. Sind $t_1, \ldots, t_n (n \geq 1)$ Terme, so auch $f_j^n(t_1, \ldots, t_n)$ und $F_j^n(t_1, \ldots, t_n)$ $(j \geq 1)$
   iii. Ist A Formel, t_1, t_2 Terme, so auch $(\textbf{if } A \textbf{ then } t_1 \textbf{ else } t_2)$
   iv. **Term** ist kleinste Menge mit i die Abg. bzg. ii. und iii ist.

2. Die Menge der Formeln **Form**:
   - Atomare Formeln: **AForm**
     i. $W, F \in \textbf{AForm}$
     ii. $p_j^0, P_j^0 \in \textbf{AForm} \quad (j \geq 1)$
     iii. Sind $t_1, \ldots, t_n$ $(n \geq 1)$ Terme, so
     $p_j^n(t_1, \ldots, t_n), P_j^n(t_1, \ldots, t_n) \in \textbf{AForm} \quad (j \geq 1)$
     iv. Sind t_1, t_2 Terme, dann ist $(t_1 = t_2) \in \textbf{AForm}$
   - Formeln: **Form**
     i. $\textbf{AForm} \subseteq \textbf{Form}$
     ii. $A, B, C \in \textbf{Form}$, so auch
     $(\neg A), (A \rightarrow B), (A \vee B), (A \wedge B), (A \leftrightarrow B)$
     $(\textbf{If } A \textbf{ Then } B \textbf{ Else } C) \in \textbf{Form}$
     iii. Ist v Variable, A Formel
     $((\forall v)A), ((\exists v)A) \in \textbf{Form}$ (gelegentlich mit Einschränkung)

(c) freie (gebundene) Variable. **Geltungsbereich eines Quantors**:

- Ist $B \equiv ((\forall v)A)$ oder $B \equiv ((\exists v)A)$, so ist A der **Geltungsbereich** von $\forall v$ bzw. $\exists v$.
- Ein Vorkommen von v in A heißt gebunden.
- Ein **Vorkommen** einer Variablen v in einer Formel heißt gebunden, falls es im Geltungsbereich eines Quantors Qv vorkommt. Sonstige Vorkommen einer Variablen heißen **frei**.
- Eine Variable v heißt **freie Variable** einer Formel A, wenn es in A freie Vorkommen von v gibt. Formeln ohne freie Variablen heißen **abgeschlossen** oder **Aussagen.**

(d) Teilterme und Teilformeln werden wie üblich definiert.

Beachte: Jeder Term, Formel wird eindeutig aus den Teiltermen bzw. Teilformeln aufgebaut.

Bemerkung 3.3

a) **Term**, **Form** *sind rekursiv entscheidbar, zusammengesetzte Terme und Formeln lassen sich eindeutig zerlegen. Freie und gebundene Vorkommen lassen sich effektiv bestimmen.*

b) **Vereinbarungen**: *Stelligkeit aus Kontext*
a, b, c *Individuenkonstanten,* $f, g, h, \ldots$ *Funktionskonstanten* $p, q, r \ldots$ *Prädikatskonstanten,* $x, y, z \ldots$ *Individuenvariablen* $F, G, H, \ldots$ *Funktionsvariablen* $P, Q, R, \ldots$ *Prädikatsvariablen,* $A, B, C, \ldots$ *Formeln,* t, s *Terme.*
Die Mengen $Var(t)$, $Var(A)$ *seien die Variablen, die in* t *bzw. in* A *vorkommen.*

Beispiel

$$\exists F\{(\underbrace{F(a)}_{\text{Term}} = \underbrace{b}_{\text{Term}}) \land \forall x[p(\underline{x}) \rightarrow (\underline{F(x)} = \underline{g(x, F(f(x)))})]\}$$

Term Term Term Term Term

at-F at.F at.F

Formel

Formel

Formel

i) $A \equiv$ Formel

$Var(A) = \{F, x\}$ F kommt $3\times$ vor, gebunden

x kommt $4\times$ vor, gebunden

A abgeschlossene Formel

ii) $$A \equiv \forall P\{ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{geb.}}}{P}(a) \land \forall x[[\underset{\substack{\uparrow\\ \text{geb.}}}{x} \neq a \land \underset{\substack{\uparrow\\ \text{geb.}}}{P}(f(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{geb.}}}{x}))] \rightarrow \underset{\substack{\uparrow\\ \text{geb.}}}{P}(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{geb.}}}{x})]] \rightarrow \underset{\substack{\uparrow\\ \text{geb.}}}{P}(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{frei}}}{x})\}$$

A ist nicht abgeschlossen, x hat freies Vorkommen d.h. $FVar(A) = \{x\}$.

Eingeschränkte Teilsprachen

Konstanten, Variablen einschränken

1. Allgemeine Sprache der Prädikatenlogik erster stufe: PL1
   - Nur Individuenvariablen x_i
     (keine Funktion- und Prädikatsvariablen)

$$x_1 \neq x_2 \ \wedge \ \forall x_2(\exists x_3 p(x, f(x_2, x_3)) \rightarrow (p(x_2, x_1) \vee p(x_2, a)))$$

2. - Sprache der Gleichheitslogik
     Nur Individuenvariablen x_j ($j \geq 1$), Funktionskonstanten.
     Keine Prädikatskonstanten und Variablen, keine Funktionsvariablen.
     Oft noch eingeschränkt, nur Individuenkonstanten
   - reine Gleichheitslogik
     Term : $x_i, a_i,$ **if** A **then** t_1 **else** t_2
     AForm : $W, F, t_1 = t_2$

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (((x_1 = x_2) \wedge (x_2 = a)) \rightarrow (x_1 = a))$$

3. Sprache der quantifizierten Aussagenlogik
Nur aussagenlogische Konstanten $p_j^0 (j \geq 1)$ und aussagenlogische Variablen $P_j^0 (j \geq 1)$ sind zugelassen.
Keine Terme. Atomare Formeln: aussagenlogische Konstanten und Variablen, W, F, p, P_i.

$$(\forall P_1 (P_1 \rightarrow p) \rightarrow \exists P_2 (P_2 \rightarrow W))$$

4. Sprache der Aussagenlogik
   Nur aussagenlogische Konstanten $p_j^0 (j \geq 1)$ sind zugelassen.

$$(\textbf{If } p_1 \textbf{ Then } p_2 \textbf{ Else } p_3) \leftrightarrow ((p_1 \rightarrow p_2) \vee (\neg p_1 \rightarrow p_3))$$

5. Sprache der monadischen Logik (2-Stufe)
   Individuenvariablen x_i, keine Funktionssymbole.
   Monadische Prädikatsvariablen + Konstanten: p_j^1, P_j^1

$$\forall P \forall x \forall y ((P(x) \rightarrow p(y)) \rightarrow p(x))$$

Semantik der P-Logik 2-Stufe
Interpretationen, Belegungen, Bewertungen

!	$D \neq \varnothing$,	Funktionen	$f : D^n \to D$ (totale Funktion),
		Prädikate	$P \subseteq D^n$ (als Relationen)
			oder $P : D^n \to \{0,1\}$

! 0-stellige Funktionen (Element aus D),
Prädikate (Element aus $\{0,1\}$).

Definition 3.4 (**Interpretationen, Belegungen**)

Sei $\mathcal{L}$ Sprache der P-Logik 2-Stufe
(festgelegt durch die Menge der Konstantensymbole i. R. endlich).

a) Eine **Interpretation** I für $\mathcal{L}$ ist ein Tripel $I = (D, I_c, I_v)$ mit
   - $D \neq \varnothing$ Individuenbereich (Definitionsbereich).
   - I_c ist eine Interpretation (Belegung) der Konstanten
     $f^n \in \mathcal{L}$, so $I_c(f^n) : D^n \to D$
     $p^m \in \mathcal{L}$, so $I_c(p^m) \subseteq D^m$(oder $: D^m \to \{0, 1\}$)
   - I_v ist eine Belegung der Variablen:
     F^n Funktionsvariablen $I_v(F^n) : D^n \to D$ $(n \geq 0)$
     P^m Prädikatsvariablen $I_v(P^m) \subseteq D^m(D^m \to \{0, 1\})$

   (D, I_c) heißt auch **Relationalstruktur.**
   Kommen keine Prädikatskonstanten vor, so **Algebra.**

Interpretationen, Belegungen (Forts.)

b) Fortsetzung von I auf **Term**, bzw. **Form**:
I : **Term** $\rightarrow D$ $\qquad I$: **Form** $\rightarrow \mathbb{B}$

i) Bewertung der Terme:

- $I(a_i) = I_c(a_i) \qquad I(x_i) = I_v(x_i)$
- $I(f(t_1, \dots, t_n)) = I_c(f)(I(t_1), \dots, I(t_n))$
- $I(F(t_1, \dots, t_n)) = I_v(F)(I(t_1), \dots, I(t_n))$
- $I(\textbf{if } A \textbf{ then } t_1 \textbf{ else } t_2) = \begin{cases} I(t_1) & \text{falls } I(A) = 1 \ \ (W) \\ I(t_2) & \text{falls } I(A) = 0 \ \ (F) \end{cases}$

ii) Bewertung der Formeln:

- $I(W) = 1 \qquad I(F) = 0 \qquad I(p^0) = I_c(p^0) \qquad I(P^0) = I_v(P^0)$
- $I(p(t_1, \dots, t_n)) = I_c(p)(I(t_1), \dots, I(t_n))$
- $I(P(t_1, \dots, t_n)) = I_v(P)(I(t_1), \dots, I(t_n))$
- $I(t_1 = t_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } I(t_1) =_D I(t_2) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Interpretationen, Belegungen (Forts.)

b) ii)

- $I(\neg A)$, $I(A \wedge B)$, $I(A \vee B)$, $I(A \rightarrow B)$, $I(A \leftrightarrow B)$, $I(\textbf{If } A \textbf{ Then } B \textbf{ Else } C)$
  Wie in A-Logik.
- $I((\forall x)A) = \begin{cases} 1 & \text{falls für alle } d \in D \text{ gilt } I^{x,d}(A) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- $I((\exists x)A) = \begin{cases} 1 & \text{falls es } d \in D \text{ gibt mit } I^{x,d}(A) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

  $I^{x,d} = (D, I_c, I_v'),\qquad I_v'(y) = \begin{cases} d & y \equiv x \\ I_v(y) & \text{sonst} \end{cases}$
- Entsprechend für Quantifizierungen mit den anderen Funktions- und Prädikatsvariablen.

Interpretationen, Belegungen (Forts.)

Jede Interpretation $I = (D, I_c, I_v)$ induziert durch 3 (i) und ii)) eine Bewertung aller Terme und Formeln, die die bewerteten Konstanten und Variablen als freie Variablen enthalten.

Umgekehrt wird jede Bewertung I, die i) und ii) genügt eindeutig durch eine solche Interpretation induziert.

Beachte: 3-Parameter: D, I_c, I_v.

Interpretationen, Belegungen (Forts.)

c) Gilt $I(A) = 1$, so ist A wahr in der Interpretation I oder I **erfüllt** A.

Schreibweise $\models_I A$ oder $I \models A$

(Beachte A ist hier eine beliebige Formel, kann also freie Variablen enthalten).

Folgerungen

Bemerkung 3.5

- *Um die Bewertung einer Formel A zu bestimmen, genügt es die Bewertung der in ihr vorkommenden Konstanten und frei vorkommenden Variablen zu kennen!*
  $I = (\underline{D}, \underline{I_c}, I_v)$
- *Insbesondere: Ist A abgeschlossen, so genügt es Interpretationen der Form (D, I_c), d. h. Definitionsbereich und Belegung der Konstanten zu betrachten.*
- *Seien I_1, I_2 Interpretationen mit $D_1 = D_2$ und A eine Formel. Stimmen I_1 und I_2 auf allen Konstanten und freien Variablen, die in A vorkommen, überein, so gilt $I_1(A) = I_2(A)$.*

Beispiel

Beispiel 3.6

i) $\exists x \forall y (p(y) \rightarrow x = y)$
Stimmt in allen Interpretationen für die $I(p)$ höchstens ein Element enthält. „Es gibt höchstens ein x, so dass $p(x)$ wahr ist“.

ii) „Es gibt genau ein x, so dass $p(x)$ wahr ist“.

$$\exists x[p(x) \wedge \forall y[p(y) \rightarrow x = y]]$$

iii) $\forall z \exists u \exists v((z = u \vee z = v) \wedge u \neq v)$
$\wedge \forall x \forall y \forall P[x \neq y \vee P(x,x) \vee \neg P(y,y)]$

- Wahr in jeder Interpretation mit $|D| \geq 2$
- Falsch in jeder Interpretation mit $|D| = 1$

Beispiel (Fort.)

iv) Eigenschaften von Relationen: Reflex., Sym., Tra.

- $\forall x \; p(x,x)$
- $\forall x \forall y (p(x,y) \rightarrow p(y,x))$
- $\forall x \forall y \forall z [(p(x,y) \land p(y,z)) \rightarrow p(x,z)]$

v) Relationen, Funktionen

- $A \equiv \forall x \; p(x, f(x))$, $A_1 \equiv p(x, f(x))$
  $I = (\mathbb{N}, I_c, I_v)$, $I_c(p) \equiv \; \leq$ -Prädikat, $I_c(f) : n \rightarrow n^2$,

  $I^{x,n}(A_1)(\equiv n \leq n^2) = 1$

Definition

Definition 3.7

Sei $\mathcal{L}$ Sprache der P-Logik 2-Stufe

a) $A \in$ **Form** heißt **allgemeingültig,** falls $I(A) = 1$ für jede Interpretation I für $\mathcal{L}$.
Schreibweise: $\models A$

b) $A \in$ **Form** heißt **erfüllbar,** falls es eine Interpretation I für $\mathcal{L}$ gibt mit $I(A) = 1$. I heißt auch Modell für A (nur für abg. A). Gibt es keine solche Interpretation, so heißt A **unerfüllbar**.

c) $\Sigma \subseteq$ **Form** heißt **erfüllbar,** falls es eine Interpretation I für $\mathcal{L}$ gibt, die alle Formeln $A \in \Sigma$ erfüllt.

Einfache Folgerungen

Bemerkung 3.8

A allgemeingültig gdw $\neg A$ *unerfüllbar.*
Es genügt Interpretationen zu betrachten, die die Konstanten und freien Variablen der Formel A belegen.

- unendlich viele, da $D \neq \emptyset$ *beliebig.*

Bemerkung 3.9

Es gibt allgemeingültige Formeln: **Tautologie-Theorem:**
Sei $A(p_1, \dots, p_n)$ *eine Formel der Aussagenlogik in A-Variablen* $p_1, \dots, p_n$. A' *entstehe aus A durch simultane Ersetzung von* p_i *durch* $B_i \in$ **Form**. *Dann* $A' \in$ **Form**.
Ist A Tautologie, so ist A' *allgemeingültig.*
(z. B. $A_1 \vee \neg A_1, A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow A_1) \dots$ *)*

Einfache Folgerungen

Bemerkung 3.10

i) $\forall x \forall y \forall P(x \neq y \vee (P(x,x) \vee \neg P(y,y)))$ *ist allgemeingültig.*
Es genügt Interpretationen mit $I = (D) \quad D \neq \emptyset$ *zu betrachten.*
$|D| = 1$ *ok,* $|D| > 1$
$I_v(x, y, P)$, $x \to d_1$, $y \to d_2$
$d_1 \neq d_2$ *ok,* $d_1 = d_2 \leadsto I_v(P)(d_1, d_2) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$

ii) $A \equiv \exists P \forall x \exists y (P(x,x) \wedge \neg P(x,y))$
Weder allgemeingültig noch unerfüllbar.
$|D| = 1 \leadsto I(A) = 0$, $|D| \geq 2 \leadsto I(A) = 1$

iii) *Allgemeingültig sind:*
$t = t$, $\forall x A \leftrightarrow \neg \exists x (\neg A)$, $\exists x A \leftrightarrow \neg \forall x (\neg A)$

Ordnungsrelationen

Bemerkung 3.11 (Eigenschaften von Ordnungsrelationen:)

p 2-stellige P-Konstante

$A_1 \equiv \forall x \forall y \forall z((p(x,y) \wedge p(y,z)) \rightarrow p(x,z))$	*Tra.*
$A_2 \equiv \forall x \forall y(p(x,y) \vee p(y,x) \vee x = y)$	*Trichot.*
$A_3 \equiv \forall x \neg p(x,x)$	*Antireflex.*
$A_4 \equiv \forall x \forall y(p(x,y) \rightarrow \exists z(p(x,z) \wedge p(z,y)))$	*dicht*
$A_5 \equiv \forall x \exists y\ p(x,y)$	*ohne letztes Elem.*
$A_6 \equiv \forall x \exists y\ p(y,x)$	*ohne erstes Elem.*

Keine der Formeln ist allgemeingültig! (Überzeugen Sie sich)

Sie sind erfüllbar: $I_1 = (\{0,1,2\}, <)$

$I_2 = (\mathbb{N}, <)$

$I_3 = ([0,1], <)$

$I_4 = (\mathbb{Q}, <)$

$<$	0	1	2
0	*F*	*W*	*W*
1	*F*	*F*	*W*
2	*F*	*F*	*F*

Einige typische Formeln

Beispiele

Allgemeingültige Formeln	Nicht-Allgemeingültige Formeln
$\forall x p(x) \to \exists x p(x)$	$\exists x p(x) \to \forall x p(x)$
$p(x) \to p(x)$	$p(x) \to p(a)$
$\forall x q(x) \to q(a)$	$q(a) \to \forall x q(x)$
$p(a) \to \exists x p(x)$	$\exists x p(x) \to p(a)$
$\forall x \forall y (p_1(x,y) \to p_1(x,y))$	$\forall x \forall y (p_1(x,y) \to p_1(y,x))$
$\exists y \forall x p_1(x,y) \to \forall x \exists y p_1(x,y)$	$\forall x \exists y p_1(x,y) \to \exists y \forall x p_1(x,y)$
$(\forall x p(x) \vee \forall x q(x)) \to$ $\forall x (p(x) \vee q(x))$	$\forall x (p(x) \vee q(x)) \to$ $\forall x p(x) \vee \forall x q(x)$
Zeige $\neg A$ unerfüllbar	Zeige $\neg A$ erfüllbar $I = (\mathbb{Z}, p(x) \Leftrightarrow x > 0,$ $q(x) : x \leq 0, p_1(x,y) : x > y$ $a \leftarrow 0, x \leftarrow 1)$

Arithmetik

Beispiel 3.12

Die Sprache der Arithmetik $\mathbb{N}$

- *Konstanten:* $0, S, +, \cdot,$ $\qquad I = (\mathbb{N}, 0,', +, \cdot)(n' = n + 1)$
- *Stelligkeiten* $0, 1, 2, 2$
  1. $\forall x \forall y (S(x) = S(y) \rightarrow x = y)$
  2. $\forall x \quad S(x) \neq 0$
  3. $\forall x \quad x + 0 = x$
  4. $\forall x \forall y (x + S(y)) = S(x + y)$
  5. $\forall x \quad x \cdot 0 = 0$
  6. $\forall x \forall y \quad x \cdot S(y) = (x \cdot y) + x$
  7. $\forall P[(P(0) \wedge \forall x(P(x) \rightarrow P(S(x)))) \rightarrow \forall x P(x)]$
- *Sind gültig in* I.
  Man beachte 7. ist Induktionsprinzip für Teilmengen von $\mathbb{N}$.
  Es ist eine Formel der P-Logik 2-Stufe.

Arithmetik Beispiel (Forts.)

Frage nach der **Axiomatisierbarkeit** der Arithmetik:

- Ist die Allgemeingültigkeit für Formeln einer Sprache $\mathcal{L}$ entscheidbar?
- Rekursiv aufzählbar?
- Welche effektiven Methoden gibt es?

Allgemeingültigkeit: Entscheidbare Fälle

Lemma 3.13

Die Allgemeingültigkeit für Formeln der quantifizierten A-Logik ist entscheidbar.

Beweis:

Methode der **Quantorenelimination**: Finde zu Formel der Q-A-Logik eine logisch äquivalente der A-Logik.
(Problemreduktion!)
$(\forall P_i^0)B \leftrightarrow B_{P_i^0}[W] \wedge B_{P_i^0}[F]$ $\quad (P_i^0 \leftarrow W,\ P_i^0 \leftarrow F)$
$(\exists P_i^0)B \leftrightarrow B_{P_i^0}[W] \vee B_{P_i^0}[F]$
$I(\quad) = I(\quad)$

- Nach Transformation bleibt eine Formel der A-Logik: Entscheide, ob diese eine Tautologie ist.

Allgemeingültigkeit: Entscheidbare Fälle (Forts.)

Beispiel 3.14

$\forall P \exists Q((P \leftrightarrow \neg Q) \vee (p \rightarrow Q))$ ist Allgemeingültig

$\rightsquigarrow$

$\exists Q((W \leftrightarrow \neg Q) \vee (p \rightarrow Q)) \wedge \exists Q((F \leftrightarrow \neg Q) \vee (p \rightarrow Q))$

$\rightsquigarrow$

$[((W \leftrightarrow \neg W) \vee (p \rightarrow W)) \vee ((W \leftrightarrow \neg F) \vee$
$(p \rightarrow F))] \wedge [(F \leftrightarrow \neg W) \vee (p \rightarrow W) \vee ((F \leftrightarrow \neg F) \vee (p \rightarrow F))]$

$\rightsquigarrow W \wedge W \quad \rightsquigarrow W$

Allgemeingültigkeit: Entscheidbare Fälle (Forts.)

Ausblick

Andere:

- Gleicheitslogik
- Monadische P-Logik 1-Stufe mit $=$
- Monadische P-Logik 2-Stufe mit $=$
- Pressburgerarithmetik: Gültige PL1-Formeln in $(\mathbb{N}, 0,', +, <)$
- Syntaktisch eingeschränkte Formelnklassen
  $\forall(\quad), \forall\exists, \exists\forall, \ldots$?

Transformationen von Termen und Formeln

Einschränkung auf PL1

Definition 3.15 (Substitution)

$A \in$ **Form**, $t, \hat{t} \in$ **Term**, x Individuen-Variable.

- **Substitution** von x durch t in A bzw. (in $\hat{t}$):
  - $A_x[t]$ $(\hat{t}_x[t])$ ist die Formel (der Term), die aus A (bzw. $\hat{t}$) entsteht, wenn man jedes freie Vorkommen von x in A (bzw. $\hat{t}$) durch t ersetzt.
- Analog **simultane Substitutionen**
  - $A_{x_1,\ldots,x_n}[t_1,\ldots,t_n]$ bzw. $t_{x_1,\ldots,x_n}[t'_1,\ldots,t'_n]$

Transformationen von Termen und Formeln (Forts.)

- Allgemeiner ist eine **Substitution** durch $\sigma : \{x_i : i \in \mathbb{N}\} \to$ **Term** gegeben.
  $\sigma(A)$, $\sigma(t)$ können entsprechend durch Induktion über den Aufbau der Formeln bzw. Terme definiert werden.
- Die Substitution heißt **erlaubt**, falls kein Vorkommen einer Variablen in t bzw. t_i nach der Substitution in A gebunden vorkommt.
  - Dies ist der Fall z. B. wenn die Variablen von t nicht in A vorkommen.
    (Kann durch Umbenennung der gebundenen Variablen erreicht werden).

Beispiel 3.16 (Substitutionen)

$A \equiv \exists y \;\; x = 2 \cdot y \qquad t \equiv y + 1$

- $A_x[t] \equiv \exists y \;\; y + 1 = 2 \cdot y$ keine erlaubte Substitution
- $A_y[t] \equiv \exists y \;\; x \equiv 2 \cdot y$ da keine freie Vorkommen
- $t_y[t] \equiv (y + 1) + 1$

- Wie Ändert sich die Bedeutung einer Formel bei Substitutionen?
  - $I = (\mathbb{N}, +, \cdot) \quad x \leftarrow 3 \quad y \leftarrow 2 \quad t \leftarrow 3 \quad I(x) = I(t)$
- Ersetzt man x durch t, sollte sich die Bedeutung einer Formel nicht verändern.
  - $I(A) = I(\exists y \; x = 2 \cdot y) = 0$
  - $I(A_x[t]) = I(\exists y \; y + 1 = 2y) = 1$ (keine erlaubte Substitution)

  Betrachte die Formel:
  - $B \equiv \forall x(P(x, y) \rightarrow Q(x)) \quad t \equiv f(y, z)$

  $\hookrightarrow$ $B_y[t] \equiv \forall x(P(x, f(y, z)) \rightarrow Q(x))$ erlaubte Substitution.

Lemma 3.17 (Substitutionslemma)

Sei A Term oder Formel, x Individuenvariable, $t \in$ **Term** *und $A_x[t]$ eine erlaubte Substitution. Dann gilt für jede Interpretation $I = (D, I_c, I_v)$*

- $$I(A_x[t]) = I^{x,I(t)}(A)$$

- Insbesondere: Sind I, I' Interpretationen, die sich höchstens für x unterscheiden und gilt $I'(x) = I(t)$, so gilt $I'(A) = I(A_x[t])$.

- **Beweis:**

  Induktion über Aufbau von Formeln bzw. Terme. ■

Folgerungen aus Substitutionslemma

Folgerung 3.18

Sei $A_x[t]$ erlaubt.

a) *Ist A allgemeingültig, so auch $A_x[t]$.*
b) $\forall x A \to A_x[t]$ *ist allgemeingültig.*
c) *Spezialfälle: allgemeingültig sind:*
   $\forall x A \to A, \qquad A \to \exists x A$
d) *Falls Substitution nicht erlaubt, so gilt das Lemma nicht:*
   $A \equiv \exists y(S(x) = y),\ A_x[y] \equiv \exists y(S(y) = y)$
   $I = (\mathbb{N}, \cdots) \quad I(A) = 1 \quad I(A_x[y]) = 0$
   $\forall x \exists y(S(x) = y)$ *allgemeingültig.*
   $\forall x \exists y(S(x) = y) \to \exists y(S(y) = y)$ *nicht allgemeingültig.*

Universeller und Existentieller Abschluss

- **Beachte**: Sei $A(x_1, \dots, x_n)$ Formel in der $x_1, \dots, x_n$ frei vorkommen, dann gilt
  - A allgemeingültig gdw $\forall x_1 \cdots \forall x_n A$ allgemeingültig (**universeller Abschluss**)
  - A erfüllbar gdw $\exists x_1 \cdots \exists x_n A$ erfüllbar (**existentieller Abschluss**)
  - Sind $A, A \rightarrow B$ allgemeingültig, so ist auch B allgemeingültig.

Semantischer Folgerungsbefriff

Definition 3.19

Sei $\mathcal{L}$ eine (Teil-)Sprache der PL2
$\Gamma \subseteq \textbf{Form}, A, B \in \textbf{Form}$

a) A ist **logische Folgerung** aus $\Gamma : \Gamma \models A$. Wenn jede Interpretation, die Γ erfüllt auch A erfüllt
$(I(\Gamma) = 1 \rightsquigarrow I(A) = 1)$.
   - Sei $\text{Folg}(\Gamma) = \{A \in \textbf{Form} : \Gamma \models A\}$.

b) A und B sind **logisch äquivalent** $A \models\mathrel{\mkern-3mu}\dashv B$, falls
$A \models B$ und $B \models A$.
(Lässt sich auf Mengen verallgemeinern!)

Bemerkung 3.20

1. $\Gamma \models A$ gdw $\{\Gamma, \neg A\}$ *nicht erfüllbar.*
2. $\emptyset \models A$ gdw $\models A$ *(d.h. A ist allgemeingültig).*
3. Γ *nicht erfüllbar* gdw $\Gamma \models A$ *für alle* $A \in$ **Form**.
4. $\Gamma \subset \Sigma, \Gamma \models A$, *so* $\Sigma \models A$. *(Monotonieeigenschaft)*
5. $\Gamma \models\!\!\!\!\!= \Sigma$, *d. h.* $\Gamma \models B$ *für* $B \in \Sigma$ *und* $\Sigma \models C$ *für* $C \in \Gamma$.
   Insbesondere Γ *erfüllbar* gdw Σ *erfüllbar und*
   $\Gamma \models A$ gdw $\Sigma \models A$. *Also* $\mathrm{Folg}(\Gamma) = \mathrm{Folg}(\Sigma)$.
6. $A \models\!\!\!\!\!= B$ gdw $\models A \leftrightarrow B$ gdw $I(A) = I(B)$ *für jede Interpretation* I.
   $A \models\!\!\!\!\!= B$ *dann* $\Gamma \models A$ gdw $\Gamma \models B$.

Beispiel 3.21

i) $\forall x Q(x) \models Q(y)$
(Spezialfall von $\forall x A \rightarrow A_x[t]$ allgemeingültig)

ii) $A(y) \not\models \forall y A(y)$ (y kommt frei in A vor)
$A(y) \equiv p(y)$, $I = (\{0,1\}, I(p)(x) \equiv (x = 0), y \leftarrow 0)$
$I(A(y)) = 1$, jedoch $I(\forall y A(y)) = 0 \quad I(p)(1) = 0$

iii) $\models \exists x(p(x) \rightarrow \forall x p(x))$
Sei $\mathcal{I} = (D, I(p))$ eine Interpretation, d. h. $I(p) \subseteq D$
$I(\exists x(p(x) \rightarrow \forall x p(x)) = 1 \text{ gdw}$ es gibt $d \in D$, so dass
$I' = (D, I(p), x \leftarrow d)$, $I'(p(x) \rightarrow \forall x p(x)) = 1$
$\text{gdw } d \notin I(p)$ oder $I'(\forall x p(x)) = 1$ für ein $d \in D$
gdw es gibt ein $d \in D$ mit $d \notin I(p)$ oder $I(p) = D$

iv) Beispiele für äquivalente Formeln

- $\neg\neg A \models\!\!\dashv A$
- $W \vee A \models\!\!\dashv A \vee W \models\!\!\dashv W$
  $F \wedge A \models\!\!\dashv A \wedge F \models\!\!\dashv F$
  $A \vee A \models\!\!\dashv A \qquad A \wedge A \models\!\!\dashv A$
- $B \circ QvA \models\!\!\dashv Qv(B \circ A)$ $\quad$ Q Quantor, v nicht frei in B
- Z.B. $B \vee QvA \models\!\!\dashv Qv(B \vee A)$
- $\forall vA \models\!\!\dashv \neg\exists v(\neg A)$, $\exists vA \models\!\!\dashv \neg\forall v(\neg A)$
- $\forall xA(x) \to B \models\!\!\dashv \exists y(A(y) \to B)$
  falls y weder in $A(x)$ noch in B frei vorkommt
- $\forall x(A \to B) \models \forall xA \to \forall xB$
- $\forall vA \models\!\!\dashv \forall yA_v[y]$ $\exists vA \models\!\!\dashv \exists yA_v[y]$
  Falls Sub. erlaubt und y nicht frei in A
- **Beachte**: $\forall vB \models\!\!\dashv B \qquad \exists vB \models\!\!\dashv B$
  Falls v nicht frei in B vorkommt.

Satz 3.22 (Wichtige Sätze)

Sei $\Gamma \subseteq \mathbf{Form}, A, B \in \mathbf{Form}$.

1. **Deduktionstheorem** • $\Gamma, A \models B \;\text{ gdw }\; \Gamma \models A \to B$
2. **Modus-Ponens-Regel** • $\Gamma \models A, \Gamma \models A \to B \;\text{ so }\; \Gamma \models B$
3. **Kontrapositionsregel** • $\Gamma, A \models \neg B \;\text{ gdw }\; \Gamma, B \models \neg A$
4. **Generalisierungs-Theorem**
   Kommt $v \in Var$ in keiner Formel von Γ frei vor, so
   • $\Gamma \models A \;\text{ gdw }\; \Gamma \models \forall v\, A$
   Insbesondere: $A \models \forall v\, A$ bzw. $\models A \to \forall v\, A$,
   falls v nicht frei in A vorkommt.
5. **Ersetzungstheorem**
   *Sei $A' \in$ **Form**, A Teilformel von A'. Entsteht B' aus A' indem man einige Vorkommen der Teilformel A durch B ersetzt und gilt $A \models\!\!\!\!\dashv B$, so auch $A' \models\!\!\!\!\dashv B'$.*

Beispiel 3.23 (Anwendung der Sätze)

a) $\models \exists x \forall y A \rightarrow \forall y \exists x A$

gdw $\underbrace{\exists x \forall y A} \models \forall y \exists x A$	Deduktionstheorem
gdw $\exists x \forall y A \models \exists x A$	Generalisierungstheorem
gdw $\neg \forall x \neg \forall y A \models \neg \forall x \neg A$	Ersetzungstheorem
gdw $\forall x \neg A \models \forall x \neg \forall y A$	Kontrapositionsregel
gdw $\forall x \neg A \models \neg \forall y A$	Generalisierungstheorem
gdw $\{\forall x \neg A, \forall y A\}$	nicht erfüllbar

b) Variante des Ersetzungstheorems

A' entstehe aus A durch Substitution (erlaubte) einiger Vorkommen von x in A durch y. Dann gilt

$\models \forall x \forall y (x = y \rightarrow (A \leftrightarrow A'))$

(z. B. $A \equiv f(x,y) = g(x)$ $\quad A' \equiv f(y,y) = g(x)$)

Normalformen

Definition 3.24 (Normalformen (Präfix Normalformen))

Eine Formel ist in **PKNF** (Pränex Konjunktiver NF), falls sie die Gestalt

$$\underbrace{(\Delta v_1)\cdots(\Delta v_n)}_{\text{Präfix}}\ \{\underbrace{[A_{11}\vee\cdots\vee A_{1l_1}]\wedge\cdots\wedge[A_{m1}\vee\cdots\vee A_{ml_m}]}_{\text{Matrix}}\}$$

$\Delta\in\{\exists,\forall\}$, v_j Variablen, die in mindestens einem A_{kl} vorkommen und paarweise verschieden sind.
A_{kl} Literale, d. h. atomare oder negierte atomare Formeln.

Beispiel 3.25

$\forall x\exists Q\forall y\{[\neg p\vee x\neq a\vee x=b]\wedge[Q(y)\vee y=b]\}$

Normalformen

Satz 3.26 (Verfahren PKNF)

Jede Formel $A \in$ **Form** *lässt sich effektiv in eine logisch äquivalente Formel in PKNF (PDNF) transformieren.*

(Beachte die Länge der Formel kann exponentiell in der Länge der ursprünglichen Formel wachsen. Dies kann man vermeiden, wenn man nur erfüllungsäquivalente Formeln benötigt!).

Verfahren PKNF, PNDF

Schritte:

1. Eliminiere überflüssige Quantoren.
2. Umbenennung gebundener Variablen.
3. Eliminiere logische Verknüpfungen und Operatoren.
   $\rightarrow, \leftrightarrow,$ **If** $\ldots,$ **if** $\ldots$
4. NNF: Negation vor Atome.
5. Quantoren nach außen.
6. Matrix in KNF (DNF).

Verfahren PKNF, PDNF - Beispiele

Beispiel 3.27

$\forall x[(\forall y p(x) \vee \forall z q(z,y)) \rightarrow \neg\forall y r(x,y)]$

1. $\forall x[(p(x) \vee \forall z q(z,y)) \rightarrow \neg\forall y r(x,y)]$
2. $\forall x[(p(x) \vee \forall z q(z,y)) \rightarrow \neg\forall y' r(x,y')]$
3. $\forall x[\neg(p(x) \vee \forall z q(z,y)) \vee \neg\forall y' r(x,y')]$
4. $\forall x[(\neg p(x) \wedge \exists z \neg q(z,y)) \vee \exists y' \neg r(x,y')]$
5. $\forall x \exists z \exists y'[(\neg p(x) \wedge \neg q(z,y)) \vee \neg r(x,y')]$
6. $\forall x \exists z \exists y'[(\neg p(x) \vee \neg r(x,y')) \wedge (\neg q(z,y) \vee \neg r(x,y'))]$
   (Ist PKNF)
7. PDNF $\forall x \exists z \exists y'[(\neg p(x) \wedge \neg q(z,y)) \vee \neg r(x,y')]$

Unentscheidbarkeit der Allgemeingültigkeit

Satz 4.1

Es gibt eine Menge von Formeln in den Konstanten a (0-stellig), f_0, f_1 (1-stellig) und der Prädikatskonstanten p (2-stellig), für die die Allgemeingültigkeit unentscheidbar ist.

- *(In den Formeln kommt keine „$=$“ vor).*

Beweis:

Reduziere effektiv unentscheidbares Problem (z.B. PCP) auf die Entscheidung der Allgemeingültigkeit bestimmter Formeln.

Unentscheidbarkeit der Allgemeingültigkeit (Forts.)

- **PCP**: $\Sigma = \{0,1\}$ $S = \{(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_n, \beta_n)\}$ $n \geq 1$
  mit $\alpha_i, \beta_i \in \Sigma^*$
  S hat eine **Lösung** gdw es gibt $j_1, \dots, j_l \in [1 \dots n], l > 0$ mit

$$\alpha_{j1}\alpha_{j2} \cdots \alpha_{jl} \equiv \beta_{j1}\beta_{j2} \cdots \beta_{jl}$$

- z. B.
  $S = ((0, 000), (0100, 01), (001, 1))$ hat die Lösung
  $j_1 = 1, j_2 = 3$, $0001 \equiv 0001$.
- **Problem PCP**: Eingabe S. Entscheide, ob S Lösung hat.
  Ist nicht rekursiv entscheidbar (aber rekursiv aufzählbar).

$\hookrightarrow$ **Reduktion**: Zu S berechne eine Formel A_S mit
S hat Lösung gdw A_S ist allgemeingültig.

Unentscheidbarkeit der Allgemeingültigkeit (Forts.)

Sprache PL1 mit:

- a F-Konstante, f_0, f_1 1-st. F-Konstanten, p 2-stellige P-Konstante.
- $\sigma_i \in \{0,1\}$ $(1 \leq i \leq m)$, so $f_{\sigma_m}(\cdots(f_{\sigma_2}(f_{\sigma_1}(x)))\cdots)$ Term, als Kodierung von Wörter: $f_{\underbrace{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_m}_{\in\Sigma^*}}(x)$. Beachte die Reihenfolge!
- $S = \{(\alpha_1,\beta_1),(\alpha_2,\beta_2),\cdots,(\alpha_n,\beta_n)\}$ $n \geq 1$ $\Sigma = \{0,1\}$

$$\hookrightarrow A_S \equiv \quad [\bigwedge_{j=1}^{n} p(f_{\alpha_j}(a), f_{\beta_j}(a)) \wedge$$
$$\forall x \forall y [p(x,y) \rightarrow \bigwedge_{j=1}^{n} p(f_{\alpha_j}(x), f_{\beta_j}(y))]]$$
$$\rightarrow \exists z p(z,z)$$

Beispielreduktion

Beispiel 4.2

- Die zugeordnete Formel A_S zu $S = ((0, 000), (0100, 01), (001, 1))$ ist:

  $$[p(f_0(a), f_{000}(a)) \wedge p(f_{0100}(a), f_{01}(a)) \wedge p(f_{001}(a), f_1(a)) \wedge \\ \forall x \forall y [\bigwedge_{1 \leq j \leq 3} p(x, y) \rightarrow p(f_{\alpha_j}(x), f_{\beta_j}(x))]] \rightarrow \exists z p(z, z)$$

- **Behauptung**:
  S hat Lösung gdw A_S allgemeingültig.

Beweis der Behauptung

$$[\bigwedge_{j=1}^{n} p(f_{\alpha_j}(a), f_{\beta_j}(a)) \wedge \forall x \forall y [p(x,y) \rightarrow \bigwedge_{j=1}^{n} p(f_{\alpha_j}(x), f_{\beta_j}(y))]] \rightarrow \exists z p(z,z)$$

„$\curvearrowleft$“: Angenommen A_S allgemeingültig, I Interpretation mit $D = \{0,1\}^*$, $a \leftarrow \varepsilon$, $f_0 : x \rightarrow x0$, $f_1 : x \rightarrow x1$
$p(x,y)$ gdw $x \equiv \alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_m}$, $y \equiv \beta_{j_1} \dots \beta_{j_m}$ für $j_1, \dots, j_m$ ($j_i \in [1 \dots n]$ $\;m > 0$).

„$\curvearrowright$“: Angenommen PCP S habe Lösung $j_1 \dots j_m$, d. h.
$\alpha_{j_1} \alpha_{j_2} \cdots \alpha_{j_m} \equiv \beta_{j_1} \beta_{j_2} \dots \beta_{j_m}$
$\rightsquigarrow p(f_{\alpha_{j_1} \alpha_{j_2} \cdots \alpha_{j_m}}(a), f_{\beta_{j_1} \beta_{j_2} \dots \beta_{j_m}}(a))$ wahr,
also ist A_S allgemeingültig.

! Es gibt weitere Unentscheidbarkeitsresultate die wir später noch behandeln werden. Es sei jedoch erwähnt, dass die Grenzen zwischen den entscheidbaren und unentscheidbaren Fälle der Allgemeingültigkeit sehr genau bekannt sind. (Siehe etwa Börger).

Hauptsätze der Prädikatenlogik erster Stufe

Sei $\mathcal{L}$ Sprache der PL1

Satz 4.3

a) *Die Menge der allgemeingültigen Formeln* $\{A \in \textbf{Form}(\mathcal{L}) : \ \models A\}$ *ist* **rekursiv aufzählbar** *(i. Allg. nicht rekursiv entscheidbar).*

Es gibt ein rekursives deduktives System $\mathcal{F}$ für $\mathcal{L}$ mit

$$\underset{\mathcal{F}}{\vdash} A \ \text{ gdw } \ \models A \quad (A \in \textbf{Form}(\mathcal{L}))$$

Hauptsätze der Prädikatenlogik erster Stufe (Forts.)

b) **Kompaktheitssatz für PL1**: *Sei* $\Sigma \subseteq \textbf{Form}(\mathcal{L})$.
Σ *erfüllbar* gdw *jede endliche Teilmenge von* Σ *ist erfüllbar.*

c) Insbesondere: $\Sigma \subseteq \textbf{Form}(\mathcal{L}), A \in \textbf{Form}(\mathcal{L})$:

$$\Sigma \models A \text{ gdw es gibt } \Sigma_0 \subseteq \Sigma, \Sigma_0 \text{ endlich} : \Sigma_0 \models A$$

Hauptsätze der Prädikatenlogik erster Stufe (Forts.)

d) **Satz von Löwenheim-Skolem**:
$\Sigma \subseteq \mathbf{Form}(\mathcal{L})$ *erfüllbar* gdw *es gibt eine Interpretation* $I = (D, I_c, I_v)$, *wobei* D *abzählbar oder endlich ist, die* Σ *erfüllt*.

(D kann als eine Termmenge über die konstanten Symbole gewählt werden).

Beachte jedoch: nicht gültig für PL2

Negative Ergebnisse für die Prädikatenlogik zweiter Stufe

Satz 4.4 (von Gödel)

Für Sprachen von PL2- und PL2 Formeln:

a) *Die Menge der allgemeingültigen Formeln 2-Stufe für PL2-Sprachen ist nicht rekursiv aufzählbar.*

b) *Es gibt kein rekursives „deduktives System", dessen Theoreme die Menge der allgemeingültigen Formeln zweiter Stufe sind.*

c) *Es gibt erfüllbare Mengen von Formeln 2-Stufe, die keine abzählbaren Modelle haben.*

Deduktive Systeme für PL1

Definition 4.5 (Deduktive Systeme für PL1)

Sei $\mathcal{L}$ Sprache 1-Stufe mit Formeln in $\neg, \rightarrow, \forall, =$. $\mathcal{F} = (\mathbf{Ax}, \mathbf{R})$ bestimmt durch Axiomenmenge Ax (Axiomenschema) und Menge R von Regeln (Regelschema).

- Ax enthält **alle Generalisierungen** von folgenden durch Schemata beschriebenen Formelmengen:

  Ax1: $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
  Ax2: $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
  Ax3: $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$
  Ax4: $\forall x\, A \rightarrow A_x[t]$, falls $A_x[t]$ erlaubt

Deduktive Systeme für PL1 (Forts.)

Ax5: $\forall x\,(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall x\, A \rightarrow \forall x\, B)$
(Ax5': $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B)$ x nicht frei in A)
Ax6: $A \rightarrow \forall x\, A$, falls x nicht frei in A vorkommt
Ax7: $x = x$
Ax8: $x = y \rightarrow (A \rightarrow A')$, wobei A' aus A durch Ersetzen einiger freier Vorkommen von x durch y (erlaubt)

- R enthält alle Regeln, die vom **Regelschema Modus Ponens**

MP $\dfrac{A, A \rightarrow B}{B}$ Modus Ponens beschrieben werden.

Deduktive Systeme für PL1 (Forts.)

- **Alternatives** Deduktionssystem $\mathcal{F}' = (\mathbf{Ax}, \mathbf{R}')$
- R' enthält MP-Regel und **Generalisierungsregel.**

  GR $\dfrac{A}{\forall x A}$ Generalisierung (ohne Einschränkungen)

! **Beachte**: Ax enthält nur allgemeingültige Formeln. MP und GR-Regel führen nicht aus der Menge der allgemeingültigen Formeln hinaus.

Ziel

- $\underset{\mathcal{F}}{\vdash} A$ gdw $\underset{\mathcal{F}'}{\vdash} A$ gdw $\models A$

  $\rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow$ Korrektheit
- $\Sigma \underset{\mathcal{F}}{\vdash} A$ gdw $\Sigma \models A$

  $\rightsquigarrow$ Korrektheit
- $\Sigma \underset{\mathcal{F}}{\vdash} A$, so $\Sigma \underset{\mathcal{F}'}{\vdash} A$ Umkehrung i. Allg. nicht
- $\Sigma \underset{\mathcal{F}'}{\vdash} A \not\rightsquigarrow \Sigma \underset{\mathcal{F}}{\vdash} A$ (**gilt nur für Σ Abg. Formeln**).

  z. B. $p(x) \underset{\mathcal{F}'}{\vdash} \forall x p(x)$ aber $p(x) \not\models \forall x p(x)$

- **Bemerkung**: Alle Tautologien (taut. Theorem) sind herleitbar in $\mathcal{F}$, d. h. Theoreme von $\mathcal{F}$.

Beispiele

Beispiel 4.6

Verwende $\exists y\ A$ als Abkürzung für $\neg\forall y\ \neg A$

1. $\vdash_{\mathcal{F}} \forall x\ (p(x) \longrightarrow \exists y\ p(y))$

$$
\begin{array}{lll}
B_1 \equiv & \forall x\ [(\forall y\ \neg p(y) \longrightarrow \neg p(x)) & \\
& \longrightarrow (p(x) \longrightarrow \neg\forall y\ \neg p(y))] & \text{(Ax3,Gen)} \\
B_2 \equiv & \forall x\ ((\forall y\ \neg p(y) \longrightarrow \neg p(x)) \longrightarrow & \\
& (p(x) \longrightarrow \neg\forall y\ \neg p(y))) \longrightarrow [\forall x\ (\forall y\ \neg p(y) & \\
& \longrightarrow \neg p(x)) \longrightarrow \forall x\ (p(x) \longrightarrow \neg\forall y\ \neg p(y))] & \text{(Ax5)} \\
B_3 \equiv & \forall x\ (\forall y\ \neg p(y) \longrightarrow \neg p(x)) \longrightarrow & \\
& \forall x\ (p(x) \longrightarrow \neg\forall y\ \neg p(y)) & \text{(MP)} \\
B_4 \equiv & \forall x\ (\forall y\ \neg p(y) \longrightarrow \neg p(x)) & \text{(Ax4,Gen)} \\
B_5 \equiv & \forall x\ (p(x) \longrightarrow \exists y\ p(y)) & \text{(MP)}
\end{array}
$$

Beispiele (Forts.)

2. $\vdash_{\mathcal{F}} \forall x\, A \rightarrow \exists x\, A$

Beweis:

$\vdash \forall x\, \neg A \rightarrow \neg A$	(Ax4)
$\vdash (\forall x\, \neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow \neg \forall x\, \neg A)$	(Ax3)
$\vdash A \rightarrow \neg \forall x\, \neg A$	(MP)
$\vdash \forall x\, A \rightarrow A$	(Ax4)
$\vdash (\forall x\, A \rightarrow A) \rightarrow$	
$((A \rightarrow \neg \forall x\, \neg A) \rightarrow (\forall x\, A \rightarrow \neg \forall x\, \neg A))$	(Taut)
$\vdash (A \rightarrow \neg \forall x\, \neg A) \rightarrow (\forall x\, A \rightarrow \neg \forall x\, \neg A)$	(MP)
$\vdash \forall x\, A \rightarrow \exists x\, A$	(MP)

■

Beispiele (Forts.)

3. $\vdash t = t \qquad \vdash (x = y) \rightarrow (y = x)$
   $\vdash ((x = y) \rightarrow ((y = z) \rightarrow (x = z))$
   Folgen aus Ax, $\forall x(x = x)$, $(x = y) \rightarrow A(x) \leftrightarrow A(y))$ für A (erlaubt).
   $\vdash ((t_1 = t_1') \wedge \cdots \wedge (t_n = t_n')) \rightarrow (A(t_1, \ldots, t_n) \leftrightarrow A(t_1', \ldots, t_n'))$, wobei $A(x_1, \ldots, x_n)$ eine Formel mit mindestens n-freien Variablen und Substitutionen erlaubt ($x_i \leftarrow t_i$ bzw. $x_i \leftarrow t_i'$).
   Spezialfall:
   $\vdash ((t_1 = t_1') \wedge \cdots \wedge (t_n = t_n')) \rightarrow (f(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1', \ldots, t_n'))$

Beweisidee

- $\forall x[(x = y) \rightarrow (A(x) \leftrightarrow A(y))]$
- $\forall x[(x = y) \rightarrow (A(x) \leftrightarrow A(y))] \rightarrow ((t = y) \rightarrow (A(t) \leftrightarrow A(y))$
- $(t = y) \rightarrow (A(t) \leftrightarrow A(y))$
- $\forall y(t = y) \rightarrow (A(t) \leftrightarrow A(y))$
- $(t = t') \rightarrow (A(t) \leftrightarrow A(t'))$

Deduktionstheorem - Generalisierungstheorem

Satz 4.7 (Hauptsätze für $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$)

*Seien $\Gamma \subseteq$ **Form**, $A, B \in$ **Form**.*

a) **Deduktionstheorem**

1) $\Gamma \underset{\mathcal{F}}{\vdash} A \to B \ \text{ gdw } \ \Gamma, A \underset{\mathcal{F}}{\vdash} B$
2) $\Gamma \underset{\mathcal{F}'}{\vdash} A \to B \ \text{ gdw } \ \Gamma, A \underset{\mathcal{F}'}{\vdash} B$, *falls die Generalisierung nicht auf eine in A frei vorkommende Variable angewandt wurde.*
3) $\Gamma, A \underset{\mathcal{F}'}{\vdash} B \ \text{ gdw } \ \Gamma \underset{\mathcal{F}'}{\vdash} \tilde{A} \to B$,
wobei $\tilde{A}$ ein universeller Abschluss von A ist.

b) **Generalisierungstheorem:**

1) *Falls $\Gamma \underset{\mathcal{F}}{\vdash} A$ und x nicht frei in Γ vorkommt, so $\Gamma \underset{\mathcal{F}}{\vdash} \forall x\, A$*
2) $\Gamma \underset{\mathcal{F}'}{\vdash} A \text{ gdw } \Gamma \underset{\mathcal{F}'}{\vdash} \forall x\, A$

c) **Kontrapositionstheorem:** *Für $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$*

- $\Gamma, A \vdash \neg B \text{ gdw } \Gamma, B \vdash \neg A$

Deduktionstheorem - Generalisierungstheorem (Forts.)

$\hookrightarrow$ Es gelten somit für die hier vorgestellten prädikatenlogischen Systeme die für das deduktive System der Aussagenlogik entsprechenden Sätze. Vorsicht muss man beim System $\mathcal{F}'$ mit dem Deduktionstheorem haben, da wir dafür eine allgemeinere Generalisierungsregel zugelassen haben die semantisch nicht immer korrekt ist.

- Hinzu kommt das Generalisierungstheorem in den zwei Varianten.

Beweis Deduktionstheorem

1. „$\curvearrowright$" Aus $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ folgt auch $\Gamma, A \vdash A \rightarrow B$. Da auch $\Gamma, A \vdash A$ gilt, folgt $\Gamma, A \vdash B$, wegen MP ($\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$).
   „$\curvearrowleft$" Ang. $\Gamma, A \underset{\mathcal{F}}{\vdash} B$. Behauptung: $\Gamma \underset{\mathcal{F}}{\vdash} A \rightarrow B$
   - Induktion über Beweislänge: Axiom oder Hypothese

     $\Gamma \vdash B$ (Ax)
     $\Gamma \vdash B \rightarrow (A \rightarrow B)$ (Ax)
     $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ (MP)
   - Schritt ist MP-Schritt

Schritt j :	$\Gamma, A \vdash C$	IV:$\Gamma \vdash A \rightarrow C$
$\vdots$	$\vdots$	
Schritt k :	$\Gamma, A \vdash C \rightarrow B$	IV : $\Gamma \vdash A \rightarrow (C \rightarrow B)$
$\vdots$	$\vdots$	Ax2+MP
Schritt $n+1$:	$\Gamma, A \vdash B$	$\Gamma \vdash A \rightarrow B$

Beweis Deduktionstheorem in $\mathcal{F}'$

2. In $\mathcal{F}'$ „$\curvearrowleft$“ Generalisierungsregel

$$\Gamma, A \vdash C$$
$$\vdots$$
$$\Gamma, A \vdash \forall x C \quad x \text{ nicht frei in } A$$

Dann IV:

$$\begin{array}{ll}
\Gamma \vdash A \rightarrow C & \\
\Gamma \vdash \forall x(A \rightarrow C) & \text{(Gen)} \\
\Gamma \vdash \forall x(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow \forall x C) & \text{(Ax5)} \\
& x \text{ nicht frei in } A \\
\Gamma \vdash A \rightarrow \forall x C &
\end{array}$$

Definition 4.8

Sei $\Gamma \subseteq$ **Form**, Γ heißt **konsistent**, falls es kein $A \in$ **Form** gibt, mit $\Gamma \underset{\mathcal{F}}{\vdash} A$ und $\Gamma \underset{\mathcal{F}}{\vdash} \neg A$.

Konsistenz im deduktiven System

Bemerkung 4.9

- Γ *ist konsistent* gdw *jede endliche Teilmenge von* Γ *ist konsistent.*
- *Ist* Γ *inkonsistent, dann gilt* $\Gamma \underset{\mathcal{F}}{\vdash} A$ *für jede Formel* A*.*
- $\Gamma \cup \{\neg A\}$ *inkonsistent* gdw $\Gamma \vdash A$*.*
- $\Gamma \cup \{A\}$ *inkonsistent* gdw $\Gamma \vdash \neg A$*.*
- *Ist* Γ *inkonsistent, so ist* Γ *nicht erfüllbar: Sei nämlich* A *mit* $\Gamma \vdash A$ *und* $\Gamma \vdash \neg A$*.* I *Interpretation, die* Γ *erfüllt (wegen* $\Gamma \models A$ *und* $\Gamma \models \neg A$*) folgt aber* I *erfüllt* $\{A, \neg A\}$ $\lightning$
- *Die Menge der allgemeingültigen Formeln ist konsistent.*
- *Die Menge der Theoreme von* $\mathcal{F}$ $(\mathcal{F}')$ *ist konsistent.*

Vollständigkeit der Axiomatisierung

Satz 4.10 (Gödel)

Vollständigkeit der Axiomatisierung
Seien $A \in \textbf{Form}, \Sigma \subseteq \textbf{Form}$, *dann gilt:*

a) $\models A \;\; \text{gdw} \;\; \underset{\mathcal{F}}{\vdash} A \;\; \text{gdw} \;\; \underset{\mathcal{F}'}{\vdash} A.$

b) Σ *konsistent* $\;\text{gdw}\;$ Σ *erfüllbar.*

c) $\Sigma \underset{\mathcal{F}}{\vdash} A \;\; \text{gdw} \;\; \Sigma \models A.$

Beweis:

Siehe Yashuhara oder Enderton. ■

Theorien erster Stufe

Definition 4.11

Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache erster Stufe (fixiert durch die Funktions- und -Prädikatskonstanten). $\Gamma \subseteq \textbf{Form}(\mathcal{L})$ heißt **logische Theorie erster Stufe**, falls Γ abgeschlossen ist gegenüber logischer Folgerung, d. h. $A \in \textbf{Form} \quad \Gamma \models A$, so $A \in \Gamma$.

- **Beachte**: Alternative Definitionen in Literatur:
  - Γ Theorie, falls Γ abgeschlossen gegen MP und Generalisierung.
  - Γ Menge **abgeschlossener Formeln**, abgeschlossen gegen logische Folgerung.
- T als generische Bezeichnung für Theorien.

Theorien erster Stufe (Forts.)

Bemerkung 4.12

Sei $\mathcal{L}$ Sprache 1-Stufe.

a) $T_{\mathcal{L}} = \{A \mid A \in \mathbf{Form}(\mathcal{L}), \textit{ allgemeingültig}\}$ *ist Theorie. Sie ist in jeder Theorie über $\mathcal{L}$ enthalten.*

b) $T_{\Sigma} = \{A \mid A \in \mathbf{Form}(\mathcal{L}), \quad \Sigma \models A\}$ *für* $\Sigma \subseteq \mathbf{Form}(\mathcal{L})$ *ist eine Theorie,* **die von Σ erzeugte Theorie** *oder durch die Axiome Σ definierte Theorie.*

c) *Ist T eine Theorie, so* $T \underset{\mathcal{F}}{\vdash} A \text{ gdw } A \in T$.
T *inkonsistent* gdw *es gibt A mit $A, \neg A \in T$, d. h.* $T = \mathbf{Form}$.

Theorien erster Stufe (Forts.)

d) *Sei $\mathcal{R}$ Relationalsystem (Struktur) für $\mathcal{L}$ $I = (D, I_c)$. Dann ist $T_{\mathcal{R}} = \{A \mid A \in \textbf{Form}(\mathcal{L}),\ \ \mathcal{R} \models A\}$ eine Theorie:*
Die Theorie von $\mathcal{R}$ *Schreibe auch: $Th(\mathcal{R})$.*

- *Verwende hier $\mathcal{R} \models A$, falls für jede Interpretation der Variablen gilt $\mathcal{R}, I_v \models A$. Insbesondere $\mathcal{R} \models A$ gdw $\mathcal{R} \models \hat{A}$, wobei $\hat{A}$ ein universeller Abschluss von A ist.*
  ($T_{\mathcal{R}} \models A$ zeige $\mathcal{R} \models A$ klar, da $\mathcal{R} \models T_{\mathcal{R}}$)

$\hookrightarrow$ *Insbesondere:*
- *$T_{\mathcal{R}}$ ist konsistent für jede Struktur $\mathcal{R}$.*

e) *$T \subseteq \textbf{Form}(\mathcal{L})$ ist Theorie* gdw
$\{A \mid A \in \textbf{Form}(\mathcal{L}), \models A\} \subseteq T$ und T ist abgeschlossen gegenüber MP.

Theorien erster Stufe (Forts.)

Definition 4.13

Sei T eine Theorie erster Stufe über $\mathcal{L}$

a) T heißt **vollständig**, falls für jede abgeschlossene Formel A gilt: $A \in T$ oder $\neg A \in T$.

b) T heißt **(endlich) rekursiv axiomatisierbar**, falls es eine (endliche) rekursive Teilmenge $\Sigma \subseteq \textbf{Form}$ gibt mit $T_\Sigma = \{A \in \textbf{Form}(\mathcal{L}) \mid \Sigma \models A\} = T$.

c) T heißt **entscheidbar**, falls T eine rekursiv entscheidbare Teilmenge von **Form** ist.

Fragen: Finde (endliche) Axiomatisierungen wichtiger Theorien. Insbesondere wann gilt $T_{\mathcal{R}} = T_\Sigma$ für Σ rekursiv.

Folgerungen

Bemerkung 4.14

a) *$T_{\mathcal{R}}$ ist vollständig für jede Struktur $\mathcal{R}$.*
$T_{\mathcal{R}}$ ist somit konsistent und vollständig.

b) *T erfüllbar (T hat eine Modell)* gdw *T konsistent.*

c) *T ist rekursiv axiomatisierbar, so T rekursiv aufzählbar.*

d) *Ist T vollständig, konsistent und rekursiv axiomatisierbar.*
Dann ist die Menge der Aussagen von T rekursiv entscheidbar.

•*A abgeschlossen, so A oder $\neg A$ in T.*
Da T rekursiv aufzählbar, findet man A oder $\neg A$ in dieser Aufzählung effektiv.

Folgerungen (Forts.)

e) *Ist T vollständig und konsistent, dann gilt $T = T_{\mathcal{R}}$ für eine Struktur $\mathcal{R}$.*
$\bullet \mathcal{R} \models T$ existiert, da T erfüllbar, d. h. $T \subseteq T_{\mathcal{R}}$.
Angenommen $T \subsetneq T_{\mathcal{R}}$. Dann gibt es abgeschlossene Formel $A \in T_{\mathcal{R}}$ mit $A \notin T$. Da T vollständig ist, muss $\neg A \in T$ gelten, d. h. $A, \neg A \in \Gamma_{\mathcal{R}}$ ↯

Frage: Wann ist T_{Σ} vollständig für rekursive Σ?
$\rightsquigarrow$ Entscheidbarkeit!

Beispiele

Beispiel 4.15

$Th(\mathbb{N})$ Theorie der natürlichen Zahlen.
$\mathcal{R} = \langle \mathbb{N}; 0, S, +, *, = \rangle$ natürliche Interpretation der Sprache der Arithmetik Konst. $0, S, +, *$ Funktionskonstante $n \in \mathbb{N}$,
$\tilde{n} \equiv S(S \cdots (S(0) \cdots)$ Schreibe auch: $(S^n 0)$.

Die Sätze von Gödel:

a) $Th(\mathbb{N})$ ist nicht rekursiv entscheidbar.
b) $Th(\mathbb{N})$ ist nicht rekursiv axiomatisierbar.
   Oder
c) jede rekursive Axiomenmenge ist nicht vollständig für $Th(\mathbb{N})$.

Beispiele (Forts.)

$\hookrightarrow$ Insbesondere: **Peano Axiome**

P_1 $\forall x \forall y\,(S(x) = S(y) \rightarrow x = y)$
P_2 $\forall x\; S(x) \neq 0$
P_3 $\forall x\; x + 0 = x$
P_4 $\forall x \forall y\; x + S(y) = S(x + y)$
P_5 $\forall x\; x * 0 = 0$
P_6 $\forall x \forall y\; x * S(y) = x * y + x$
P_7 $A_x[0] \rightarrow (\forall x\,(A \rightarrow A_x[S(x)]) \rightarrow \forall x\; A)$,
(A Formel mit x als einzige frei vorkommende Variable in A)

Sind **keine** Axiomatisierung von $Th(\mathbb{N})$.

Beispiele (Forts.)

Beispiel 4.16 (Elementare Arithmetik (Arith. 1-Stufe))

Basis der Sprache: $(\{0, 1, +, *\}, \{<\})$ Interpretation: $I_A = (\mathbb{N}, I_c)$
natürliche Interpretation I_c

$\hookrightarrow$ $Th(I_A)$ vollständig nicht rekursiv axiomatisierbar.

Beispiele (Forts.)

Beispiel 4.17

Pressburger Arithmetik: Sprache $(\{0,1,+\},\{<\})$
Interpretation $I_{PA} = (\mathbb{N}, I_c)$, I_c wie gehabt.

- $Th(I_{PA})$ ist vollständig, entscheidbar und endlich axiomatisierbar.

$$Ax_< \begin{cases} \forall x \neg (x < 0) \\ \forall x \forall y \; x < Sy \leftrightarrow x < y \vee x = y \\ \forall x \forall y \; x < y \vee x = y \vee y < x \end{cases}$$

Beispiele (Forts.)

Beispiel 4.18

$\mathbb{R}$ reelle Zahlen, Sprache $(\{0, 1, +, *, \cdots\}, \{<\})$
Sprache der Körpertheorie.

$Th(\mathbb{R})$ ist rekursiv entscheidbar (Quantorenelimination).
$Th(\mathbb{R})$ ist rekursiv axiomatisierbar.

Beispiele (Forts.)

Axiomatisierung:

- Axiome für Körper
- Nullstellen für Polynome mit ungeradem Grad + Ordnungsaxiome:

$$
\begin{array}{ll}
\forall x & \neg(x < x) \\
\forall x \forall y & \forall z((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z) \\
\forall x \forall y & x < y \vee y = x \vee y < x \\
\forall x \forall y \forall z & x < y \rightarrow x + z < y + z \\
\forall x \forall y & 0 < x \wedge 0 < y \rightarrow 0 < x * y \\
\forall x & 0 < x \rightarrow \exists y (y * y = x)
\end{array}
$$

Beispiele (Forts.)

Reell abgeschlossene Körper
$\mathbb{R}$ ist „Beispiel" dafür, Tarski

$\hookrightarrow$ Wichtige Folgerungen: Entscheidbarkeit der Ebenen euklidische Geometrie!

Beispiel 4.19

Theorie der Ordnung mit Gleichheit $(<, =)$ ist weiteres Beispiel einer entscheidbaren Theorie.

Aufzählungsverfahren für PL-1

- Σ rekursiv, $\Sigma \subseteq$ **Form**, $T_\Sigma = \{A \mid \Sigma \models A\}$ r.a.
- $\mathcal{R}$ Struktur, $T_\mathcal{R} = \{A \mid \mathcal{R} \models A\}$ i. Allg. nicht r.a. (vollst.)

1. Deduktive Beweismethoden (T_Σ)
2. Induktive Beweismethoden ($T_\mathcal{R}$)

! Hier nur 1. Grundlage: $\Sigma \models A \text{ gdw } \{\Sigma, \neg A\}$ nicht erfüllbar.