

Einfache Folgerungen

Bemerkung 1.8

Beispiele

1. $(p \vee (\neg p)), ((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)), p \rightarrow (q \rightarrow p), (p \rightarrow p), (p \rightarrow \neg\neg p)$ und A aus Folgerung 1.6 sind *Tautologien*.

$(p \wedge (\neg p))$ ist *widerspruchsvoll*.

$A \in \text{Taut}$ *gdw* $\neg A$ *widerspruchsvoll*

$(p \wedge q)$ ist *erfüllbar* jedoch *keine Tautologie* und *nicht widerspruchsvoll*.

Die Mengen Taut, Sat sind *entscheidbar*.

Beachte $\text{Taut} \subset \text{Sat}$.

Logische Äquivalenz

Definition 1.12 (Logische Äquivalenz)

Seien $A, B \in F$ heißen **logisch äquivalent** mit der Schreibweise $A \models B$, falls für jede Bewertung φ gilt: $\varphi(A) = \varphi(B)$.

Insbesondere ist dann $A \models B$ und $B \models A$.

► Einige Beispiele für logisch äquivalente Formeln:

1. $A \models \neg(\neg A)$, $A \models A \vee A$, $A \models A \wedge A$
2. $A \wedge B \models B \wedge A$ und $A \vee B \models B \vee A$,
3. $A \wedge (B \wedge C) \models (A \wedge B) \wedge C$ und $A \vee (B \vee C) \models (A \vee B) \vee C$,
4. $A \wedge (B \vee C) \models (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ und
 $A \vee (B \wedge C) \models (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (**Distributiv**)

Logische Äquivalenz (Fort.)

Definition 1.14 (Vollständige Operatorenmengen)

Eine Menge $OP \subseteq \{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \dots\}$ heißt **vollständig**, falls es zu jedem $A \in F$ eine logisch äquivalente A -Form $B \in F(OP)$ gibt.

- ▶ Vollständige Operatorenmengen für die Aussagenlogik sind z.B.:
 - $\{\neg, \rightarrow\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee, \wedge\}$, $\{\text{false}, \rightarrow\}$
- ▶ Dabei ist false eine Konstante, mit $\varphi(\text{false}) = 0$ für jede Bewertung φ . Offenbar gilt $\neg A \models\!\!\!\not\models (A \rightarrow \text{false})$.
- ▶ **Normalformen**:: DNF (Disjunktive Normalform), KNF (Konjunktive Normalform), KDNF, KKNF (Kanonische Formen).

Boolsche Funktionen

Jede Aussageform $A(p_1, \dots, p_n)$ stellt in natürlicher Form eine Boolsche Funktion $f_A : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ dar. Nämlich durch die Festlegung $f_A(b_1, \dots, b_n) = \varphi_{\bar{b}}(A)$ mit der Bewertung $\varphi_{\bar{b}}(p_i) = b_i$

- ▶ Man kann leicht durch Induktion nach n zeigen, dass jede Boolsche Funktion $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ ($n > 0$) sich in obiger Form durch eine Aussageform in p_1, \dots, p_n und einer vollständigen Operatorenmenge darstellen lässt.
- ▶ Die Boolsche Algebra über \mathbb{B} hat als übliche Operatormenge **true, false, not, or, and** mit der standard Interpretation.
- ▶ Für andere Operatormengen die etwa **nand, nor** enthalten, siehe Digitale Logik (Gatter: Ein- Ausgabesignale, Verzögerung. **nand, nor** Gattern werden bevorzugt, da nur zwei Transistoren nötig).

Die Anforderungen, d.h. bei welchen Kombinationen der Werte der Zustände eine Alarmaktivierung notwendig ist, werden durch den Medizin-Experten festgelegt. Sie seien in folgender Tabelle fixiert.

I/O - Tabelle

A	B	C	O
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Logischer Entwurf: Betrachte die Zeilen in denen O den Wert 1 hat und stelle eine KDNF auf (Disjunktion von Konjunktionen von Literalen, wobei ein Literal eine atomare Form oder die Negation einer solchen ist).
 $(\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)$

Deduktiver Aufbau der Aussagenlogik

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit einem axiomatischen Aufbau der Aussagenlogik mittels eines **“Deduktiven Systems”** oder eines **„Kalküls“**.

Eine syntaktisch korrekte Formel in einem Deduktiven System wird **“Theorem”** genannt, wenn sie durch rein mechanische Anwendungen der Regeln des Systems aus den Axiomen des Systems **“abgeleitet”** werden kann.

Man kann mehrere deduktive Systeme angeben, in denen aussagenlogische Formeln genau dann Theoreme sind, wenn sie auch Tautologien sind.

Deduktive Systeme-Kalküle

- ▶ Die Menge $T = T(\mathcal{F})$ der **Theoreme** ist definiert durch:
 1. $Ax \subseteq T$ (d.h. alle Axiome sind Theoreme)
 2. Sind $A_1, \dots, A_n \in T$ und ist die Regel $\frac{A_1, \dots, A_n}{A}$ in R , dann ist $A \in T$.
 3. T ist die kleinste Menge von Formeln, die (1) und (2) erfüllt.
- ▶ Man schreibt für $A \in T(\mathcal{F})$ auch $\vdash_{\mathcal{F}} A$ oder einfach $\vdash A$ und sagt "A ist in \mathcal{F} herleitbar".
- ▶ **Deduktiver Folgerungsbegriff:** Sei $\Sigma \subseteq F$, $A \in F$, dann bedeutet $\Sigma \vdash_{\mathcal{F}(Ax, R)} A$ nichts anderes als $\vdash_{\mathcal{F}(Ax \cup \Sigma, R)} A$.
Sprechweise: "A ist in \mathcal{F} aus Σ herleitbar".
- ▶ Sind \mathcal{F}_1 und \mathcal{F}_2 deduktive Systeme über der Formelmenge F und gilt $T(\mathcal{F}_1) = T(\mathcal{F}_2)$ so nennt man sie **äquivalent**.

Bemerkung

Bemerkung 1.16

1. *Eigenschaften der Elemente von T werden durch strukturelle Induktion bewiesen.*

T wird von einer Relation $R' \subseteq F^ \times F$ erzeugt.*

Eine Formel A ist ein Theorem oder ist in \mathcal{F} herleitbar, falls es eine endliche Folge von Formeln B_0, \dots, B_n gibt mit $A \equiv B_n$ und für $0 \leq i \leq n$ gilt:

$B_i \in Ax$ oder es gibt l und $i_1, \dots, i_l < i$ und eine Regel

$$\frac{B_{i_1} \dots B_{i_l}}{B_i} \in R.$$

- ▶ *Die Folge B_0, \dots, B_n heißt auch **Beweis (Herleitung)** für A in \mathcal{F} .*
- ▶ *Das bedeutet $\vdash A$ gilt genau dann, wenn es einen Beweis B_0, \dots, B_n mit $A \equiv B_n$ gibt.*

Bemerkung (Fort.)

2. Die Menge T der Theoreme ist *rekursiv aufzählbar* (denn Ax und R sind rekursiv). Die Menge der Beweise

$$\text{Bew} := \{B_1 \star B_2 \star \dots \star B_n \mid B_1, \dots, B_n \text{ ist Beweis}\}$$

ist rekursiv. (Siehe Argumentation von $L(G)$ ist rekursiv aufzählbar für Grammatiken G).

- ▶ Ist Σ rekursiv entscheidbar, so gelten obige Aussagen entsprechend. Insbesondere ist $\text{Fol}_{\mathcal{F}}(\Sigma) = \{A \mid \Sigma \vdash_{\mathcal{F}(Ax, R)} A\}$ rekursiv aufzählbar.
- ▶ **Beachte:** Beweise sind im allgemeinen nicht eindeutig. Es wird im allgemeinen nicht verlangt, dass T von R *frei* erzeugt wird.

Bemerkung (Fort.)

3. *Gibt es ein deduktives System \mathcal{F}_0 , so dass $\vdash_{\mathcal{F}_0} A$ genau dann gilt, wenn $\models A$ gilt?*

- *Hierzu werden Ax und R häufig endlich beschrieben durch **Schemata**.*

Beispielsweise beschreibt das Axiom $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$ die Menge $\{A_0 \mid \text{es gibt } A, B \in F \text{ mit } A_0 \equiv (A \rightarrow (B \rightarrow A))\}$

und die Regel

$\frac{A, A \rightarrow B}{B}$ beschreibt die Menge von Regeln

$\left\{ \frac{A_0, A_1}{B_0} \mid \text{Es gibt } A, B \in F \text{ mit} \right.$
 $\left. A_0 \equiv A, B_0 \equiv B \text{ und } A_1 \equiv A \rightarrow B \right\}.$

Das deduktive System \mathcal{F}_0

Definition 1.17 (Das deduktive System \mathcal{F}_0)

Das deduktive System \mathcal{F}_0 für die Aussagenlogik besteht aus der Formelmengemenge F_0 der Formeln in $V, \neg, \rightarrow, ($ und $)$. Die Axiomenmenge Ax wird durch folgende Axiomenschemata beschrieben:

$$Ax1: A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$Ax2: (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$Ax3: ((\neg A) \rightarrow (\neg B)) \rightarrow (B \rightarrow A)$$

Dabei beschreiben $Ax1$, $Ax2$ und $Ax3$ disjunkte Formelmengen.

Das deduktive System \mathcal{F}_0

Die Regelmengemenge R wird beschrieben durch das Regelschema

$$\text{MP: } \frac{A, (A \rightarrow B)}{B} \quad (\text{modus ponens}).$$

- ▶ Beachte: Ax und R sind rekursiv entscheidbar.
- ▶ Es genügt zunächst nur Axiome für Formeln in \rightarrow und \neg zu betrachten, da alle anderen Formeln zu einer Formel in \rightarrow und \neg logisch äquivalent sind.
- ▶ Die Menge der Theoreme von \mathcal{F}_0 wird nicht frei erzeugt. Die Modus-Ponens-Regel ist hochgradig **nicht** eindeutig.
 $\frac{A, A \rightarrow B}{B}$ und $\frac{A', A' \rightarrow B}{B}$ sind beides Regeln mit gleicher Folgerung. Das erschwert sehr das Finden von Beweisen.

Beispiel

Beispiel 1.18

Für jedes $A \in F_0$ gilt $\vdash (A \rightarrow A)$, d.h. $(A \rightarrow A) \in T(\mathcal{F}_0)$

Beweis:

$$\begin{array}{ll} B_0 \equiv (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow & \\ \quad ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)) & \text{Ax2} \\ B_1 \equiv A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A) & \text{Ax1} \\ B_2 \equiv (A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A) & \text{MP}(B_0, B_1) \\ B_3 \equiv A \rightarrow (A \rightarrow A) & \text{Ax1} \\ B_4 \equiv A \rightarrow A & \text{MP}(B_2, B_3) \end{array}$$

■

- ▶ Wie findet man Beweise im System \mathcal{F}_0 ?
Einziger Hinweis: Die Zielformel B , sofern sie kein Axiom ist, muss in der Form $(A_1 \rightarrow (\dots(A_n \rightarrow B)\dots))$ vorkommen. Wähle geeignete A 's.
- ▶ **Beachte:** Alle Axiome sind Tautologien der Aussagenlogik. Da diese abgeschlossen gegenüber Modus Ponens sind, sind alle Theoreme von \mathcal{F}_0 Tautologien. D.h. $T(\mathcal{F}_0) \subseteq Taut(F_0)$.
- ▶ Will man in ganz F Beweise führen, so muss man weitere Axiome einführen.

Z.B.

$$Ax1\wedge : (A \wedge B) \rightarrow (\neg(A \rightarrow (\neg B)))$$

$$Ax2\wedge : (\neg(A \rightarrow (\neg B))) \rightarrow (A \wedge B)$$

Deduktiver Folgerungsbegriff

Definition 1.19 (Axiomatischer Folgerungsbegriff)

Sei $\Sigma \subseteq F_0, A \in F_0$.

1. A ist aus Σ in \mathcal{F}_0 **herleitbar**, wenn A sich aus $Ax \cup \Sigma$ mit den Regeln aus R herleiten lässt, d.h. A ist Theorem im deduktiven System \mathcal{F} mit Axiomenmenge $Ax \cup \Sigma$ und gleicher Regelmengemenge wie \mathcal{F}_0 . Schreibweise $\Sigma \vdash_{\mathcal{F}_0} A$, einfacher $\Sigma \vdash A$.

B_0, \dots, B_n ist ein **Beweis** für $\Sigma \vdash A$, falls $A \equiv B_n$ und für alle $0 \leq i \leq n$ gilt: $B_i \in Ax \cup \Sigma$ oder es gibt $j, k < i$ mit $B_k \equiv (B_j \rightarrow B_i)$.

2. Σ heißt **konsistent**, falls für keine Formel $A \in F_0$ gilt $\Sigma \vdash A$ und $\Sigma \vdash \neg A$.
Gibt es eine solche Formel, so heißt Σ **inkonsistent**.

Folgerung 1.20 (Beweishilfsmittel)

1. Gilt $\Sigma \vdash A$, so folgt unmittelbar aus der Definition 1.19, dass es eine endliche Teilmenge $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ gibt mit $\Sigma_0 \vdash A$.
Dies entspricht dem Kompaktheitssatz für " \models ".
2. Ist Σ inkonsistent, dann gibt es eine endliche Teilmenge $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, die inkonsistent ist
(denn ist $\Sigma \subseteq \Gamma$ und $\Sigma \vdash A$, dann gilt auch $\Gamma \vdash A$).
3. Ist $\Sigma \subseteq \Gamma$ so $\text{Folg}_{\mathcal{F}_0}(\Sigma) \subseteq \text{Folg}_{\mathcal{F}_0}(\Gamma)$.
4. Aus $\Sigma \vdash A$ und $\Gamma \vdash B$ für alle $B \in \Sigma$ folgt $\Gamma \vdash A$.
Ist also $\Sigma \subseteq \text{Folg}_{\mathcal{F}_0}(\Gamma)$ so $\text{Folg}_{\mathcal{F}_0}(\Sigma) \subseteq \text{Folg}_{\mathcal{F}_0}(\Gamma)$.
Beweise lassen sich also zusammensetzen.
5. Gilt $\Sigma \vdash A$, so ist $\{\Sigma, \neg A\}$ inkonsistent.
Gilt auch die Umkehrung?
6. Es gilt stets $T(\mathcal{F}_0) \subseteq \text{Folg}_{\mathcal{F}_0}(\Sigma)$ für jede Menge Σ .

Satz 1.21 (Deduktionstheorem)

Sei $\Sigma \subseteq F_0$ und seien $A, B \in F_0$.

Dann gilt: $\Sigma, A \vdash B$ gdw $\Sigma \vdash (A \rightarrow B)$

Beweis:

„ \Leftarrow “ Klar wegen MP-Regel.

„ \Rightarrow “ Sei B_0, \dots, B_m ein Beweis für $\Sigma, A \vdash B$, d.h. $B \equiv B_m$.

Beh.: Für $i = 0, \dots, m$ gilt $\Sigma \vdash (A \rightarrow B_i)$

Induktion nach i und Fallunterscheidung, je nachdem ob B_i gleich A ist, in $A \times \cup \Sigma$ liegt oder mit MP-Regel aus B_j, B_k mit $j, k < i$ entsteht. ■

Anwendungen des Deduktionstheorems

Beispiel 1.22 (Beweistransformationen. Wiederverwendung von Beweisen.)

- ▶ Vereinbarungen zur Darstellung von Beweisen:
 B_1, \dots, B_n heißt **abgekürzter Beweis** für $\Sigma \vdash B_n$, falls für jedes j mit $1 \leq j \leq n$ gilt: $\Sigma \vdash B_j$ oder es gibt $j_1, \dots, j_r < j$ mit $B_{j_1}, \dots, B_{j_r} \vdash B_j$.
 - ▶ Gibt es einen abgekürzten Beweis für $\Sigma \vdash A$, dann gibt es auch einen Beweis für $\Sigma \vdash A$.
1. $\vdash (A \rightarrow A)$ folgt aus dem Deduktionstheorem, da $A \vdash A$ gilt.
 2. Um $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$ zu zeigen, zeige $A, A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash C$.

Anwendungen des Deduktionstheorems (Fort.)

3. $\vdash (\neg\neg A \rightarrow A)$ dazu genügt es zu zeigen
 $\neg\neg A \vdash A$

Beweis:

$B_1 \equiv \neg\neg A$	
$B_2 \equiv \neg\neg A \rightarrow (\neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A)$	Ax1
$B_3 \equiv \neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$	MP
$B_4 \equiv (\neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A)$	Ax3 ■
$B_5 \equiv \neg A \rightarrow \neg\neg\neg A$	MP
$B_6 \equiv (\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow A)$	Ax3
$B_7 \equiv \neg\neg A \rightarrow A$	MP
$B_8 \equiv A$	MP

Anwendungen des Deduktionstheorems (Fort.)

4. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$
(zeige: $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$)
5. $\vdash (B \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A))$
6. $\vdash (\neg B \rightarrow (B \rightarrow A))$ (zu zeigen: $\neg B, B \vdash A$)

Beweis:

$B_1 \equiv \neg B$	Vor
$B_2 \equiv \neg B \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$	Ax1
$B_3 \equiv \neg A \rightarrow \neg B$	MP
$B_4 \equiv (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$	Ax3
$B_5 \equiv B \rightarrow A$	MP
$B_6 \equiv B$	Vor
$B_7 \equiv A$	MP ■

7. $\vdash B \rightarrow \neg\neg B$
8. $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A))$ und
 $\vdash ((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B))$
9. $\vdash (B \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg(B \rightarrow C)))$
10. $\vdash ((B \rightarrow A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow A))$
11. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$

Frage: Lassen sich alle Tautologien als Theoreme im System \mathcal{F}_0 herleiten ?

Vollständigkeit und Entscheidbarkeit von \mathcal{F}_0

Satz 1.23 (Korrektheit und Vollständigkeit von \mathcal{F}_0)

Sei $A \in \mathcal{F}_0$ eine Formel der Aussagenlogik.

a) **Korrektheit:** $Aus \vdash_{\mathcal{F}_0} A$ folgt $\models A$, d.h. nur Tautologien können als Theoreme in \mathcal{F}_0 hergeleitet werden.

b) **Vollständigkeit:** $Aus \models A$ folgt $\vdash_{\mathcal{F}_0} A$, d.h. alle Tautologien lassen sich in \mathcal{F}_0 herleiten.

Vollständigkeit und Entscheidbarkeit von \mathcal{F}_0 (Fort.)

- ▶ Durch Anwenden des Deduktionstheorems entstehen daraus
 $P_1, \dots, P_{n-1} \vdash p_n \rightarrow A$ und
 $P_1, \dots, P_{n-1} \vdash \neg p_n \rightarrow A$.
 Gleichzeitig gilt nach dem 10. Beispiel von 1.22 auch
 $P_1, \dots, P_{n-1} \vdash ((p_n \rightarrow A) \rightarrow ((\neg p_n \rightarrow A) \rightarrow A))$.
- ▶ Durch zweimaliges Anwenden des Modus-Ponens entsteht
 $P_1, \dots, P_{n-1} \vdash A$.
- ▶ Dies gilt für jede Wahl der $P_i, i = 1, \dots, n - 1$ und somit lässt sich das Argument iterieren. D.h. in einer Herleitung von A muss kein p_i verwendet werden, also $\vdash A$.
- ▶ Das Lemma wird durch Induktion über den Aufbau von A nachgewiesen. D.h. für $A \equiv p_1, \neg C, B \rightarrow C$ unter Verwendung von Deduktionen aus Beispiel 1.22.

Folgerung

Folgerung 1.25

Sei $\Sigma \subseteq F_0, A \in F_0$.

1. $\Sigma \vdash_{\mathcal{F}_0} A$ gilt genau dann, wenn $\Sigma \models A$ gilt.
2. Σ ist genau dann konsistent, wenn Σ erfüllbar ist.
3. Σ ist genau dann inkonsistent, wenn Σ unerfüllbar ist.
4. Ist Σ endlich und $A \in F_0$, dann ist $\Sigma \vdash_{\mathcal{F}_0} A$ entscheidbar.

Beweis der Folgerung

Beweis:

1.

$$\Sigma \vdash_{\mathcal{F}_0} A$$

$$\begin{array}{l} \text{1.20} \\ \iff \end{array} \text{Es gibt } A_1, \dots, A_n \in \Sigma \text{ mit } A_1, \dots, A_n \vdash_{\mathcal{F}_0} A$$

$$\begin{array}{l} \text{D.T.} \\ \iff \end{array} \text{Es gibt } A_1, \dots, A_n \in \Sigma \text{ mit} \\ \vdash_{\mathcal{F}_0} (A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \dots (A_n \rightarrow A) \dots))$$

$$\begin{array}{l} \text{1.23} \\ \iff \end{array} \text{Es gibt } A_1, \dots, A_n \in \Sigma \text{ mit} \\ \models (A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \dots (A_n \rightarrow A) \dots))$$

$$\begin{array}{l} \text{D.T.} \\ \iff \end{array} \text{Es gibt } A_1, \dots, A_n \in \Sigma \text{ mit } A_1, \dots, A_n \models A$$

$$\begin{array}{l} \text{K.S.} \\ \iff \end{array} \Sigma \models A$$

Beweis der Folgerung

2. Σ ist konsistent. \iff
Es gibt kein A mit $\Sigma \vdash A$ und $\Sigma \vdash \neg A$. \iff
Es gibt kein A mit $\Sigma \models A$ und $\Sigma \models \neg A$. \iff
 Σ ist erfüllbar (Bemerkung 1.8 c)).

Natürliche Kalküle

Es gibt andere deduktive Systeme, für die Satz 1.23 gilt. Das deduktive System \mathcal{F}_0 wurde von **S.C. Kleene** eingeführt. Das folgende deduktive System geht auf G. Gentzen zurück.

Definition 1.26 (Gentzen-Sequenzenkalkül)

Eine Sequenz ist eine Zeichenreihe der Form $\Gamma \vdash \Delta$ mit zwei endlichen Mengen von Formeln Γ und Δ .

Seien $\Gamma, \Delta \subseteq F$ endliche Mengen von Formeln und $A, B \in F$.

Der Kalkül für Objekte der Form $\Gamma \vdash_G \Delta$ wird definiert durch folgende Axiome und Regeln:

Gentzen-Sequenzenkalkül: Axiome und Regeln

$$\text{Ax1: } \Gamma, A \vdash_G A, \Delta$$

$$\text{Ax2: } \Gamma, A, \neg A \vdash_G \Delta$$

$$\text{Ax3: } \Gamma \vdash_G A, \neg A, \Delta$$

$$\text{R}_{\wedge, \vee}: \frac{\Gamma, A, B \vdash_G \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash_G \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_G A, B, \Delta}{\Gamma \vdash_G (A \vee B), \Delta}$$

$$\text{R}_{\rightarrow}: \frac{\Gamma, A \vdash_G \Delta, B}{\Gamma \vdash_G (A \rightarrow B), \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_G A, \Delta; \Gamma, B \vdash_G \Delta}{\Gamma, (A \rightarrow B) \vdash_G \Delta}$$

$$\text{R}_{\neg}: \frac{\Gamma, A \vdash_G \Delta}{\Gamma \vdash_G \neg A, \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_G A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash_G \Delta}$$

$$\text{R}_{\wedge'}: \frac{\Gamma \vdash_G A, \Delta; \Gamma \vdash_G B, \Delta}{\Gamma \vdash_G (A \wedge B), \Delta}$$

$$\text{R}_{\vee'}: \frac{\Gamma, A \vdash_G \Delta; \Gamma, B \vdash_G \Delta}{\Gamma, (A \vee B) \vdash_G \Delta}$$

Beispiele in Hilberts Kalkül

Beispiel 1.30

Zeige $(p \wedge q) \vee r \vdash \neg p \rightarrow r$

Beweis:

► Transformationsbeweis

- | | | |
|----|--------------------------------|---------------------|
| 1. | $(p \wedge q) \vee r$ | Prämisse |
| 2. | $r \vee (p \wedge q)$ | Kommutativität |
| 3. | $(r \vee p) \wedge (r \vee q)$ | Distributivität |
| 4. | $(r \vee p)$ | \wedge -E |
| 5. | $(p \vee r)$ | Kommutativität |
| 6. | $(\neg\neg p \vee r)$ | Negations-Gesetz |
| 7. | $\neg p \rightarrow r$ | Implikations-Gesetz |



