SS 2011 29. Juni 2011

Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 10

Prof. Dr. Klaus Madlener Abgabe bis 06. Juli 2011 10:00 Uhr

1. Aufgabe: [Interpretationen, Übung]
Sei $I = (D, I_c, I_v)$ die folgende Interpretation:

$$\begin{aligned} D &= \mathbb{N} \\ I_c(1) &= 1_{\mathbb{N}} \\ I_c(2) &= 2_{\mathbb{N}} \\ I_c(p)(d) &= 1, \text{ falls } d \text{ gerade} \\ I_c(q)(d_1, d_2) &= 1, \text{ falls } d_1 \mid d_2 \\ I_c(f)(d_1, d_2) &= d_1 \cdot d_2 \text{ (Multiplikation in } \mathbb{N}) \\ I_v(x) &= I_v(y) = 3. \end{aligned}$$

Dabei seien $d, d_1, d_2 \in D = \mathbb{N}$. Betrachten Sie weiter die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} A_1 &\equiv \forall x\ [p(x) \leftrightarrow q(x, 2)] \\ A_2 &\equiv \forall x\ [(p(x) \wedge q(x, 2)) \to \forall y[p(f(x, y))]] \\ A_3 &\equiv \forall x\ [\forall y[q(y, x) \to (y = x \vee y = 1)] \to ((x \neq 2) \to \neg p(x))] \end{aligned}$$

Werten Sie die drei Formeln unter I aus.

2. Aufgabe: [Semantische Äquivalenz, Übung]
Zeigen oder widerlegen Sie:

1. $\forall x\ [p(x) \wedge q(x)] \models\!\!\!\dashv \forall x\ [p(x)] \wedge \forall x\ [q(x)]$
2. $\exists x\ [p(x) \wedge q(x)] \models\!\!\!\dashv \exists x\ [p(x)] \wedge \exists x\ [q(x)]$

3. Aufgabe: [wichtige Sätze, 6 P]
Zeigen Sie:

1. $\{\forall x[3 \cdot x > 4], \exists x[p(x)], q(3 + 4)\} \models \forall x[42 > x] \to \exists x[p(x)]$
2. $\{p(a), p(x + 3) \to \exists y[y > p(x + 3)], p \vee q, p(x + 3)\} \models \exists y[y > p(x + 3)]$
3. $\{\forall x[3 \cdot x > 4], \exists x[p(x)], q(3 + 4)\} \models \forall y[\forall x[42 > x] \to \exists x[p(x)]]$
4. $\forall x[\neg(p(x) \to \exists y[q(f(a, b))])] \models\!\!\!\dashv \neg(\forall y[p(y)] \to q(f(a, b)))$
5. $\Gamma, A \models \neg B$ gdw. $\Gamma, B \models \neg A$

Benutzen Sie für 5. nicht das Deduktionstheorem und keine Wertetabelle und schreiben Sie nicht „gilt laut Vorlesung".

4. Aufgabe: [PKNF, PDNF, 2+2P]
Bringen Sie A_1 in PKNF und A_2 in PDNF:

$A_1 \equiv \forall x[p(x) \to q(f(b)) \vee \forall y \exists z[r(f(x), g(z)) \to (p(z) \wedge r(z,x))]]$

$A_2 \equiv \forall x \forall y[(p(x) \to q(z)) \to \exists z[r(x,z) \leftrightarrow q(x)]]$

5. Aufgabe: [Semantische Äquivalenz und Folgerung, 6P]

Zeigen oder widerlegen Sie:

1. $\forall x\ A \models\!\!\dashv \neg\exists x\ \neg A$
2. $\forall x\ [p(a) \to q(x)] \models\!\!\dashv p(a) \to \forall x\ q(x)$
3. $\exists x\ [p(x) \wedge q(x)] \models\!\!\dashv \exists x\ [p(x)] \wedge \exists x\ [q(x)]$
4. $\models \exists x\ [p(x) \wedge q(x)]$ gdw. $\models \exists x\ [p(x)] \wedge \exists x\ [p(x)]$
5. $\models \forall x\ [(p(a) \wedge \neg q(b,c)) \to (q(b,c) \to p(a))]$
6. $\models \forall P \exists Q\ [P \leftrightarrow \neg Q]$

Abgabe: bis 06. Juli 2011 10:00 Uhr im Kasten neben Raum 34-401.4

zu **Aufgabe 1:**

- $A_1 \equiv \forall x\ [p(x) \leftrightarrow q(x,2)]$
  Die erste Formel gilt unter dieser Interpretation nicht: Sie bedeutet, dass jede gerade Zahl ein Teiler von 2 ist, was in den natürlichen Zahlen selbstverständlich nicht der Fall ist. Umgekehrt, d.h. wenn statt $q(x,2)$ $q(2,x)$ dort stehen würde, würde es natürlich gelten, denn es gilt $p(x) \models\!\dashv q(2,x)$.
- $A_2 \equiv \forall x\ [(p(x) \wedge q(x,2)) \rightarrow \forall y[p(f(x,y))]]$
  Die zweite Formel gilt: Der erste Teil sagt aus, dass $x = 2$ sein muss (x ist gerade und Teiler von 2). Dann ist aber das Produkt von x und jeder anderen Zahl auch gerade.
- $A_3 \equiv \forall x\ [\forall y[q(y,x) \rightarrow (y = x \vee y = 1)] \rightarrow ((x \neq 2) \rightarrow \neg p(x))]$
  Die dritte Formel gilt auch: Der erste Teil sagt, dass jeder Teiler von x entweder gleich x oder gleich 1 ist, so dass x eine Primzahl sein muss. Alle Primzahlen außer 2 sind ungerade, so dass in diesem Fall auch der zweite Teil gilt.

zu **Aufgabe 2:**

1. zu zeigen: $\forall x\ [p(x) \wedge q(x)] \models\!\dashv \forall x\ [p(x)] \wedge \forall x\ [q(x)]$
   Wir zeigen diese Äquivlenz, indem wir die Definition der Interpretationen anwenden:

$$\begin{aligned} & I(\forall x\ [p(x) \wedge q(x)]) = 1 \\ \text{gdw } & I^{x,d}(p(x) \wedge q(x)) = 1 \text{ für alle } d \in D \\ \text{gdw } & I^{x,d}(p(x)) = 1 \text{ und } I^{x,d}(q(x)) = 1 \text{ für alle } d \in D \\ \text{gdw } & I(\forall x\ [p(x)]) = I(\forall x\ [q(x)]) = 1 \\ \text{gdw } & I(\forall x\ [p(x)] \wedge \forall x\ [q(x)]) = 1 \end{aligned}$$

2. zu widerlegen: $\exists x\ [p(x) \wedge q(x)] \models\!\dashv \exists x\ [p(x)] \wedge \exists x\ [q(x)]$
   Sei I eine Interpretation mit$D = \mathbb{N}$, $I(p(d)) = 1$ gdw. d gerade und $I(q(d)) = 1$ gdw. d ungerade. Dann erfüllt diese Interpretation die rechte Seite, aber nicht die linke.

zu **Aufgabe 3:**

Für die hier verwendeten Sätze, Äquivalenzen etc. siehe Folien 181ff.

1. $\{\forall x[3 \cdot x > 4], \exists x[p(x)], q(3+4)\} \models \forall x[42 > x] \rightarrow \exists x[p(x)]$:
   Mit dem Deduktionstheorem ziehen wir den ersten Teil der rechten Formel in die Menge und erhalten dann $\{\cdots, \exists x[p(x)], \cdots\} \models \exists x[p(x)]$, was offensichtlich gilt.
2. $\{p(a), p(x+3) \rightarrow \exists y[y > p(x+3)], p \vee q, p(x+3)\} \models \exists y[y > p(x+3)]$:
   Modus-Ponens auf $p(x+3)$ und $p(x+3) \rightarrow \exists y[y > p(x+3)]$ angewendet ergibt die Behauptung.
3. $\{\forall x[3 \cdot x > 4], \exists x[p(x)], q(3+4)\} \models \forall y[\forall x[42 > x] \rightarrow \exists x[p(x)]]$:
   Die rechte Formel ist eine Generalisierung der Formel aus 1. Diese Regel ist anwendbar, weil y in $\forall x[42 > x] \rightarrow \exists x[p(x)]$ nicht (frei) vorkommt.

4. $\forall x[\neg(p(x) \to \exists y[q(f(a,b))]])] \models\!\!\!\!\dashv \neg(\forall y[p(y)] \to q(f(a,b)))$:
   Wegen des Ersetzungstheorems gilt

$$\begin{aligned}
&\forall x[\neg(p(x) \to \exists y[q(f(a,b))]])]\\
\models\!\!\!\!\dashv\, &\forall x[\neg(p(x) \to q(f(a,b)))]\\
\models\!\!\!\!\dashv\, &\neg\exists x[\neg\neg(p(x) \to q(f(a,b)))]\\
\models\!\!\!\!\dashv\, &\neg\exists x[p(x) \to q(f(a,b))]\\
\models\!\!\!\!\dashv\, &\neg(\forall y[p(y)] \to q(f(a,b))).
\end{aligned}$$

   Der letzte Schritt ist dabei eine Anwendung der sechsten Äquivalenz auf Folie 183.
5. $\Gamma, A \models \neg B$ gdw. $\Gamma, B \models \neg A$:
   $\Gamma, A \models \neg B$ gilt genau dann, wenn Γ, A, B unerfüllbar ist. Dies wiederum ist genau dann der Fall, wenn $\Gamma, B \models \neg A$.

zu **Aufgabe 4:**

$A_1 \equiv \forall x[p(x) \to q(f(b)) \vee \forall y \exists z[r(f(x), g(z)) \to (p(z) \wedge r(z,x))]]$:

$$\begin{aligned}
A_1 &\equiv \forall x[p(x) \to q(f(b)) \vee \forall y \exists z[r(f(x), g(z)) \to (p(z) \wedge r(z,x))]]\\
&\models\!\!\!\!\dashv \forall x[p(x) \to q(f(b)) \vee \exists z[r(f(x), g(z)) \to (p(z) \wedge r(z,x))]]\\
&\models\!\!\!\!\dashv \forall x[\neg p(x) \vee q(f(b)) \vee \exists z[\neg r(f(x), g(z)) \vee (p(z) \wedge r(z,x))]]\\
&\models\!\!\!\!\dashv \forall x \exists z[\neg p(x) \vee q(f(b)) \vee \neg r(f(x), g(z)) \vee (p(z) \wedge r(z,x))]\\
&\models\!\!\!\!\dashv \forall x \exists z[\quad (\neg p(x) \vee q(f(b)) \vee \neg r(f(x), g(z)) \vee p(z))\\
&\qquad\qquad \wedge (\neg p(x) \vee q(f(b)) \vee \neg r(f(x), g(z)) \vee r(z,x))]
\end{aligned}$$

$A_2 \equiv \forall x \forall y[(p(x) \to q(z)) \to \exists z[r(x,z) \leftrightarrow q(x)]]$:

$$\begin{aligned}
A_2 &\equiv \forall x \forall y[(p(x) \to q(z)) \to \exists z[r(x,z) \leftrightarrow q(x)]]\\
&\models\!\!\!\!\dashv \forall x[(p(x) \to q(z)) \to \exists z[r(x,z) \leftrightarrow q(x)]]\\
&\models\!\!\!\!\dashv \forall x[(p(x) \to q(z)) \to \exists z'[r(x,z') \leftrightarrow q(x)]]\\
&\models\!\!\!\!\dashv \forall x[\neg(\neg p(x) \vee q(z)) \vee \exists z'[(r(x,z') \wedge q(x)) \vee (\neg r(x,z') \wedge \neg q(x))]]\\
&\models\!\!\!\!\dashv \forall x[(p(x) \wedge \neg q(z)) \vee \exists z'[(r(x,z') \wedge q(x)) \vee (\neg r(x,z') \wedge \neg q(x))]]\\
&\models\!\!\!\!\dashv \forall x \exists z'[(p(x) \wedge \neg q(z)) \vee (r(x,z') \wedge q(x)) \vee (\neg r(x,z') \wedge \neg q(x))]
\end{aligned}$$

Soweit notwendig sind die Schritte von Folie 188 in der dort angegebenen Reihenfolge durchgeführt worden.

zu **Aufgabe 5:**

1. $\forall x\ A \models\!\!\!\!\dashv \neg\exists x\ \neg A$
   Die Aussage gilt:
   $I(\forall x\ A) = 1$ gdw. $I^{x,d}(A) = 1$ für alle $d \in D$ gdw. es kein d gibt, so dass $I^{x,d}(\neg A) = 1$ gdw. $I(\exists x\ \neg A) = 0$ gdw. $I(\neg\exists x\ \neg A) = 1$.

2. $\forall x\ [p(a) \to q(x)] \models\!\!\!\!\!\!\dashv\ p(a) \to \forall x\ q(x)$
   Die Aussage gilt ebenfalls, Beweis ähnlich wie oben:

$$
\begin{aligned}
& I(\forall x\ [p(a) \to q(x)]) = 1 \\
\text{gdw. } & I^{x,d}(p(a) \to q(x)) = 1 \text{ für alle } d \in D \\
\text{gdw. } & I^{x,d}(\neg p(a) \vee q(x)) = 1 \text{ für alle } d \in D \\
\text{gdw. } & I^{x,d}(\neg p(a)) = 1 \text{ oder } I^{x,d}(q(x)) = 1 \text{ für alle } d \in D \\
\text{gdw. } & I(\neg p(a)) = 1 \text{ oder } I^{x,d}(q(x)) = 1 \text{ für alle } d \in D \text{ (da } x \text{ in } \neg p(a) \text{ nicht vorkommt)} \\
\text{gdw. } & I(\neg p(a)) = 1 \text{ oder } I(\forall x\ [q(x)]) = 1 \\
\text{gdw. } & I(\neg p(a) \vee \forall x\ [q(x)]) = 1 \\
\text{gdw. } & I(p(a) \to \forall x\ [q(x)]) = 1
\end{aligned}
$$

3. $\exists x\ [p(x) \wedge q(x)] \models\!\!\!\!\!\!\dashv\ \exists x\ [p(x)] \wedge \exists x\ [q(x)]$
   Gilt nicht: Sei $I := (\mathbb{N}, I_c, I_v)$ mit $I_v(p)(n) = 1$, falls n gerade und $I_v(q)(n) = 1$, falls n ungerade, dann erfüllt I die rechte Seite, aber nicht die linke.
4. $\models \exists x\ [p(x) \wedge q(x)]$ gdw. $\models \exists x\ [p(x)] \wedge \exists x\ [p(x)]$
   Diese Aussage gilt, die Formeln sind beide keine Tautologien.
5. $\models \forall x\ [(p(a) \wedge \neg q(b,c)) \to (q(b,c) \to p(a))]$
   Diese Formel ist eine Tautologie, es gilt:

$$
\begin{aligned}
& \forall x\ [(p(a) \wedge \neg q(b,c)) \to (q(b,c) \to p(a))] \\
\models\!\!\!\!\!\!\dashv\ & (p(a) \wedge \neg q(b,c)) \to (q(b,c) \to p(a)) \\
\models\!\!\!\!\!\!\dashv\ & \neg(p(a) \to q(b,c)) \to (q(b,c) \to p(a))
\end{aligned}
$$

   Letztere Formel entsteht aus $\neg(A \to B) \to (B \to A)$, einer aussagenlogischen Tautologie (in Übung gezeigt, ggf. mit Wertetabelle, Tableaux etc. überprüfen). Nach dem Tautologietheorem ist dann auch die prädikatenlogische formel eine Tautologie. Alternativ kann man die Formel (ohne Quantor) auch in DNF bringen, um die Tautologie zu erkennen.
6. $\models \forall P \exists Q\ [P \leftrightarrow \neg Q]$
   Die Formel ist allgemeingültig, Beweis mit Quantorenelimination:

$$
\begin{aligned}
& \forall P \exists Q\ [P \leftrightarrow \neg Q] \\
\models\!\!\!\!\!\!\dashv\ & \exists Q\ [W \leftrightarrow \neg Q] \wedge \exists Q\ [F \leftrightarrow \neg Q] \\
\models\!\!\!\!\!\!\dashv\ & ((W \leftrightarrow \neg W) \vee (W \leftrightarrow \neg F)) \wedge ((F \leftrightarrow \neg W) \vee (F \leftrightarrow \neg F)) \\
\models\!\!\!\!\!\!\dashv\ & ((W \leftrightarrow F) \vee (W \leftrightarrow W)) \wedge ((F \leftrightarrow F) \vee (F \leftrightarrow W)) \\
\models\!\!\!\!\!\!\dashv\ & (F \vee W) \wedge (W \vee W) \\
\models\!\!\!\!\!\!\dashv\ & W \wedge W \\
\models\!\!\!\!\!\!\dashv\ & W
\end{aligned}
$$