SS 2011 29. Juni 2011

Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 10

Prof. Dr. Klaus Madlener Abgabe bis 06. Juli 2011 10:00 Uhr

1. Aufgabe: [Interpretationen, Übung]
Sei $I = (D, I_c, I_v)$ die folgende Interpretation:

$$\begin{aligned} D &= \mathbb{N} \\ I_c(1) &= 1_{\mathbb{N}} \\ I_c(2) &= 2_{\mathbb{N}} \\ I_c(p)(d) &= 1, \text{ falls } d \text{ gerade} \\ I_c(q)(d_1, d_2) &= 1, \text{ falls } d_1 \mid d_2 \\ I_c(f)(d_1, d_2) &= d_1 \cdot d_2 \text{ (Multiplikation in } \mathbb{N}) \\ I_v(x) &= I_v(y) = 3. \end{aligned}$$

Dabei seien $d, d_1, d_2 \in D = \mathbb{N}$. Betrachten Sie weiter die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} A_1 &\equiv \forall x\ [p(x) \leftrightarrow q(x, 2)] \\ A_2 &\equiv \forall x\ [(p(x) \wedge q(x, 2)) \to \forall y[p(f(x, y))]] \\ A_3 &\equiv \forall x\ [\forall y[q(y, x) \to (y = x \vee y = 1)] \to ((x \neq 2) \to \neg p(x))] \end{aligned}$$

Werten Sie die drei Formeln unter I aus.

2. Aufgabe: [Semantische Äquivalenz, Übung]
Zeigen oder widerlegen Sie:

1. $\forall x\ [p(x) \wedge q(x)] \models\!\!\!\!= \forall x\ [p(x)] \wedge \forall x\ [q(x)]$
2. $\exists x\ [p(x) \wedge q(x)] \models\!\!\!\!= \exists x\ [p(x)] \wedge \exists x\ [q(x)]$

3. Aufgabe: [wichtige Sätze, 6 P]
Zeigen Sie:

1. $\{\forall x[3 \cdot x > 4], \exists x[p(x)], q(3 + 4)\} \models \forall x[42 > x] \to \exists x[p(x)]$
2. $\{p(a), p(x + 3) \to \exists y[y > p(x + 3)], p \vee q, p(x + 3)\} \models \exists y[y > p(x + 3)]$
3. $\{\forall x[3 \cdot x > 4], \exists x[p(x)], q(3 + 4)\} \models \forall y[\forall x[42 > x] \to \exists x[p(x)]]$
4. $\forall x[\neg(p(x) \to \exists y[q(f(a, b))])] \models\!\!\!\!= \neg(\forall y[p(y)] \to q(f(a, b)))$
5. $\Gamma, A \models \neg B$ gdw. $\Gamma, B \models \neg A$

Benutzen Sie für 5. nicht das Deduktionstheorem und keine Wertetabelle und schreiben Sie nicht „gilt laut Vorlesung“.

4. Aufgabe: [PKNF, PDNF, 2+2P]
Bringen Sie A_1 in PKNF und A_2 in PDNF:

$A_1 \equiv \forall x[p(x) \to q(f(b)) \vee \forall y \exists z[r(f(x), g(z)) \to (p(z) \wedge r(z, x))]]$
$A_2 \equiv \forall x \forall y[(p(x) \to q(z)) \to \exists z[r(x, z) \leftrightarrow q(x)]]$

5. Aufgabe: [Semantische Äquivalenz und Folgerung, 6P]
Zeigen oder widerlegen Sie:

1. $\forall x\ A \models\!\!\!\!\!\!= \neg \exists x\ \neg A$
2. $\forall x\ [p(a) \to q(x)] \models\!\!\!\!\!\!= p(a) \to \forall x\ q(x)$
3. $\exists x\ [p(x) \wedge q(x)] \models\!\!\!\!\!\!= \exists x\ [p(x)] \wedge \exists x\ [q(x)]$
4. $\models \exists x\ [p(x) \wedge q(x)]$ gdw. $\models \exists x\ [p(x)] \wedge \exists x\ [p(x)]$
5. $\models \forall x\ [(p(a) \wedge \neg q(b, c)) \to (q(b, c) \to p(a))]$
6. $\models \forall P \exists Q\ [P \leftrightarrow \neg Q]$

Abgabe: bis 06. Juli 2011 10:00 Uhr im Kasten neben Raum 34-401.4