SS 2011 06. Juli 2011

Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 11

Prof. Dr. Klaus Madlener Abgabe bis 13. Juli 2011 10:00 Uhr

**1. Aufgabe:** [Axiomatisierung, Übung]

1. Definieren Sie eine Formel $A_n$ der Prädikatenlogik erster Stufe, so dass jede Interpretation, die $A_n$ erfüllt, genau $n$ Elemente hat. Genauer ist damit gemeint, dass in jeder Interpretation $I = (D, I_C, I_V)$, die $A_n$ erfüllt, der Definitionsbereich $D$ genau $n$ Elemente hat.
2. Definieren Sie eine Formel $A_\infty$ der Prädikatenlogik erster Stufe, so dass jede erfüllende Interpretation von $A_\infty$ unendlich viele Elemente hat.
3. Zeigen Sie, dass der Kompaktheitssatz nicht für die Prädikatenlogik 2. Stufe gilt.

**2. Aufgabe:** [Herleitungen in $\mathcal{F}$, 2+2P]
Zeigen Sie:

1. $\forall x[p(x,y)],\ y = z \vdash_{\mathcal{F}} \forall x[p(x,z)]$.
2. $\forall x[p(x) \to q(x)], \forall x[p(x)] \vdash_{\mathcal{F}} q(f(a))$

**3. Aufgabe:** [Korrektheit von $\mathcal{F}'$, 4+1P]

1. Zeigen Sie die Korrektheit der Generalisierungsregel.
2. In der Vorlesung wurde erwähnt, dass die Aussage $\Sigma \vdash_{\mathcal{F}'} A \rightsquigarrow \Sigma \vdash_{\mathcal{F}} A$ im Allgemeinen *nicht* gilt. Dies bedeutet, dass nicht alle logischen Folgerungen aus $\Sigma$, die in $\mathcal{F}'$ hergeleitet werden können, auch in $\mathcal{F}$ hergeleitet werden können. Warum steht dieses Ergebnis nicht im Widerspruch zur Korrektheit beider Kalküle?

**4. Aufgabe:** [Theorien, 3+3+2P]
Zeigen Sie:

1. Sei $M$ eine Theorie erster Stufe. Es gibt eine Interpretation $I$ mit $I \models M$, gdw. $M$ konsistent ist.
2. Falls $T$ eine konsistente, nicht vollständige Theorie erster Stufe ist, dann gilt für jede abgeschlossene Formel $A$ mit $A, \neg A \notin T$, dass sowohl $T_{T\cup\{A\}}$ als auch $T_{T\cup\{\neg A\}}$ konsistente Theorien sind.
3. Seien $T_1$ und $T_2$ Theorien erster Stufe. Gilt $T_1 \subsetneq T_2$ und ist $T_1$ vollständig, dann ist $T_2$ inkonsistent.

**5. Aufgabe:** [Theorien, 5P]

Sei $T$ eine konsistente, nicht vollständige Theorie erster Stufe. Zeigen Sie, dass es mindestens zwei verschiedene Relationalstrukturen gibt, die $T$ erfüllen.

**6. Aufgabe:** [Nichtstandardmodelle, 5P]

Zeigen Sie, dass es Nichtstandardmodelle für die Peano-Axiome gibt (Folie 220). D.h. zeigen sie, dass es eine Interpretation gibt, die die Menge $P$ der Peano-Axiome erfüllt, die aber nicht isomorph zu den natürlichen Zahlen ist.

**Hinweis:** Betrachten Sie das folgende erweiterte Axiomensystem und wenden sie den Kompaktheitssatz an:

$$P^* := P \cup \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\},$$

wobei $A_i \equiv \exists z\ [S^i(0) + z = \infty]$. Dabei sei $\infty$ ein neues Konstantensymbol und $S^i(0)$ sei die $i$-malige Anwendung von $S$ auf 0, also z.B. $S^3(0) \equiv S(S(S(0)))$.

**7. Aufgabe:** [Axiomatisierung, 1+3+5P]

Charakterisieren Sie die Aussagenlogik (in den Operatoren $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ und mit den Konstanten *true* und $false$) mit Hilfe der Prädikatenlogik. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

1. Geben Sie eine Sprache der Prädikatenlogik an, so dass jeder Term eine boolesche Formel repräsentiert.
2. Geben Sie Axiome an, die die booleschen Operatoren charakterisieren. D.h. sind zwei Terme $t_1$ und $t_2$ äquivalent im Sinne der Aussagenlogik und erfüllt eine Interpretation $I$ Ihre Axiome, dann soll $I(t_1) = I(t_2)$ gelten.
3. Geben sie für die Prädikatskonstanten $\mathit{taut}(x)$, $\mathit{uns}(x)$, $\mathit{conc}(x)$ und $\mathit{eq}(x, y)$ jeweils Axiome an, so dass gilt:
   - $\Sigma \models \mathit{taut}(t)$ gdw. $t$ eine Tautologie im Sinne der Aussagenlogik ist.
   - $\Sigma \models \mathit{uns}(t)$ gdw. $t$ unerfüllbar im Sinne der Aussagenlogik ist.
   - $\Sigma \models \mathit{conc}(t_1, t_2)$ gdw. $t_1 \models t_2$ im Sinne der Aussagenlogik gilt.
   - $\Sigma \models \mathit{eq}(t_1, t_2)$ gdw. $t_1$ und $t_2$ logisch äquivalent im Sinne der Aussagenlogik sind.

   $\Sigma$ bezeichnet dabei die Menge der Axiome aus (2) und (3). Begründen Sie die Korrektheit Ihrer Axiome. Wie müsste man die Korrektheit formal beweisen?

**Abgabe: bis 13. Juli 2011 10:00 Uhr im Kasten neben Raum 34-401.4**

zu **Aufgabe 1:**

1. Definieren Sie eine Formel $A_n$ der Prädikatenlogik erster Stufe, so dass jedes Modell von $A_n$ genau $n$ Elemente hat:

   Wir definieren zuerst eine Hilfsformel $A_{\geq n}$, deren Modelle mindestens $n$ Elemente haben müssen. Mit dieser kann eine zweite Hilfsformel $A_{\leq n} :\equiv \neg A_{\geq n+1}$ definiert und schließlich $A_n$ als die Konjunktion beider Hilfsformeln definiert werden. Die Idee bei $A_{\geq n}$ ist einfach, die Existenz $n$ verschiedener Elemente zu fordern. Setze also

   $$\begin{aligned} A_{\geq n} :\equiv \exists x_1 \cdots \exists x_n ( \quad & x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge \cdots \wedge x_1 \neq x_n \\ & \wedge x_2 \neq x_3 \wedge \cdots \wedge x_2 \neq x_n \\ & \qquad \vdots \\ & \wedge x_{n-1} \neq x_n). \end{aligned}$$

   Eine Interpretation $I = (D, I_c, I_v)$ ist genau dann Modell von $A_{\geq n}$, wenn es $d_1, \ldots, d_n \in D$ gibt, die paarweise verschieden sind. Also gilt $I \models \varphi_{\geq n}$ genau dann, wenn $D$ eine $n$-elementige Teilmenge enthält, also mindestens $n$ Elemente hat.

   Setze nun $A_{\leq n} :\equiv \neg A_{\geq n+1}$. Dann ist $I = (D, I_c, I_v)$ genau dann ein Modell von $\varphi_{\leq n}$, wenn $I$ kein Modell von $\varphi_{\geq n+1}$ ist; also genau dann, wenn $D$ nicht mindestens $n+1$ Elemente enthält. Also ist $I$ genau dann ein Modell von $\varphi_{\leq n}$, wenn $D$ höchstens $n$ Elemente enthält.

   Setze nun $A_n :\equiv A_{\geq n} \wedge A_{\leq n}$. Ein Modell dieser Formel muss gleichzeitig midestens und höchstens $n$ Elemente haben, also genau $n$ Elemente.

2. Definieren Sie eine Formel $A_\infty$ der Prädikatenlogik erster Stufe, so dass jedes Modell von $A_\infty$ unendlich viele Elemente hat:

   Hier kann leider nicht analog zu oben vorgegangen werden, d.h. man kann nicht durch irgendeine Formel erzwingen, dass es unendlich viele paarweise verschiedene Elemente gibt. Dazu müsste eine Formel nach obigem Schema unendlich lang sein. Die Unendlichkeit der Trägermenge $D$ wird daher auf indirekte Weise erzwungen. Die Idee ist, mit der Formel eine Eigenschaft der Trägermenge zu beschreiben, die endliche Mengen einfach nicht haben. Eine solche Eigenschaft ist z.B. die Existenz von Funktionen, die injektiv, aber nicht surjektiv sind oder umgekehrt. In endlichen Mengen ist nämlich jede Funktion genau dann injektiv, wenn sie auch surjektiv ist. Wenn wir also eine Funktion beschreiben, entweder injektiv oder surjektiv ist, dann muss $D$ unendlich sein. Damit kann $A_\infty$ z.B. wie folgt definiert werden:

   $$A_\infty :\equiv \neg \underbrace{(\forall x \forall y [f(x) = f(y) \to x = y])}_{I_c(f) \text{ injektiv}} \leftrightarrow \underbrace{(\forall x \exists y [f(y) = x])}_{I_c(f) \text{ surjektiv}}.$$

Bei dieser Formel ist zu beachten, dass die Negation – anders als bei den oben definierten Formeln – nicht automatisch einen endlichen Definitionsbereich hat: $A_\infty$ fordert nur, dass die Funktion $I_c(f)$ entweder injektiv oder surjektiv ist und $\neg A_\infty$ würde dann nur bedeuten, dass sie entweder beides oder nichts ist. Auf einer unendlichen Trägermenge gibt es aber durchaus Funktionen, die weder injektiv noch surjektiv sind, ebenso wie es bijektive Funktionen gibt, so dass die Trägermenge durchaus unendlich sein könnte. Um auf diese Art und Weise eine Formel zu definieren, die auf jeden Fall einen endlichen Definitionsbereich hat, muss eine Formel der Prädikatenlogik 2. Stufe bemüht werden (siehe Aufgabe **??**).

Eine andere solche Eigenschaft unendlicher Mengen wäre die Existenz einer Ordnungsrelation mit unendlichen aufsteigenden Ketten. Man kann also z.B. ein Prädikat „$<$“ einführen und seine Eigenschaften axiomatisch beschreiben.

3. Zeigen Sie, dass der Kompaktheitssatz nicht für die Prädikatenlogik 2. Stufe gilt. Betrachte die Menge $\Sigma = \{\neg A'_\infty, A_n \mid n \geq 1\}$ mit

$$A'_\infty :\equiv \exists F \neg(\forall x \forall y[F(x) = F(y) \to x = y]) \leftrightarrow (\forall x \exists y[F(y) = x]).$$

und

$$A_n \text{ wie in Aufgabenteil 1.}$$

Damit $\neg A'_\infty$ erfüllt ist, muss das Modell endlich sein, damit *jedes* $A_n$ erfüllt ist, muss das Modell jedoch unendlich sein. Wäre nämlich $|D| = n$, so würde nicht $I \models A_{n+1}$ gelten. Also ist $\Sigma$ unerfüllbar. Jede endliche Teilmenge ist aber erfüllbar, da diese nur Formeln $A_n$ bis zu einem *maximalen* $n$ enthält. Jede Interpretation mit $|D| \geq n$ erfüllt diese endliche Teilmenge von $\Sigma$. Damit ist $\Sigma$ selbst also unerfüllbar, jede endliche Teilmenge aber erfüllbar, was dem Kompaktheitssatz widerspricht.

Der Unterschied zwischen $A_\infty$ aus Aufgabe 1 und $A'_\infty$ hier ist, dass in letzterer Formel über $F$ quantifiziert wird. Während bei $A_\infty$ also über eine ganz konkrete Funktion geredet wird, wird hier allgemeiner die Existenz einer Funktion gefordert, die entweder injektiv oder surjektiv ist. Im Fall $A'_\infty$ bzw. $A_\infty$ macht dies, was das Modell angeht, keinen Unterschied, in beiden Fällen muss das Modell unendlich sein. Jedes Modell von $\neg A'_\infty$ muss jedoch endlich sein, da diese Formel nun wirklich bedeutet, dass jede Funktion über $D$ genau dann injektiv ist, wenn sie surjektiv ist, was nur in endlichen Mengen der Fall ist.

zu **Aufgabe 2:**

1. $\forall x[p(x,y)],\ y = z \vdash_{\mathcal{F}} \forall x[p(x,z)]$:

| | |
|---|---|
| $B_1 \equiv \forall x[p(x,y)]$ | Hypothese |
| $B_2 \equiv y = z$ | Hypothese |
| $B_3 \equiv y = z \to (\forall x[p(x,y)] \to \forall x[p(x,z)])$ | Ax8 |
| $B_4 \equiv \forall x[p(x,y)] \to \forall x[p(x,z)]$ | MP($B_2, B_3$) |
| $B_5 \equiv \forall x[p(x,z)]$ | MP($B_1, B_4$) |

2. $\forall x[p(x) \to q(x)], \forall x[p(x)] \vdash_{\mathcal{F}} q(f(a))$:

| | |
|---|---|
| $B_1 \equiv \forall x[p(x) \to q(x)]$ | Hypothese |
| $B_2 \equiv \forall x[p(x)]$ | Hypothese |
| $B_3 \equiv (\forall x[p(x) \to q(x)]) \to (\forall x[p(x)] \to \forall x[q(x)])$ | Ax8 |
| $B_4 \equiv \forall x[p(x)] \to \forall x[q(x)]$ | MP$(B_1, B_3)$ |
| $B_5 \equiv \forall x[q(x)]$ | MP$(B_2, B_4)$ |
| $B_6 \equiv \forall x[q(x)] \to q(f(a))$ | Ax4 |
| $B_7 \equiv q(f(a))$ | MP$(B_5, B_6)$ |

zu **Aufgabe 3:**

1. Es ist zu zeigen, dass $\forall xA$ eine Tautologie ist, wenn $A$ eine Tautologie ist. Sei also $A$ eine Tautologie. Das heißt, $I \models A$ für *jede* Interpretation $I$. Insbesondere erfüllt jedes $I$ die Formel $A$ unabhängig davon, wie $x$ interpretiert wird, also gilt $I^{x,d} \models A$ für *alle* $d \in D$ und alle Interpretationen $I$. Dies wiederum bedeutet $I \models \forall xA$ für alle Interpretationen $I$.

   Nur die Aussage $A \models \forall xA$ zu zeigen hätte hier, anders als in den bisher kennengelernten Fällen, nicht genügt, da diese Aussage i.A. nicht gilt.

2. Die Korrektheit eines Kalküls ist weiterhin nur über die Tautologien definiert und für Tautologien gilt die Aussage, wie oben gezeigt. D.h. jedes Theorem in $F'$ ist tatsächlich eine Tautologie. Eine Konsequenz aus der Tatsache, dass $\Sigma \vdash_{\mathcal{F}'} A \rightsquigarrow \Sigma \vdash_{\mathcal{F}} A$ im Allgemeinen nicht gilt, ist, dass das Deduktionstheorem in $F'$ nur unter Einschränkungen gilt (vgl. Folie 207).

zu **Aufgabe 4:**

1. Wenn es ein Modell gibt, dann kann $M$ nicht inkonsistent sein. Also ist eine Richtung gezeigt.

   Wenn $M$ konsistent ist, und eine Theorie ist, dann gilt nach dem Vollständigkeitssatz 4.10, dass $M$ erfüllbar ist, also gibt es ein Modell $I$ mit $I \models M$.

2. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass eine der beiden Theorien inkonsistent ist.

   **Fall 1:** $T_{T\cup\{\neg A\}}$ ist inkonsistent. D.h. $B, \neg B \in T_{T\cup\{\neg A\}}$ für irgendeine (abgeschlossene) Formel $B$. Da $T_{T\cup\{\neg A\}} = Folg(T \cup \{\neg A\}$ nur der logische Abschluss von $T \cup \{\neg A\}$ ist, gilt dann $T \cup \{\neg A\} \models B, \neg B$, so dass $T \cup \{\neg A\}$ unerfüllbar ist. Dies ist gleichbedeutend mit $T \models A$. Da $T$ aber eine Theorie ist, muss dann $A \in T$ gelten, was ein Widerspruch zu der Annahme ist, dass weder $A$ noch $\neg A$ in $T$ enthalten sind.

   **Fall 2:** $T_{T\cup\{A\}}$ ist inkonsistent. Da $A \models\!\!\!\!=\!\!\!\!| \neg\neg A$ gilt, ist dann auch $T_{T\cup\{\neg\neg A\}}$ inkonsistent. Daraus kann man analog zu Fall 1 folgern, dass dann $\neg A$ in $T$ enthalten sein müsste.

3. Da $T_2$ eine echte Obermenge von $T_1$ ist, gibt es eine abgeschlossene Formel $A$, die in $T_2$, aber nicht in $T_1$ ist. Weil $T_1$ aber vollständig ist, muss dann $\neg A \in T_1$ und damit auch $\neg A \in T_2$ gelten. Damit ist $T_2$ inkonsistent.

zu **Aufgabe 5:** Zu zeigen: Ist $T$ eine konsistente, nicht vollständige Theorie, dann gibt es zwei verschiedene Relationalstrukturen, die $T$ erfüllen.

Aufgabe 4.2 sagt uns schon, dass wir $T$ auf zwei verschiedene Arten konsistent erweitern können. Außerdem wissen wir aus der Vorlesung, dass es zu jeder vollständigen und konsistenten Theorie $T$ eine Relationalstruktur $\mathcal{R}$ gibt, so dass $T = T_{\mathcal{R}}$ gilt. Die Idee ist nun, $T$ auf zwei Arten zu erweitern und diese Erweiterungen zu vervollständigen. Dann erhalten wir zwei Relationalstrukturen sich voneinander unterscheiden, aber beide $T$ erfüllen.

Sei also $A$ eine abgeschlossene Formel, so dass weder $A$ noch $\neg A$ in $T$ enthalten sind und seien $T_1 := T_{T\cup\{A\}}$ bzw. $T_2 := T_{T\cup\{\neg A\}}$. Nach Aufgabe 4.2 sind $T_1$ und $T_2$ konsistent, aber wir halten schon einmal fest, dass eine Interpretation, die $T_1$ erfüllt, $T_2$ nicht erfüllen kann und umgekehrt. Eine Interpretation, die sowohl $T_1$ als auch $T_2$ erfüllt, müsste $A$ und $\neg A$ gleichzeitig erfüllen.

Wir erweitern nun $T_1$ zu einer vollständigen, konsistenten Theorie, indem wir eine ähnliche Konstruktion wie beim Beweis des Kompaktheitssatzes verwenden: Wir betrachten eine Aufzählung $A_1, A_2, \ldots$ aller abgeschlossenen Formeln der betrachteten PL1-Sprache und konstruieren eine aufsteigende Folge von Theorien, die alle konsistent sind und deren Vereinigung vollständig sein muss:

$$S_1 := T_1 \qquad\qquad S_{i+1} := \begin{cases} S_i & \text{falls } A_i \in S_i \\ T_{S_i\cup\{\neg A_i\}} & \text{falls } A_i \notin S_i. \end{cases}$$

Wir definieren $S := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i$. Die $S_i$ sind alle konsistent, da in keinem Schritt Formeln hinzugenommen werden, die der vorherigen Theorie widersprechen (Induktion nach $i$). Damit und weil die $S_i$ eine aufsteigende Kette bilden, ist auch $S$ konsistent. Da in der Aufzählung alle abgeschlossenen Formeln betrachtet werden, muss $S$ am Ende auch vollständig sein. Daher gibt es eine Relationalstruktur $\mathcal{R}_\infty$, so dass $T_{\mathcal{R}_\infty} = T_S$ gilt. $\mathcal{R}_\infty$ erfüllt dann $S$ und deshalb auch $T_1$ bzw. $T$.

Auf die gleiche Weise können wir eine Relationalstruktur $\mathcal{R}_\in$ konstruieren, die $T_2$ und $T$ erfüllt. Wie oben erwähnt, können die Strukturen nicht gleich sein, da sie dann $A$ und $\neg A$ gleichzeitig erfüllen müssten. Wir haben also gezeigt, dass es zwei verschiedene Relationalstrukturen gibt, die beide $T$ erfüllen.

Zum Schluss sei noch angemerkt, dass man auf die selbe Weise induktiv weitere erfüllende Strukturen konstruieren kann, da $T_1$ bzw. $T_2$ ja wieder nicht vollständige, konsistente Theorien sind. Für eine unvollständige Theorie, in der noch unendlich viele abgeschlossene Formeln "fehlen", kann man so die Existenz unendlich vieler erfüllender Strukturen zeigen. Die Peano-Axiome bzw. die von ihnen erzeugte Theorie sind ein Beispiel für eine solche Theorie.

zu **Aufgabe 6:** Zu zeigen: Es gibt Nichtstandardmodelle für die Peano-Axiome.

Wie in der Aufgabe angegeben, benutzen wir das folgende erweiterte Axiomensystem.

$$P^* := P \cup \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\},$$

wobei $A_i \equiv \exists z\, [S^i(0) + z = \infty]$ und $\infty$ ein neues Konstantensymbol ist.

Wir wollen zeigen, dass jede endliche Teilmenge dieses Axiomensystems erfüllbar ist. Dazu definieren wir die Mengen

$$P_i := P \cup \{A_i \mid i \leq i\}.$$

Dies sind nicht alle endlichen Teilmengen von $P^*$, aber jede solche endliche Teilmenge ist auch Teilmenge eines $P_i$ und es genügt deshalb zu zeigen, dass jedes $P_i$ erfüllbar ist (vgl. Aufgabe 6 auf Blatt 2).

Die folgende Interpretation erfüllt $P_i$:

$$I = (\mathbb{N}, I_c, I_v)$$

wobei $S$, $+$ und $*$ durch die üblichen Nachfolger-, Additions- und Multiplikationsfunktionen auf $\mathbb{N}$ interpretiert werden und

$$I_c(\infty) = i.$$

Dass diese Interpretation $P_i$ tatsächlich erfüllt, kann man leicht einsehen. Damit ist jedes $P_i$ und daher auch jede Teilmenge von $P^*$ erfüllbar und nach dem Kompaktheitssatz ist dann auch $P^*$ erfüllbar. Die natürlichen Zahlen sind aber sicher kein Modell für $P*$, denn dieses Element $\infty$ ist – wie das Symbol ja auch schon nahelegt – ein unendliches Element. Die Formeln $A_i$ in $P^*$ erfordern zusammen, dass $\infty$ größer ist als jede natürliche Zahl. Es gibt also ein Modell für $P^*$, das nicht isomorph zu $\mathbb{N}$ ist und da $P$ eine Teilmenge von $P^*$ ist, erfüllt dieses Modell auch die Peano-Axiome.

Die hier verwendete konstruktion ist ein Spezialfall von Aufgabe 5. Die Theorie der Peano-Axiome entspricht der dort verwendeten Theorie $T$, die hier um ein Axiom erweitert wird, das von den natürlichen Zahlen (eine Relationalstruktur!) nicht erfüllt wird. Dass hier der Kompaktheitssatz verwendet wird, ist auch kein Zufall, ist die Konstruktion in dessen Beweis der von Aufgabe 5 doch sehr ähnlich.

zu **Aufgabe 7:**

1. Die benötigte Sprache besteht einfach aus den erwähnten Konstanten $true$ und $false$, den Funktionskonstanten *and*, *or* (zweistellig) sowie *not* (einstellig). Außerdem nehmen wir noch die Individuenkonstanten $p_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und wie üblich die Individuenvariablen $x_i$ hinzu, um die aussagenlogischen Variablen zu repräsentieren. Achtung: Die $p_i$ sind hier *Funktionskonstanten* und nicht, wie sonst üblich, Prädikatskonstanten. Dies soll die Notation aus der Aussagenlogik widerspiegeln. Wer sich damit unwohl fühlt, kann statt $p_i$ einfach $a_i$ einsetzen. Wie üblich, werden wir bei der Naotation $p$, $q$, $r$ etc. und $x$, $y$, $z$ verwenden. Ein einstelliges Prädikatssymbol ist in dieser Sprache automatisch eine Bewertung, da es jedem Term (also jeder aussagenlogischen Formel) einen Wahrheitswert zuordnet. Wir verwenden für Bewertungen den Bezeichner *val*.

2. Die Axiome für die logischen Operatoren sind einfach, wir führen die Bewertungen von *not*-, *and*- und *or*-Termen genau auf die logischen Verknüpfungen der Prädikatenlogik zurück. Da die Operatoren unter allen Bewertungen gleich ausgewertet werden sollen, müssen wir über die Bewertungen quantifizieren (Prädigatenlogik zweiter Stufe):

$$\begin{array}{lrlcl}
Ax1: & \forall Val\ \forall x & Val(not(x)) & \leftrightarrow & \neg Val(x) \\
Ax2: & \forall Val\ \forall x \forall y & Val(and(x,y)) & \leftrightarrow & Val(x) \wedge Val(y) \\
Ax3: & \forall Val\ \forall x \forall y & Val(or(x,y)) & \leftrightarrow & Val(x) \vee Val(y)
\end{array}$$

3. Die Axiome für *taut*, *uns*, *conc* und *eq* geben nun genau die Definitionen aus der Aussagenlogik wieder:

$$\begin{array}{lrlcl}
Ax4: & \forall x & taut(x) & \leftrightarrow & \forall Val\ [Val(x)] \\
Ax5: & \forall x & uns(x) & \leftrightarrow & taut(not(x)) \\
Ax6: & \forall x \forall y & conc(x,y) & \leftrightarrow & \forall Val\ [Val(x) \rightarrow Val(y)] \\
Ax7: & \forall x \forall y & eq(x,y) & \leftrightarrow & conc(x,y) \wedge conc(y,x)
\end{array}$$

   Wie oben erwähnt, sind die Axiome korrekt, weil sie sich direkt an die Definitionen aus der Aussagenlogik halten. Formal müsste man das mit einer Induktion über den Aufbau der Terme bzw. aussagenlogischen Formeln beweisen, da Bewertungen induktiv definiert sind.