SS 2011 06. Juli 2011

Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 11

Prof. Dr. Klaus Madlener Abgabe bis 13. Juli 2011 10:00 Uhr

1. Aufgabe: [Axiomatisierung, Übung]

1. Definieren Sie eine Formel A_n der Prädikatenlogik erster Stufe, so dass jede Interpretation, die A_n erfüllt, genau n Elemente hat. Genauer ist damit gemeint, dass in jeder Interpretation $I = (D, I_C, I_V)$, die A_n erfüllt, der Definitionsbereich D genau n Elemente hat.
2. Definieren Sie eine Formel A_∞ der Prädikatenlogik erster Stufe, so dass jede erfüllende Interpretation von A_∞ unendlich viele Elemente hat.
3. Zeigen Sie, dass der Kompaktheitssatz nicht für die Prädikatenlogik 2. Stufe gilt.

2. Aufgabe: [Herleitungen in $\mathcal{F}$, 2+2P]
Zeigen Sie:

1. $\forall x[p(x, y)],\ y = z \vdash_{\mathcal{F}} \forall x[p(x, z)]$.
2. $\forall x[p(x) \to q(x)], \forall x[p(x)] \vdash_{\mathcal{F}} q(f(a))$

3. Aufgabe: [Korrektheit von $\mathcal{F}'$, 4+1P]

1. Zeigen Sie die Korrektheit der Generalisierungsregel.
2. In der Vorlesung wurde erwähnt, dass die Aussage $\Sigma \vdash_{\mathcal{F}'} A \rightsquigarrow \Sigma \vdash_{\mathcal{F}} A$ im Allgemeinen *nicht* gilt. Dies bedeutet, dass nicht alle logischen Folgerungen aus Σ, die in $\mathcal{F}'$ hergeleitet werden können, auch in $\mathcal{F}$ hergeleitet werden können. Warum steht dieses Ergebnis nicht im Widerspruch zur Korrektheit beider Kalküle?

4. Aufgabe: [Theorien, 3+3+2P]
Zeigen Sie:

1. Sei M eine Theorie erster Stufe. Es gibt eine Interpretation I mit $I \models M$, gdw. M konsistent ist.
2. Falls T eine konsistente, nicht vollständige Theorie erster Stufe ist, dann gilt für jede abgeschlossene Formel A mit $A, \neg A \notin T$, dass sowohl $T_{T\cup\{A\}}$ als auch $T_{T\cup\{\neg A\}}$ konsistente Theorien sind.
3. Seien T_1 und T_2 Theorien erster Stufe. Gilt $T_1 \subsetneq T_2$ und ist T_1 vollständig, dann ist T_2 inkonsistent.

5. Aufgabe: [Theorien, 5P]

Sei T eine konsistente, nicht vollständige Theorie erster Stufe. Zeigen Sie, dass es mindestens zwei verschiedene Relationalstrukturen gibt, die T erfüllen.

6. Aufgabe: [Nichtstandardmodelle, 5P]

Zeigen Sie, dass es Nichtstandardmodelle für die Peano-Axiome gibt (Folie 220). D.h. zeigen sie, dass es eine Interpretation gibt, die die Menge P der Peano-Axiome erfüllt, die aber nicht isomorph zu den natürlichen Zahlen ist.

Hinweis: Betrachten Sie das folgende erweiterte Axiomensystem und wenden sie den Kompaktheitssatz an:

$$P^* := P \cup \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\},$$

wobei $A_i \equiv \exists z\, [S^i(0) + z = \infty]$. Dabei sei ∞ ein neues Konstantensymbol und $S^i(0)$ sei die i-malige Anwendung von S auf 0, also z.B. $S^3(0) \equiv S(S(S(0)))$.

7. Aufgabe: [Axiomatisierung, 1+3+5P]

Charakterisieren Sie die Aussagenlogik (in den Operatoren $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ und mit den Konstanten *true* und $false$) mit Hilfe der Prädikatenlogik. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

1. Geben Sie eine Sprache der Prädikatenlogik an, so dass jeder Term eine boolesche Formel repräsentiert.
2. Geben Sie Axiome an, die die booleschen Operatoren charakterisieren. D.h. sind zwei Terme t_1 und t_2 äquivalent im Sinne der Aussagenlogik und erfüllt eine Interpretation I Ihre Axiome, dann soll $I(t_1) = I(t_2)$ gelten.
3. Geben sie für die Prädikatskonstanten $taut(x)$, $uns(x)$, $conc(x)$ und $eq(x, y)$ jeweils Axiome an, so dass gilt:
   - $\Sigma \models taut(t)$ gdw. t eine Tautologie im Sinne der Aussagenlogik ist.
   - $\Sigma \models uns(t)$ gdw. t unerfüllbar im Sinne der Aussagenlogik ist.
   - $\Sigma \models conc(t_1, t_2)$ gdw. $t_1 \models t_2$ im Sinne der Aussagenlogik gilt.
   - $\Sigma \models eq(t_1, t_2)$ gdw. t_1 und t_2 logisch äquivalent im Sinne der Aussagenlogik sind.

   Σ bezeichnet dabei die Menge der Axiome aus (2) und (3). Begründen Sie die Korrektheit Ihrer Axiome. Wie müsste man die Korrektheit formal beweisen?

Abgabe: bis 13. Juli 2011 10:00 Uhr im Kasten neben Raum 34-401.4