SS 2011 13. Juli 2011

Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 12

Prof. Dr. Klaus Madlener Abgabe bis 20. Juli 2011 10:00 Uhr

1. Aufgabe: [Tableauxfolgerung, Übung]
Es sei

$$\Sigma = \{\forall x \forall y \forall z\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \quad \forall x\ 1 \cdot x = x, \quad \forall x\ x \cdot x = 1\}.$$

Zeigen Sie $\Sigma \models \forall x\ x \cdot 1 = x$ mit der Tableaux-Methode.

2. Aufgabe: [Formalisieren mit Tableaux, Übung]
Betrachten Sie folgende Aussagen:

- Jeder Polizist ist entschlossen.
- Wer entschlossen und intelligent ist, wird seinen Dienst zufriedenstellend tun.
- Georg ist ein intelligenter Polizist.
- Daher wird Georg seinen Dienst zufriedenstellend tun.

1. Formalisieren Sie die Aussagen in einer geeigneten Sprache der Prädikatenlogik 1. Stufe.
2. Zeigen Sie mit Hilfe eines semantischen Tableaux, dass die letzte Aussage eine Folgerung der anderen ist.
3. Konstruieren Sie mit der Tableaux-Methode ein Modell für die ersten drei Aussagen.

3. Aufgabe: [Modell durch Tableau, Übung]
Konstruieren Sie mit der Tableaux-Methode eine erfüllende Interpretation für

1. $\{\exists x \exists y \exists z\ (\neg x = y \wedge \neg x = z),\ \forall x\ x = x\}$

4. Aufgabe: [Tableaux, 6P]
Zeigen Sie mit der Tableaux-Methode:

1. $\vdash_\tau \forall x[A(x)] \leftrightarrow \forall y[A(y)]$
2. $\forall x[A(x) \rightarrow B(x)] \vdash_\tau \exists x[A(x) \rightarrow \exists x[B(x)]]$
3. $\vdash_\tau \forall x \forall y[\neg p(x) \rightarrow (((x = y) \rightarrow (p(x) \rightarrow p(y))) \rightarrow (((x = y) \rightarrow p(x)) \rightarrow ((x = y) \rightarrow p(y))))]$

5. Aufgabe: [Modell durch Tableau, 4P]
Konstruieren Sie mit der Tableaux-Methode eine erfüllende Interpretation für die folgenden Formeln:

1. $\exists x \exists y [x \neq y \wedge \forall z [z = x \vee z = y]]$
2. $\exists x \forall y [p(x) \rightarrow p(y)]$

6. Aufgabe: [Korrektheit der Tableaux-Regeln, 8P]

Seien γ- und δ-Formeln wie in der Vorlesung für die Tableaux-Methode definiert und sei I eine Interpretation, so dass es zu jedem $d \in D$ einen Term t mit $I(t) = d$ gibt. Zeigen Sie:

- Wenn $\gamma[t]$ unerfüllbar ist, dann ist auch γ unerfüllbar.
- Wenn $I \models \{\gamma[t] \mid t \text{ ist Term}\}$ gilt, so gilt auch $I \models \gamma$.
- Wenn $\delta[y]$ unerfüllbar ist, dann ist auch δ unerfüllbar.
- $\delta[y] \models \delta$.

Abgabe: bis 20. Juli 2011 10:00 Uhr im Kasten neben Raum 34-401.4

zu **Aufgabe 1:**

$$\forall x\ x = x$$

$$\forall x \forall y \forall z\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

$$\forall x\ x \cdot 1 = x$$

$$\forall x\ x \cdot x = 1$$

$$\neg \forall x\ 1 \cdot x = x$$

$$\neg 1 \cdot a = a$$

$$\forall y \forall z\ a \cdot (y \cdot z) = (a \cdot y) \cdot z$$

$$\forall z\ a \cdot (a \cdot z) = (a \cdot a) \cdot z$$

$$a \cdot (a \cdot a) = (a \cdot a) \cdot a$$

$$a \cdot 1 = a$$

$$a \cdot a = 1$$

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a \quad (\text{von } a \cdot (a \cdot a) = (a \cdot a) \cdot a)$$

$$a = 1 \cdot a$$

$$a = a$$

$$1 \cdot a = a$$

$$\lightning$$

zu **Aufgabe 2:**

Die Aussagen werden folgendermaßen formalisiert:

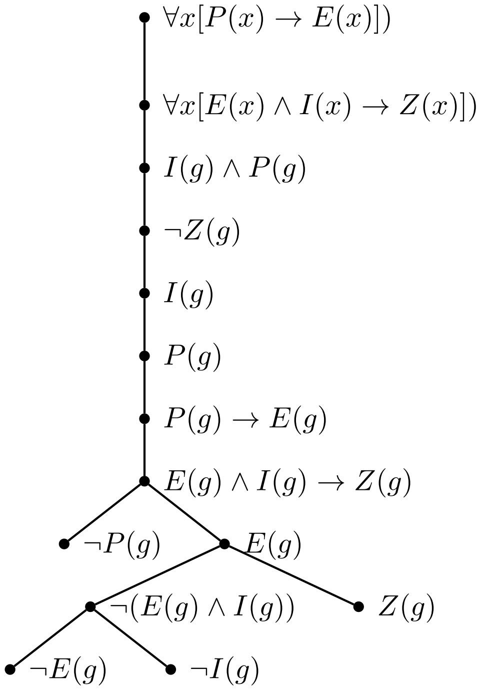
- Jeder Polizist ist entschlossen: $\forall x[P(x) \to E(x)]$.
- Wer entschlossen und intelligent ist, wird seinen Dienst zufriedenstellend tun: $\forall x[E(x) \wedge I(x) \to Z(x)]$.
- Georg ist ein intelligenter Polizist: $I(g) \wedge P(g)$.
- Daher wird Georg seinen Dienst zufriedenstellend tun: $Z(g)$.

Dabei sind die Großbuschstaben in diesem Fall Prädikatskonstanten und $P(x)$ entspricht x ist Polizist, $E(x)$ entspricht x ist entschlossen, $I(x)$ entspricht x ist intelligent und

$Z(x)$ entspricht x ist zuverläsig. (Achtung, dies ist keine Interpretation, sondern nur eine Zuordnung zum besseren Verständnis.) Nun muss folgendes gezeigt werden:

$$\{\forall x[P(x) \to E(x)], \forall x[E(x) \land I(x) \to Z(x)], I(g) \land P(g), \neg Z(g)\} \text{ ist unerfüllbar.}$$

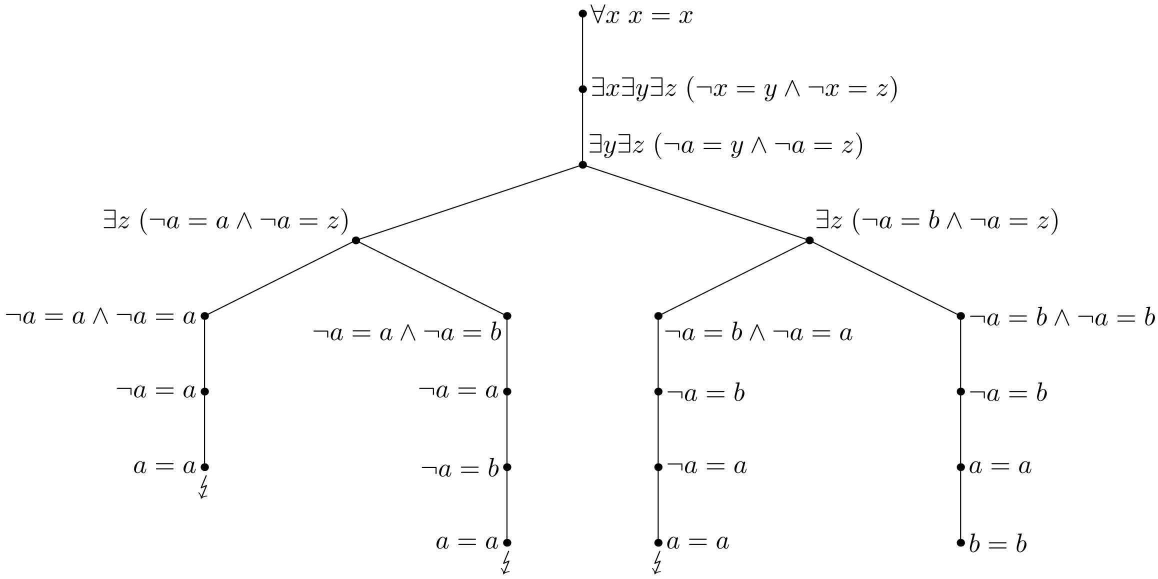
Das Tableau sieht folgendermaßen aus:



Alle Äste sind abgeschlossen, also ist die Menge unerfüllbar. Um ein Modell für die ersten drei Formeln zu konstruieren, muss nur $\neg Z(g)$ weggelassen werden, das Tableau sieht bis auf den dritten Knoten genau so aus wie oben. Dann ist aber der ganz rechte Ast nicht abgeschlossen und liefert ein Modell, nämlich das, in dem $I(g)$, $P(g)$, $E(g)$ und $Z(g)$ gelten.

zu **Aufgabe 3:** Je nachdem wie man das Tableau aufbaut, bekommt man unterschiedliche Modelle:

1. Die erste Methode ist, bei den δ-Formeln zu verzweigen und systematisch die Elemente des (u.U. schon teilweise bekannten) Definitionsbereichs einzusetzen. Man probiert also gewissermaßen einfach alle Elemente des Definitionsbereichs aus. Hat man alle bereits bekannten Elemente ausprobiert, können dabei auch neue Elemente entstehen:



   Modell: $D = \{a, b\}$

2. Die zweite Methode setzt bei δ-Formeln immer neue Elemente ein, wie für die δ-Regeln in der Vorlesung beschrieben. Dafür müssen alle Instanzen der γ-Formeln betrachtet und überprüft werden, ob diese zu einem abgeschlossenen Tableaux führen:

$\forall x\ x = x$

$\exists x \exists y \exists z\ (\neg x = y \wedge \neg x = z)$

$\exists y \exists z (\neg a = y \wedge \neg a = z)$

$\exists z\ (\neg a = b \wedge \neg a = z)$

$\neg a = b \wedge \neg a = c$

$\neg a = b$

$\neg a = c$

$a = a$

$b = b$

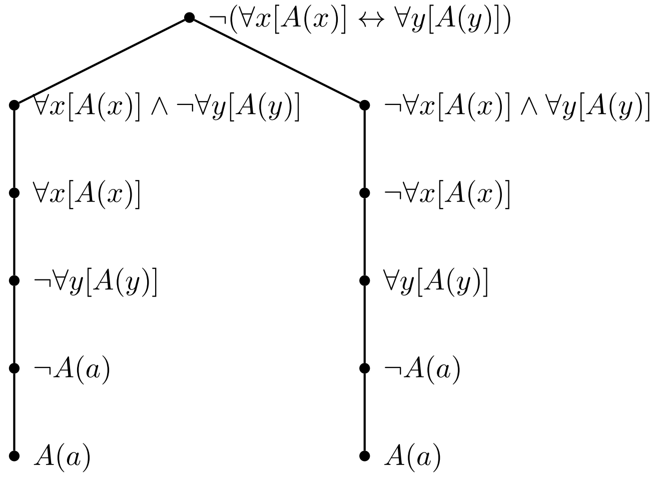
$c = c$

   Modell: $D = \{a, b, c\}$

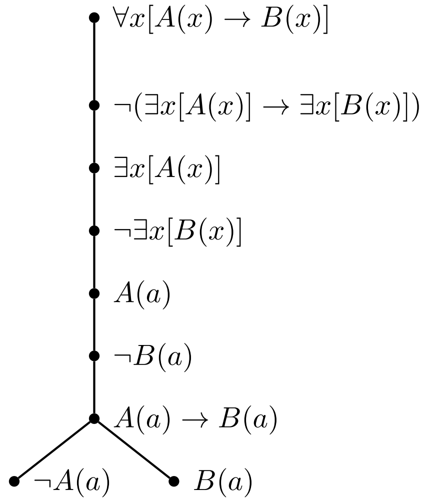
Die erste Methode konstruiert im Allgemeinen kleinere Modelle. Man muss also nicht so viele Instanzen der γ-Formeln betrachten. Die zweite Methode hat den Vorteil, dass man bei δ-Formeln nicht verzweigt.

zu **Aufgabe 4:**

1. $\vdash_\tau \forall x[A(x)] \leftrightarrow \forall y[A(y)]$:



2. $\forall x[A(x) \to B(x)] \vdash_\tau \exists x[A(x)] \to \exists x[B(x)]$:



3. $\vdash_\tau \forall x \forall y[\neg p(x) \to (((x = y) \to (p(x) \to p(y))) \to (((x = y) \to p(x)) \to ((x = y) \to p(y))))]$:

$$\neg\forall x\forall y[\neg p(x) \to (((x = y) \to (p(x) \to p(y))) \to (((x = y) \to p(x)) \to ((x = y) \to p(y))))]$$

$$\neg\forall y[\neg p(a) \to (((a = y) \to (p(a) \to p(y))) \to (((a = y) \to p(a)) \to ((a = y) \to p(y))))]$$

$$\neg(\neg p(a) \to (((a = b) \to (p(a) \to p(b))) \to (((a = b) \to p(a)) \to ((a = b) \to p(b)))))$$

$$\neg p(a)$$

$$\neg(((a = b) \to (p(a) \to p(b))) \to (((a = b) \to p(a)) \to ((a = b) \to p(b))))$$

$$((a = b) \to (p(a) \to p(b)))$$

$$\neg(((a = b) \to p(a)) \to ((a = b) \to p(b)))$$

$$((a = b) \to p(a))$$

$$\neg((a = b) \to p(b))$$

$$a = b$$

$$\neg p(b)$$

$$\begin{array}{cc} \neg a = b & p(b) \end{array}$$

zu **Aufgabe 5:**

1. $\exists x\exists y[x \neq y \land \forall z[z = x \lor z = y]]$:

$$\exists x\exists y[x \neq y \land \forall z[z = x \lor z = y]]$$

$$\exists y[a \neq y \land \forall z[z = a \lor z = y]]$$

$$a \neq b \land \forall z[z = a \lor z = b]$$

$$a \neq b$$

$$\forall z[z = a \lor z = b]$$

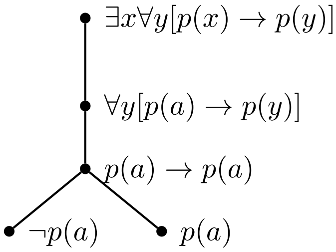
$$a = a \lor a = b$$

$$b = a \lor b = b$$

$$\begin{array}{cc} b = a & b = b \\ \begin{array}{cc} a = a & a = b \end{array} & \begin{array}{cc} a = a & a = b \end{array} \end{array}$$

Es wurden zwei Elemente a, b eingeführt, also ist jedes I mid $D = \{a, b\}$ ein Modell.

2. $\exists x\forall y[p(x) \to p(y)]$:



Also ist I mit $D = \{a\}$ ein Modell, und zwar sowohl mit $I(p) = \{a\}$, als auch mit $I(p) = \emptyset$.

zu **Aufgabe 6:**

Eigentlich sind für die beiden Formeltypen jeweils zwei Fälle zu unterscheiden. Da aber $\exists x A \models\!\dashv \forall x \neg A$ und $\neg \forall x A \models\!\dashv \exists x \neg A$ gelten, reicht es, für γ- und δ-Formeln jeweils nur den ersten Fall zu betrachten.

- Wenn $A_x[t]$ unerfüllbar ist, dann ist auch $\forall x A$ unerfüllbar: Nach Folie 178 ist $\forall x A \to A_x[t]$ eine Tautologie, also gilt mit dem Deduktionstheorem $\forall x A \models A_x[t]$. Daraus folgt sofort die Behauptung.
- Wenn $I \models \{A_x[t] \mid t \text{ ist Term}\}$ gilt, so gilt auch $I \models \forall x A$: Da es zu jedem $d \in D$ einen Term t mit $I(t) = d$ gibt und $I(A_x[t])$ ist, gilt $I^{x,d}(A) = 1$ für alle $d \in D$. Also gilt $I \models \forall x A$.
- Wenn $A_x[y]$ unerfüllbar ist, dann ist auch $\exists x A$ unerfüllbar: Wir zeigen die Kontraposition. Sei $\exists x A$ erfüllbar, also $J(\exists x A) = 1$ für eine Interpretation J. Dann gibt es ein $d \in D$, so dass $J^{x,d}(A) = 1$ ist. Da in $A_x[y]$ nur x durch y ersetzt ist und y in A nicht frei vorkommt, ist dann auch $J^{y,d}(A_x[y]) = 1$, also ist $A_x[y]$ erfüllbar.
- $A_x[y] \models \delta$. Sei $J(A_x[y]) = 1$ und $J(y) = d$. Dann ist $J^{y,d}(A_x[y]) = J^{(}A_x[y]) = 1$ und mit der selben Argumentation wie oben auch $J^{x,d}(A) = 1$. Dies bedeutet aber, dass $J(\exists x A) = 1$ ist.