SS 2011 — 20. April 2011

Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 1

Prof. Dr. Klaus Madlener — Abgabe bis 27. April 2011 10:00h

1. Aufgabe: [strukturelle Induktion, Übung]

Zeigen Sie mit struktureller Induktion über den Aufbau der Aussageformen:

1. Jede aussagenlogische Formel enthält zumindest ein von $\neg$ verschiedenes Symbol.
2. In jeder aussagenlogischen Formel $A \in F$ ist die Anzahl der Klammerpaare gleich der Anzahl der Operatoren.
3. Sei n die Anzahl der Vorkommen von Variablen von $A \in F$. Dann ist die Anzahl der Operatoren in A mindestens $n - 1$.

2. Aufgabe: [Bewertung von Formeln, Übung]

Seien $p, q \in V$ aussagenlogische Variablen. Zeigen Sie durch Betrachtung aller Bewertungen:

1. $A_1 \equiv (p \to q) \vee (q \to p)$ ist eine Tautologie, d.h. die Formel ist für alle Belegungen erfüllt.
2. $A_2 \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$ ist erfüllbar, d.h. es gibt erfüllende Belegungen.

3. Aufgabe: [Beziehung zwischen umgangssprachlicher und formaler Logik, 8P]

Versuchen Sie, die folgenden umgangssprachlichen Aussagen in Formeln der Aussagenlogik zu übertragen.

1. „Studenten essen in der Mensa."
2. „Wenn es um den Sitzplatz geht, das Alter sitzt, die Jugend steht!"
3. „Wer Banknoten nachmacht oder verfälscht oder nachgemachte oder verfälschte sich verschafft und in Verkehr bringt, wird mit Freiheitsstrafe nicht unter zwei Jahren bestraft."
4. „William Shakespeare schrieb 'Moby Dick' und Paris ist die Hauptstadt von Spanien oder Katzen jagen Mäuse."
5. „Freitags isst man Schweinerückensteak."
6. „Dieser Satz hat fünf Wörter."
7. „Dieser Satz hat nicht fünf Wörter."
8. „Wenn es einen Wochentag gibt, an dem das Mensaessen an allen Ausgaben gut ist, dann gibt es auch einen Wochentag, an dem es an keiner Ausgabe gut ist."

Welche dieser Aussagen sind „wahr", welche „falsch"? Diskutieren Sie kurz die auftretenden Probleme.

Beispiel: Um die Aussage „Wenn ich nicht zu hause bin, kannst du mich über Mobilfunk erreichen." zu formalisieren, kann man zwei Atome

- $A \equiv$ „Ich bin zu hause." und
- $B \equiv$ „Du kannst mich über Mobilfunk erreichen."

definieren. Die obige Aussage lässt sich dann durch die Formel $(\neg A) \to B$ repräsentieren. Diese Aussage ist falsch. (Wer ist mit „Ich" und „Du" gemeint?)

4. Aufgabe: [Beziehung zwischen umgangssprachlicher und formaler Logik, 6P]
„Worin besteht das Geheimnis Ihres langen Lebens?" wurde ein 100-jähriger gefragt. „Ich halte mich streng an die folgenden Diätregeln: Wenn ich kein Bier zu der Mahlzeit trinke, dann esse ich immer Fisch. Immer wenn ich Fisch und Bier zusammen habe, verzichte ich auf Eiscreme. Wenn ich Eiscreme esse oder Bier meide, rühre ich Fisch nicht an.", antwortete er. Der Fragesteller fand diesen Ratschlag ziemlich verwirrend.

Formalisieren Sie den Diätplan mit Aussageformen und versuchen Sie, eine weniger verwirrende Formulierung zu finden.

5. Aufgabe: [strukturelle Induktion, 8P]

1. Zeigen Sie, dass jede aussagenlogische Formel endlich ist.
2. Definieren Sie induktiv die Menge G aller aussagenlogischen Formeln, in denen nur die Operatoren $\neg, \wedge, \vee$ vorkommen, und in denen genau jede Variable negiert ist (also keine zusammengesetzten negierten Formeln). Zeigen Sie mit struktureller Induktion, dass in jeder Formel $A \in G$ genau so viele einstellige Operatoren wie Variablen vorkommen.
3. Betrachten Sie die beiden folgenden induktiv definierten Formelmengen:

   F':
   1. $p_i \in F'$ für alle $i \in \mathbb{N}$
   2. Sind $A, B \in F'$, so sind auch $A \wedge B$ und $A \vee B \in F'$.
   3. F' ist die kleinste Menge, die 1. und 2. erfüllt.

   F'':
   1. $F' \subset F''$
   2. Sind $A, B \in F''$, so sind auch $\neg A$, $A \to B$ und $A \leftrightarrow B \in F''$.
   3. F'' ist die kleinste Menge, die 1. und 2. erfüllt.

   Beschreiben Sie jeweils mit eigenen Worten, was für Formeln diese Mengen enthalten und geben Sie Beispiele für Formeln an, die enthalten bzw. nicht enthalten sind.

6. Aufgabe: [Bewertung von Formeln, 6P]
Welche der folgenden aussagenlogischen Formeln sind Tautologien, erfüllbar oder unerfüllbar?

$$A_3 \equiv \neg(((p \to q) \wedge p) \to q)$$
$$A_4 \equiv \neg((\neg p \vee q) \wedge p) \vee q$$
$$A_5 \equiv p \to \neg p$$
$$A_6 \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee p)$$
$$A_7 \equiv (\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r) \vee (\neg r \wedge p)$$
$$A_8 \equiv p \to (q \to p)$$

Abgabe: bis 27. April 2011 10:00h im Kasten neben Raum 34-401.4

zu **Aufgabe 1:**

1. zu zeigen: Jede aussagenlogische Formel enthält zumindest ein von $\neg$ verschiedenes Symbol.

   Induktionsanfang: Im Induktionsanfang müssen die atomaren Formeln betrachtet werden. Diese sind nach der Definition von F aus der Vorlesung gerade die aussagenlogischen Variablen p_i für alle $i \in \mathbb{N}$. Jede Atomare Formel ist also eine Variable, enthält also auch eine solche. Damit ist gezeigt, dass jede atomare Formel ein von $\neg$ veschiedenes Symbol enthält.

   Induktionsvoraussetzung: Jede echte Teilformel einer Formel A enthalte ein von $\neg$ veschiedenes Symbol.

   Induktionsschritt: Zu zeigen: Dann enthält Auch A nun auch ein von $\neg$ verschiedenes Symbol. A kann von der Form $A \equiv (\neg B)$ oder $A \equiv (B * C)$ für $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ sein. Da B und C nach Induktionsvoraussetzung ein von $\neg$ verschiedenes Symbol enthalten, gilt dies auch für A.

2. zu zeigen: In jeder aussagenlogischen Formel $A \in F$ ist die Anzahl der Klammerpaare gleich der Anzahl der Operatoren.

   Induktionsanfang: Für die atomaren Formeln $A \in F$ gilt, dass die Anzahl der Klammenpaare und der Operatoren jeweils 0, also gleich ist. Damit gilt die Behauptung für alle atomaren Formeln.

   Induktionsvoraussetzung: Für alle Elemente einer Teilmenge $X \subset F$ sei die Anzahl der Klammerpaare gleich der Anzahl der Operatoren.

   Induktionsschritt: Zu zeigen: In allen Formeln A, die aus Formeln in X zusammengesetzt sind, ist die Anzahl der Operatoren auch gleich der Anzahl der Klammerpaare. Wie oben schon bemerkt, gilt $A \equiv (\neg B)$ oder $A \equiv (B * C)$ für $B, C \in X$ und $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. In In beiden Fällen kommen zu den Klammern und Operatoren in B und C, die laut Induktionsvoraussetzung die Behauptung erfüllen noch je eine öffnende, eine schließende Klammer und ein Operator hinzu, so dass die Behauptung auch für A gilt.

   Die Induktionsvoraussetzung ist hier anders formuliert als oben, diese Formulierung ist jedoch gleichwertig mit der obigen und es ist Geschmackssache, welche man benutzt. Da Formeln induktiv aus anderen Formeln zusammengesetzt sind, geht es bei der strukturellen Induktion darum, die Behauptung unter der Voraussetzung zu zeigen, dass sie für alle echten Teilformeln schon gilt. Dies kann ebensogut beschrieben werden, indem man annimmmt, die Behauptung gelte für eine Formelmenge X, und dann zeigt, dass sie nun für alle Formeln gilt, die man aus Formeln aus X zusammensetzen kann. Da die Menge X beliebig ist, hat man damit auch gezeigt, dass die Behauptung für jede zusammengesetzte Formel gilt.

3. zu zeigen: Ist n die Anzahl der Vorkommen von Variablen von $A \in F$, so ist die Anzahl der Operatoren in A mindestens $n - 1$.

Induktionsanfang: Für die atomaren Formeln $A \in F$ gilt, dass keine Operatoren und genau eine Variable vorkommt. Damit gilt die Behauptung für die atomaren Formeln.

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für alle Teilformeln von A.

Induktionsschritt: Zu zeigen: Dann gilt sie auch für A.

a) $A \equiv (\neg B)$. Hier bleibt die Anzahl der Vorkommen von Variablen in A gleich der in B, die Anzahl der Operatoren erhöht sich gegenüber der von B um 1. Nach der Induktionsvoraussetzung galt die Ungleichung schon für B, also gilt sie weiterhin auch für A.

b) $A \equiv (B * C)$ Seien o_B die Anzahl der Operatoren in B, t_B die Anzahl der atomaren Formeln in B, o_C und t_C entsprechend für C. Nach Induktionsvoraussetzung gelten $t_B - 1 \leq o_B$ und $t_C - 1 \leq o_C$. Für die zusammengesetzte Formel gilt nun, dass die Anzahl der atomaren Formeln $t_A = t_B + t_C$ ist und die Anzahl der Operatoren $o_A = o_B + o_C + 1$. Es folgt $o_A = o_B + o_C + 1 \geq (t_B - 1) + (t_C - 1) + 1 = (t_B + t_C - 1) = t_A - 1$

Achtung: Die Induktionsvoraussetzung ist hier sehr grob formuliert. Das liegt hier daran, dass man die Definitionen von o_A, t_A etc. sonst schon in der Induktionsvoraussetzung hätte angeben müssen, was das Lesen dieses Textes sicher erschwert hätte. Im Allgemeinen sind solche groben Formulierungen jedoch mit Vorsicht zu genießen, weil man sonst leicht dazu neigt, diesen Satz der Einfachheit halber immer hinzuschreiben. Wir werden jedoch Beispiele für Induktionsaufgaben sehen, bei denen dies nicht richtig wäre.

Bemerkungen:

- In der Literatur werden Induktionsbeweise oft abgekürzt, indem nur Induktionsanfang, und Induktionsschritt hingeschrieben werden, im Extremfall bleibt nur noch der Induktionsschritt stehen. Diese Abkürzungen sind nur dann sinnvoll, wenn alles andere unmissverständlich klar ist, d.h. welcher Kalkül zugrunde liegt, was für den Induktionsanfang zu zeigen ist, was die Induktionsbehauptung und die Induktionsvoraussetzung ist.
- In der Klausur wird erwartet, dass Induktionsanfang, Induktionsvoraussetzung und Induktionsschritt unmissverständlich angegeben werden.

zu **Aufgabe 2:**

$A_1 \equiv ((p \to q) \vee (q \to p))$ ist eine Tautologie:

p	q	$(p \to q)$	$(q \to p)$	A_1
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

$A_2 \equiv ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$ ist erfüllbar:

p	q	$(p \rightarrow q)$	$(q \rightarrow p)$	A_2
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

zu **Aufgabe 3:**

1. „Studenten essen in der Mensa.“ist bereits atomar (wahr). Mit Hilfe der Aussagenlogik kann diese Aussage nicht weiter verfeinert werden.
2. „Wenn es um den Sitzplatz geht, das Alter sitzt, die Jugend steht!“:
   Es sind drei atomare Aussagen erkennbar, die auch irgendwie durch Junktoren verbunden zu sein scheinen, d.h. $A \rightarrow (B \wedge \neg C)$. Dieses Modell geht aber an der Wirklichkeit weit vorbei, zum einen ist es zu grob, um die Sachverhalte sinnvoll auszudrücken. Mit Prädikatenlogik könnte man die Sachverhalte besser darstellen, was jünger bedeutet, dass zwei Personen in einem Konflikt um einen Sitzplatz sind, was sitzen und stehen bedeuten.
   Man kann man sich leicht vorstellen, dass mit einem Gipsbein wohl doch der Jüngere den Sitzplatz bekommen würde. Also ist die Aussage unter rein aussagenlogischen Aspekten so keine Tautologie.
3. $A \equiv$ „Banknoten nachmachen“, $B \equiv$ „Banknoten verfälschen“, $C \equiv$ „sich nachgemachte Banknoten verschaffen“, $D \equiv$ „sich verfälschte Banknoten verschaffen“, $E \equiv$ „nachgemachte Banknoten in Verkehr bringen“, $F \equiv$ „verfälschte Banknoten in Verkehr bringen“und $G \equiv$ „Freiheitsstrafe nicht unter 2 Jahren erhalten“. Dieser Satz ist mehrdeutig (Klammerung?) und erlaubt mehrere unterschiedliche Repräsentationen. $((A \vee B) \vee ((C \wedge E) \vee (D \wedge F))) \rightarrow G$ ist eine Repräsentation der Aussage. Falsch ist diese Aussage, weil nicht jeder Geldfälscher überführt wird.
4. Mit $A \equiv$ „William Shakespeare schrieb ‘Moby Dick’.“, $B \equiv$ „Paris ist die Hauptstadt von Spanien.“ und $C \equiv$ „Katzen jagen Mäuse.“hat man immer noch die Wahl sich für $(A \wedge B) \vee C$ oder für $A \wedge (B \vee C)$ zu entscheiden. Im ersten Fall hat man eine wahre Aussage, im zweiten Fall eine falsche. Hier ist die Umgangssprache mehrdeutig.
5. „Freitags isst man Schweinerückensteak.“:
   Diese Aussage ist atomar. Ob sie wahr oder falsch ist, muss wohl jeder für sich entscheiden. Für alle Menschen gilt sie sicher nicht, jedoch könnte sie durchaus für den einen oder anderen Mensagänger gelten.
6. „Dieser Satz hat fünf Wörter.“:
   Die Aussage scheint atomar und offensichtlich wahr zu sein. Probleme bereitet allerdings das Wort „Dieser“: Meint die Person, von der die Aussage stammt, ihre eigene Aussage, oder ist irgendein anderer Satz gemeint? Im ersten Fall könnte man die Aussage als „Der Satz „Dieser Satz hat fünf Wörter“hat fünf Wörter “

auffassen und die Aussage ist wahr. Damit wird man aber dem Wort „Dieser“ nicht gerecht, das ja eigentlich einen Selbstbezug ausdrücken soll, der in der uns bekannten Syntax aber nicht ausgedrückt werden kann. Im zweiten Fall hängt es vom tatsächlich gemeinten Satz ab.

7. „Dieser Satz hat nicht fünf Wörter.“:
   Ist die Aussage nun als Gegenteil der obigen gemeint oder ist das „Dieser “ selbstbezüglich?
8. „Wenn es einen Wochentag gibt, an dem das Mensaessen an allen Ausgaben gut ist, dann gibt es auch einen Wochentag, an dem es an keiner Ausgabe gut ist. “:
   Intuitiv möchte man hier sofort Quantoren, also $\forall$ und $\exists$, verwenden. Dies ist jedoch in der Aussagenlogik nicht möglich, so dass es zunächst gar nicht möglich zu sein scheint, diese Aussage zu formulieren. Da die Anzahl der Wochentage und der Mensaausgaben jedoch endlich ist, kann man sich mit $\wedge$ und $\vee$ behelfen.

   Dazu kann man für jeden Wochentag fünf Variablen einführen, die die Essensausgaben an diesem Tag beschreiben. Wenn z.B. Mo_1 wahr ist, dann bedeutet dies, dass das Essen am Montag an Ausgabe 1 gut ist oder Do_4 beschreibt die Qualität Donnerstags am Wok.

   Die obige Aussage könnte dann wie folgt formalisiert werden:

$$
\begin{aligned}
&((Mo_1 \wedge Mo_2 \wedge Mo_3 \wedge Mo_4 \wedge Mo_5)\\
\to&((\neg Di_1 \wedge \neg Di_2 \wedge \neg Di_3 \wedge \neg Di_4 \wedge \neg Di_5)\vee\\
&\vdots\\
&(\neg Fr_1 \wedge \neg Fr_2 \wedge \neg Fr_3 \wedge \neg Fr_4 \wedge \neg Fr_5)))\\
\wedge&\\
&((Di_1 \wedge Di_2 \wedge Di_3 \wedge Di_4 \wedge Di_5)\\
\to&((\neg Mi_1 \wedge \neg Mi_2 \wedge \neg Mi_3 \wedge \neg Mi_4 \wedge \neg Mi_5)\vee\\
&\vdots\\
&(\neg Fr_1 \wedge \neg Fr_2 \wedge \neg Fr_3 \wedge \neg Fr_4 \wedge \neg Fr_5)\vee\\
&(\neg Mo_1 \wedge \neg Mo_2 \wedge \neg Mo_3 \wedge \neg Mo_4 \wedge \neg Mo_5)))\\
\wedge&\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Es gibt viele Aspekte der Umgangssprache, die sich nur schwer oder gar nicht in formale Aussagenlogik übersetzen lassen. Selbst wenn das möglich ist, bleibt oft unter logischen Aspekten so viel offen, dass es nicht möglich ist, den Wahrheitsgehalt festzulegen. Häufig erhält man Aussageformen, die aber erst mit Prädikatenlogik symbolisch erfasst werden können.

zu **Aufgabe 4:**
Zunächst geben wir den Atomen folgende Bedeutung:

- $B \equiv$ „Bier trinken“,
- $F \equiv$ „Fisch essen“ und
- $E \equiv$ „Eiscreme essen“.

Die Aussage lässt sich als

$$A \equiv (\neg B \to F) \wedge (((B \wedge F) \to \neg E) \wedge ((E \vee \neg B) \to \neg F))$$

darstellen.
Der Wertetabelle kann man ansehen, dass diese Formel zu $B \wedge \neg(E \wedge F)$ äquivalent ist:

B	F	E	$\neg B \to F$	$(B \wedge F) \to \neg E$	$(E \vee \neg B) \to \neg F$	A
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0

Eine einfachere Formulierung des Diätplans lautet also: „Ich trinke zu jeder Mahlzeit Bier und esse nie Fisch und Eis zur selben Mahlzeit.“

zu **Aufgabe 5:**

1. zu zeigen: Jede aussagenlogische Formel ist endlich.
   Induktionsanfang: Jede aussagenlogische Variable ist endlich.
   Induktionsvoraussetzung: Alle echten Teilformeln einer Formel A seien endlich.
   Induktionsschritt: Zu zeigen: Dann ist auch A endlich. A ist mit einem Operator aus einer oder zwei, jedenfalls also endlich vielen, Teilformeln zusammengesetzt. Da diese Teilformeln nach Induktionsvoraussetzung endlich sind, muss A auch endlich sein.
2. Die induktive Definition der Formelmenge G sieht der von F sehr ähnlich. Da jede Variable negiert sein soll, behandeln wir jedoch den Negationoperator gleich bei den atomaren Formeln und nicht bei den zusammengesetzten. Außerdem müssen hier nur $\wedge$ und $\vee$ betrachtet werden, da die anderen Operatoren nicht gefordert sind. Die Definition sieht dann folgendermaßen aus:
   1. $\neg p_i \in G$ für alle $i \in \mathbb{N}$
   2. Sind $A, B \in G$, so sind auch $A \wedge B$ und $A \vee B \in F'$.
   3. G ist die kleinste Menge, die 1. und 2. erfüllt.

   Es bleibt noch zu zeigen, dass hier in jeder Formel genau so viele einstellige Operatoren (also $\neg$) wie Variablen vorkommen. Dies zeigen wir mit struktureller Induktion über den Aufbau von G.

Induktionsanfang: Die atomaren Formeln von G sind die Formeln $\neg p_i$ für ß $\in \mathbb{N}$. In jeder solchen Formel kommt ein $\neg$ und eine Variable vor.

Induktionsvoraussetzung: In allen echten Teilformeln einer Formel A kommen genau so viele einstellige Operatoren wie Variablen vor.

Induktionsschritt: Zu zeigen: Dann kommen auch in A genau so viele einstellige Operatoren wie Variablen vor. A hat nach Definition von G die Form $B*C$ für $* \in \{\wedge, \vee\}$, es kommt also weder eine zusätzlich Variable noch ein zusätzlicher einstelliger Operator im Vergleich zu B und C vor. Damit gilt die Behauptung auch für A.

3. Die Menge F' enthält alle aussagenlogischen Variablen und alle zusammengesetzten Formeln, die mit $\wedge$ und $\vee$ gebildet werden können, also z.B. die Formeln p, q, $p \wedge (q \vee r)$ etc.. Nicht enthalten sind Formeln wie $\neg p$, $p \to q$ etc..

   Die Menge F'' enthält alle Formeln aus F' und darüber hinaus solche Formeln, die *außerhalb* von $\wedge$, $\vee$ etc. noch andere Operatoren haben. Enthalten sind z.B. p, $\neg p$, $(p \wedge q) \to r$, nicht aber $\neg p \wedge q$ oder $(p \to q) \vee r$.

zu **Aufgabe 6:**

$A_3 \equiv \neg(((p \to q) \wedge p) \to q)$ ist widerspruchsvoll:

p	q	$(p \to q)$	$((p \to q) \wedge p)$	$(((p \to q) \wedge p) \to q)$	A_3
0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	0

$A_4 \equiv \neg((\neg p \vee q) \wedge p) \vee q$ ist eine Tautologie:

p	q	$((\neg p) \vee q)$	$(((\neg p) \vee q) \wedge p)$	$(\neg((\neg p) \vee q) \wedge p))$	A_4
0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1

Macht man sich klar, dass $p \to q = \neg p \vee q$ gilt, so kann man erkennen, dass φ_4 aus φ_3 nur durch Durchführen dieser Umwandlung und weglassen der vorderen Negation entsteht. Also hätte man auch ohne die Wertetabelle zeigen können, dass φ_4 eine Tautologie ist.

$A_5 = p \to \neg p$ ist erfüllbar:

p	q	A_5
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$A_6 \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee p)$ ist erfüllbar:

p	q	r	$((\neg p) \vee q)$	$((\neg q) \vee r)$	$((\neg r) \vee p)$	A_6
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	0
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

$A_7 \equiv (\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r) \vee (\neg r \wedge p)$ ist erfüllbar:

p	q	r	$((\neg p) \wedge q)$	$((\neg q) \wedge r)$	$((\neg r) \wedge p)$	A_7
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

$A_8 \equiv p \rightarrow (q \rightarrow p)$ist eine Tautologie:

p	q	$(q \rightarrow p)$	A_8
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1