SS 2011 — 20. April 2011

Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 1

Prof. Dr. Klaus Madlener — Abgabe bis 27. April 2011 10:00h

1. Aufgabe: [strukturelle Induktion, Übung]
Zeigen Sie mit struktureller Induktion über den Aufbau der Aussageformen:

1. Jede aussagenlogische Formel enthält zumindest ein von $\neg$ verschiedenes Symbol.
2. In jeder aussagenlogischen Formel $A \in F$ ist die Anzahl der Klammerpaare gleich der Anzahl der Operatoren.
3. Sei n die Anzahl der Vorkommen von Variablen von $A \in F$. Dann ist die Anzahl der Operatoren in A mindestens $n - 1$.

2. Aufgabe: [Bewertung von Formeln, Übung]
Seien $p, q \in V$ aussagenlogische Variablen. Zeigen Sie durch Betrachtung aller Bewertungen:

1. $A_1 \equiv (p \to q) \vee (q \to p)$ ist eine Tautologie, d.h. die Formel ist für alle Belegungen erfüllt.
2. $A_2 \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$ ist erfüllbar, d.h. es gibt erfüllende Belegungen.

3. Aufgabe: [Beziehung zwischen umgangssprachlicher und formaler Logik, 8P]
Versuchen Sie, die folgenden umgangssprachlichen Aussagen in Formeln der Aussagenlogik zu übertragen.

1. „Studenten essen in der Mensa."
2. „Wenn es um den Sitzplatz geht, das Alter sitzt, die Jugend steht!"
3. „Wer Banknoten nachmacht oder verfälscht oder nachgemachte oder verfälschte sich verschafft und in Verkehr bringt, wird mit Freiheitsstrafe nicht unter zwei Jahren bestraft."
4. „William Shakespeare schrieb 'Moby Dick' und Paris ist die Hauptstadt von Spanien oder Katzen jagen Mäuse."
5. „Freitags isst man Schweinerückensteak."
6. „Dieser Satz hat fünf Wörter."
7. „Dieser Satz hat nicht fünf Wörter."
8. „Wenn es einen Wochentag gibt, an dem das Mensaessen an allen Ausgaben gut ist, dann gibt es auch einen Wochentag, an dem es an keiner Ausgabe gut ist."

Welche dieser Aussagen sind „wahr", welche „falsch"? Diskutieren Sie kurz die auftretenden Probleme.

Beispiel: Um die Aussage „Wenn ich nicht zu hause bin, kannst du mich über Mobilfunk erreichen." zu formalisieren, kann man zwei Atome

- $A \equiv$ „Ich bin zu hause.“ und
- $B \equiv$ „Du kannst mich über Mobilfunk erreichen.“

definieren. Die obige Aussage lässt sich dann durch die Formel $(\neg A) \to B$ repräsentieren. Diese Aussage ist falsch. (Wer ist mit „Ich“ und „Du“ gemeint?)

4. Aufgabe: [Beziehung zwischen umgangssprachlicher und formaler Logik, 6P]
„Worin besteht das Geheimnis Ihres langen Lebens?“ wurde ein 100-jähriger gefragt. „Ich halte mich streng an die folgenden Diätregeln: Wenn ich kein Bier zu der Mahlzeit trinke, dann esse ich immer Fisch. Immer wenn ich Fisch und Bier zusammen habe, verzichte ich auf Eiscreme. Wenn ich Eiscreme esse oder Bier meide, rühre ich Fisch nicht an.“, antwortete er. Der Fragesteller fand diesen Ratschlag ziemlich verwirrend.

Formalisieren Sie den Diätplan mit Aussageformen und versuchen Sie, eine weniger verwirrende Formulierung zu finden.

5. Aufgabe: [strukturelle Induktion, 8P]

1. Zeigen Sie, dass jede aussagenlogische Formel endlich ist.
2. Definieren Sie induktiv die Menge G aller aussagenlogischen Formeln, in denen nur die Operatoren $\neg, \wedge, \vee$ vorkommen, und in denen genau jede Variable negiert ist (also keine zusammengesetzten negierten Formeln). Zeigen Sie mit struktureller Induktion, dass in jeder Formel $A \in G$ genau so viele einstellige Operatoren wie Variablen vorkommen.
3. Betrachten Sie die beiden folgenden induktiv definierten Formelmengen:

   F':
   1. $p_i \in F'$ für alle $i \in \mathbb{N}$
   2. Sind $A, B \in F'$, so sind auch $A \wedge B$ und $A \vee B \in F'$.
   3. F' ist die kleinste Menge, die 1. und 2. erfüllt.

   F'':
   1. $F' \subset F''$
   2. Sind $A, B \in F''$, so sind auch $\neg A$, $A \to B$ und $A \leftrightarrow B \in F''$.
   3. F'' ist die kleinste Menge, die 1. und 2. erfüllt.

   Beschreiben Sie jeweils mit eigenen Worten, was für Formeln diese Mengen enthalten und geben Sie Beispiele für Formeln an, die enthalten bzw. nicht enthalten sind.

6. Aufgabe: [Bewertung von Formeln, 6P]
Welche der folgenden aussagenlogischen Formeln sind Tautologien, erfüllbar oder unerfüllbar?

$$A_3 \equiv \neg(((p \to q) \land p) \to q)$$
$$A_4 \equiv \neg((\neg p \lor q) \land p) \lor q$$
$$A_5 \equiv p \to \neg p$$
$$A_6 \equiv (\neg p \lor q) \land (\neg q \lor r) \land (\neg r \lor p)$$
$$A_7 \equiv (\neg p \land q) \lor (\neg q \land r) \lor (\neg r \land p)$$
$$A_8 \equiv p \to (q \to p)$$

Abgabe: bis 27. April 2011 10:00h im Kasten neben Raum 34-401.4