SS 2011 27. April 2011

Exercises for the Lecture Logics
Sheet 2

Prof. Dr. Klaus Madlener Delivery until 04. Mai 2011 10:00 Uhr

Exercise 1: [logical equivalence, satisfiability, tutorial]
Let p, q, r, and s be propositional variables and A, B, C formulas. Prove:

1. $\{p, p \vee q, p \rightarrow s, r \rightarrow q\} \models q \rightarrow p$
2. $\{p, p \vee q, p \rightarrow s, r \rightarrow q\} \models s$
3. $A \models\!\!\!= \!\!\!\!\mid \neg(\neg A))$
4. $A \wedge (B \wedge C) \models\!\!\!= \!\!\!\!\mid (A \wedge B) \wedge C$
5. $A \wedge (B \vee C) \models\!\!\!= \!\!\!\!\mid (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
6. $\neg(A \wedge B) \models\!\!\!= \!\!\!\!\mid (\neg A \vee \neg B)$ und $\neg(A \vee B) \models\!\!\!= \!\!\!\!\mid (\neg A \wedge \neg B)$
7. $A \rightarrow B \models\!\!\!= \!\!\!\!\mid (\neg A) \vee B$

Which different ways are there to prove these equivalences?

Exercise 2: [complete operator bases, tutorial]
Let the NAND-operator $|$ be defined by

$$\varphi(A \mid B) := \begin{cases} 0 & \text{if } \varphi(A) = \varphi(B) = 1 \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Prove that $\{|\}$ is a complete operator basis.

Exercise 3: [boolean functions, tutorial]
Prove that every boolean function $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ can be represented by a formula built using $p_1, \ldots, p_n$ and an operator basis.

Exercise 4: [operator sets, tutorial]
Let $F(\{\neg, \leftrightarrow\})$ be the set of all formulas containing only variables, $\neg$, and $\leftrightarrow$.
Prove: If there are exactly n different variables in $A \in F(\{\neg, \leftrightarrow\})$, then there is a formula $A' \in F(\{\neg, \leftrightarrow\})$ with

1. $A \models\!\!\!= \!\!\!\!\mid A'$
2. Negation symbols occcur in A' only exactly in front of variables (e.g. $p \leftrightarrow \neg q$).
3. A' contains at most $2n$ Literals (i.e. occurrences of negated or non-negated variables).

Exercise 5: [semantic conclusion, 6P]
Prove or disprove:

1. $\{p \vee q, q \rightarrow r\} \models r$
2. $\{p \wedge q, \neg p \rightarrow (q \rightarrow r), q \wedge \neg r, \} \models q \rightarrow r$
3. $\{p, p \wedge q, p \rightarrow r, q \wedge \neg r, r \rightarrow s, (\neg q \vee r \vee \neg s) \rightarrow p\} \models (q \rightarrow r) \wedge (p \vee (r \rightarrow r))$
4. $\{p, p \rightarrow r, r \vee \neg q\} \models p \rightarrow (q \rightarrow p)$
5. $F \models q \rightarrow p \wedge (\neg(s \wedge \neg(s \vee ((q \wedge r) \rightarrow p))))$
6. $F \models p \leftrightarrow \neg p$

Exercise 6: [deduction theorem, 5P]
Prove the following variant of the deduction theorem:

$$\{A_1, \ldots, A_n\} \models B \text{ iff. } (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B \text{ is a tautology.}$$

Exercise 7: [compactness theorem, 5P]
Prove that the following set is satisfiable:

$$\Sigma := \{p_i \vee p_{i+1} | i \in \mathbb{N}\} \cup \{(p_i \wedge p_{i+1}) \rightarrow \neg p_{i+2} | i \in \mathbb{N}\}$$

Exercise 8: [compactness theorem, 2P]
Let $\Sigma \subseteq F$ be an infinite set of propositional formulas and let $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \ldots$ be satisfiable subsets of F, s. th. $\Sigma' \subseteq \Sigma_i$ (for an $i > 0$) holds for every finite subset $\Sigma' \subseteq \Sigma$. Is Σ satisfiable? Prove your claim.

Exercise 9: [substitution, 4P]
Let $A, B, C \in F$ and let $A \models\!\!\!= \!\!| B$ be formulas and A be a subformula of C.

Prove: If C' is gained C by replacing one or more occurrences of A by B, then $C \models\!\!\!=\!\!| C'$ holds.

Exercise 10: [complete operator bases, 6P]

1. Prove that $\{\neg \rightarrow\}$ is a complete operator basis.
2. Prove that $\{\neg, \leftrightarrow\}$ *is not* a complete operator basis.

Exercise 11: [stapler, 1P]
Formalise the following proposition: If neither a stapler nor a paper clip is used for a submitted exercise, then possibly no points will be awarded for this exercise.

Attention: This proposition is a tautology!

Delivery: until 04. Mai 2011 10:00 Uhr into the box next to room 34-401.4

on **Exercise 1:**

1. $\{p, p \vee q, p \to s, r \to q\} \models q \to p$:
   Jede Bewertung, die p erfüllt, erfüllt auch $q \to p$.
2. $\{p, p \vee q, p \to s, r \to q\} \models s$:
   Jede Bewertung, die p und $p \to s$ erfüllt, erfüllt auch s (Modus-Ponens).
3. $A \models\!\!\!\!\!= \!\!\!\!\!\! \dashv \neg(\neg A))$:
   Es gilt $\varphi(\neg\neg A) = 1 - (1 - \varphi(A)) = \varphi(A)$.
4. $A \wedge (B \wedge C) \models\!\!\dashv (A \wedge B) \wedge C$:
   Dies gilt, da die Minimumsfunktion assoziativ ist.
5. $A \wedge (B \vee C) \models\!\!\dashv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$:

A	B	C	$(B \vee C)$	$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B)$	$(A \wedge C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge B)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

6. $\neg(A \wedge B) \models\!\!\dashv (\neg A \vee \neg B)$ und $\neg(A \vee B) \models\!\!\dashv (\neg A \wedge \neg B)$:
   Analog zu oben mit einer Wertetabelle.
7. $A \to B \models\!\!\dashv (\neg A) \vee B$:
   Am besten ebenfalls mit einer Wertetabelle oder – wie weiter oben – per Argumentation über die Definition der Bewertungen.

on **Exercise 2:**
Zunächst eine Vorbemerkung: Es gilt

$$\neg B \models\!\!\dashv (B \mid B)$$
$$B \to C \models\!\!\dashv B \mid (C \mid C)$$

Dies kann, zum Beispiel durch Aufstellen einer Wertetabelle, leicht gezeigt werden.

Beh.: Zu jedem $A \in F(\{\neg, \to\})$ gibt es ein $A' \in F(\{|\})$ mit $A \models\!\!\dashv A'$.

Der Beweis der Behauptung folgt nun mittels Induktion über den Aufbau von A.

Induktionsanfang: Sei A atomar. Dann ist bereits $A \in F(\{|\})$. $\surd$

Induktionsschritt: Sei A nicht atomar und für jeden Teilterm gebe es eine äquivalente Aussageform in $F(\{|\})$. Da A nicht atomar ist, ist A von der Form $A \equiv (\neg B)$ oder $A \equiv (B \to C)$.

1. Fall: A hat die Form $A \equiv (\neg B)$ mit $B \in F(\{\neg, \rightarrow\})$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine zu B äquivalente Formel $B' \in F(\{|\})$. Setze $A' \equiv (B' \mid B')$. Wie bereits gesagt, gilt dann

$$A \models\!\!\!\!\dashv (B \mid B).$$

Ferner ist $A' \in F(\{|\})$. Da A' aus $(B \mid B)$ entsteht, indem jedes Vorkommen und B durch B' ersetzt wird und $B \models\!\!\!\!\dashv B'$ gilt, folgt nach Aufabe 9

$$(B \mid B) \models\!\!\!\!\dashv A'.$$

Schließlich folgt $A \models\!\!\!\!\dashv A'$ aus der Transitivität von $\models\!\!\!\!\dashv$.

2. Fall: A hat die Form $A \equiv (B \rightarrow C)$ mit $B, C \in F(\{\neg, \rightarrow\})$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es zu B bzw. C äquivalente Aussageformen $B', C' \in F(\{|\})$. Wegen der Vorbemerkung gilt

$$A \models\!\!\!\!\dashv B \mid (C \mid C).$$

Nach Aufgabe 9 gilt

$$\begin{aligned} B \mid (C \mid C) &\models\!\!\!\!\dashv B' \mid (C \mid C) \\ &\models\!\!\!\!\dashv B' \mid (C' \mid C'). \end{aligned}$$

Es folgt $A \models\!\!\!\!\dashv B' \mid (C' \mid C')$, da $\models\!\!\!\!\dashv$ eine Äquivalenzrelation ist.

Somit gibt es zu jedem $A \in F(\{\neg, \rightarrow\})$ eine logisch äquivalente Formel $A' \in F(\{|\})$.

Sei nun $A \in F$. Dann gibt es, da $\{\neg, \rightarrow\}$ vollständig ist, ein $A' \in F(\{\neg, \rightarrow\})$ mit $A \models\!\!\!\!\dashv A'$. Wie oben gezeigt, gibt es dann $A'' \in F(\{|\})$ mit $A' \models\!\!\!\!\dashv A''$. Daraus folgt $A \models\!\!\!\!\dashv A''$.

Man sieht, dass es um die Vollständigkeit einer Operatormenge OP_1 zu zeigen, genügt, die Operatoren einer vollständigen Operatormenge OP_2 „nachzubauen“.

on **Exercise 3:**

Zu zeigen: Jede boolesche Funktion $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ lässt sich durch eine Aussageform in $p_1, \ldots, p_n$ und einer vollständigen Operatorenmenge darstellen.

Sei Op eine vollständige Operatorenmenge. Dann gibt es zu jeder Formel $A \in F(\{\neg, \wedge, \vee\})$ eine äquivalente Formel $A' \in F(Op)$. Es reicht also zu zeigen, dass sich jede boolesche Funktion $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ durch eine Aussageform A in $p_1, \ldots, p_n$ mit $A \in F(\{\neg, \wedge, \vee\})$ darstellen lässt.

Eine solche Darstellung lässt sich leicht finden, da sich jede boolesche Funktion durch eine Wertetabelle darstellen lässt. Aus dieser kann eine Formel in DNF abgelesen werden, die die geforderten Eigenschaften hat.

on **Exercise 4:**

1. Wir wollen als erstes zeigen, dass es zu jedem $A \in F(\{\neg, \leftrightarrow\})$ ein äquivalentes $A' \in F(\{\neg, \leftrightarrow\})$ gibt, das Negationssymbole nur vor Variablen hat.

   Intuitiv ist dies nicht schwer, da $\neg(A \leftrightarrow B) \models\!\!\!=\!\!\!| (\neg A) \models\!\!\!=\!\!\!| B$ für alle Formeln A, B gilt und man die Negationen sozusagen in die Formel hineinziehen kann. Um eine äußere Negation zu eliminieren, muss man letzlich eine beliebige innere Negation „umdrehen “.

   Formal ist dazu eine strukturelle Induktion (über den Aufbau von $F(\{\neg, \leftrightarrow\})$) nötig:

   Induktionsanfang: Sei A atomar. Dann enthält A keine Negationssymbole und ist natürlich zu sich selbst äquivalent.

   Induktionsvoraussetzung: Sei $A \in F(\{\neg, \leftrightarrow\})$ nicht atomar und für alle echten Teilformeln B gebe es ein B' mit $B' \models\!\!\!=\!\!\!| B$, das Negationssymbole nur vor Variablen hat. Wir unterscheiden zwei Fälle:

   a) $A \equiv (\neg B)$. Hier müssen wieder zwei Fälle unterschieden werden, entweder $B \equiv \neg C$ oder $B \equiv C \leftrightarrow D$.

      Im ersten Fall ist $A \models\!\!\!=\!\!\!| \neg\neg C \models\!\!\!=\!\!\!| C$. Nach IV gibt es ein C', das Negationssymbole nur vor Variablen hat und es gilt $C' \models\!\!\!=\!\!\!| C \models\!\!\!=\!\!\!| A$.

      Im zweiten Fall ist

      $$A \models\!\!\!=\!\!\!| \neg(C \leftrightarrow D)$$

      , wobei es nach C', D' gibt, die Negationssymbole nur vor Variablen haben. $\neg(C' \leftrightarrow D')$ ist dann eine Formel, die äquivalent zu A ist und die fast die gewünschte Eigenschaft hat. Nur ganz außen gibt es noch ein Negationssymbol. Wie oben erwähnt gilt zwar

      $$\neg(C' \leftrightarrow D') \models\!\!\!=\!\!\!| (\neg C') \leftrightarrow D'$$

      , aber leider nützt uns dies hier nichts, da $\neg C'$ keine Teilformel von A ist und wir unsere Induktionsvoraussetzung darauf nicht anwenden können.

      Es bleibt deshalb nichts anderes übrig, als noch eine zweite Aussage zu beweisen: Ist C' eine Formel aus $F(\{\neg, \leftrightarrow\})$, die Negationssymbole nur vor Variablen hat, dann gibt es eine Formel C'', die logisch äquivalent zu $\neg C'$ ist und die ebenfalls keine Negationssymbole vor Variablen hat. Hat man nämlich eine solche Formel C'', dann ist

      $$A \models\!\!\!=\!\!\!| C'' \leftrightarrow D'$$

      und diese Formel ist wie gewünscht.

      Diese zweite Aussage wird weiter unten – ebenfalls per struktureller Induktion – bewiesen.

b) $A \equiv B \leftrightarrow C$. Dieser Fall ist wesentlich einfacher als der Fall $A \equiv (\neg B)$, weil hier kein Negationssymbol auf der obersten Ebene vorkommt. Nach IV gibt es B', C', die Negationssymbole nur vor Variablen haben und dies gilt offensichtlich auch für $B' \leftrightarrow C' \models\!\!\!\!=\!\!\!\!\!\dashv A$.

Zum Abschluss des ersten Teils muss nun noch obige zweite Aussage gezeigt werden: Ist C' eine Formel aus $F(\{\neg, \leftrightarrow\})$, die Negationssymbole nur vor Variablen hat, dann gibt es eine Formel C'', die logisch äquivalent zu $\neg C'$ ist und die ebenfalls keine Negationssymbole vor Variablen hat.

Induktionsanfang: Für jede atomare Formel p_i gilt die Aussage, denn $\neg p_i$ hat alle nötigen Eigenschaften.

Induktionsvoraussetzung: Sei A eine Formel aus $F(\{\neg, \leftrightarrow\})$, die Negationssymbole nur vor Variablen hat und für jede Teilformel B gebe es eine Formel $B' \models\!\!\!\!=\!\!\!\!\!\dashv \neg B$, die Negationssymbole nur vor Variablen hat.

Induktionsschritt: a) $A \equiv (\neg B)$. Dann ist $\neg A \models\!\!\!\!=\!\!\!\!\!\dashv B$ und B hat nach IV $\neg$ nur vor Variablen.

b) $A \equiv B \leftrightarrow C$. Dann ist

$$\neg A \models\!\!\!\!=\!\!\!\!\!\dashv (\neg B) \leftrightarrow C$$

und nach IV gibt es ein $B' \models\!\!\!\!=\!\!\!\!\!\dashv \neg B$, so dass $B' \leftrightarrow C$ äquivalent zu A ist und $\neg$ nur vor Variablen hat.

2. Für den zweiten Teil der Aufgabe können wir nun annehmen, dass Negationssymbole nur vor Variablen vorkommen. Es bleibt nun also noch zu zeigen, dass es zu jeder Formel $A \in F(\{\neg, \leftrightarrow\})$ mit n verschiedenen Variablen eine Formel A' gibt, die höchstens $2n$ Literale enthält. Dabei hilft folgende Überlegung:

Enthält eine Formel eine Variable p mehr als zwei mal, so muss p oder $\neg p$ mindestens doppelt vorkommen, z.B.

$$A \equiv \ldots \leftrightarrow p \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow \neg p \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow p \leftrightarrow \ldots$$

Da der Operator $\leftrightarrow$ assoziativ und kommutativ ist, spielen Klammerung und Reihenfolge der Variablen keine Rolle und die Formel ist logisch äquivalent zu

$$p \leftrightarrow p \leftrightarrow \ldots.$$

Da $p \leftrightarrow p$ jedoch eine Tautologie ist, spielt es keine Rolle, genauer gesagt gilt für jede Tautologie T

$$T \leftrightarrow A \models\!\!\!\!=\!\!\!\!\!\dashv A.$$

Man kann also eine logisch äquivalente Formel zu A konstruieren, die jede Variable höchstens zweimal enthält, indem man einfach alle doppelten Vorkommen von Literalen steicht. Eine solche Formel enthält dann nur noch höchstens $2n$ Literale.

on **Exercise 5:**

1. $\{p \vee q, q \to r\} \models r$ Die Folgerung gilt nicht, denn die Bewertung φ mit $\varphi(p) = 1$ und $\varphi(q) = \varphi(r) = 0$ erfüllt zwar die Formelmenge links, aber nicht r.
2. $\{p \wedge q, \neg p \to (q \to r), q \wedge \neg r, \} \models q \to r$ Die Folgerung gilt nicht, da jede Belegung, die die Menge links erfüllt, q und $\neg r$ erfüllen muss, also $\varphi(q) = 1$ und $\varphi(r) = 0$. Dann gilt aber auch $\varphi(q \to r) = 0$.
3. $\{p, p \wedge q, p \to r, q \wedge \neg r, r \to s, (\neg q \vee r \vee \neg s) \to p\} \models (q \to r) \wedge (p \vee (r \to r))$ Die Menge ist schon unerfüllbar, da zur Erfüllung der zweiten, dritten und vierten Formel p, q, r und $\neg r$ erfüllt sein müssten. Aus einer unerfüllbaren Menge können alle Formeln gefolgert werden, da es ja keine erfüllenden Bewertungen für die Menge gibt, also alle erfüllenden Bewertungen auch die gefolgerte Formel erfüllen (Folie 28). Alternativ kann man auch argumentieren, dass für eine unerfüllbare Menge Σ auch $\Sigma \cup \{\neg A\}$ unerfüllbar ist.
4. $\{p, p \to r, r \vee \neg q\} \models p \to (q \to p)$: Die rechte Formel ist eine Tautologie, also von jeder Belegung erfüllt. Damit folgt sie auch aus jeder Menge.
5. $F \models q \to p \wedge (\neg(s \wedge \neg(s \vee ((q \wedge r) \to p))))$: Die Formel ist in F enthalten, also muss jede F erfüllende Belegung auch die Formel erfüllen. Außerdem ist F ja unerfüllbar, also kann man alles daraus folgern.
6. $F \models p \leftrightarrow \neg p$: Wie oben, dass die Formel unerfüllbar ist, spielt bei der Argumentation keine Rolle.

on **Exercise 6:**

Die Aussage wird mit vollständiger Induktion über die Anzahl der Formeln in der Menge gezeigt:

Induktionsanfang: Die Behauptung $\{A_1\} \models B$ gdw. $A_1 \to B$ eine Tautologie ist folgt direkt mit $\Sigma = \emptyset$ aus dem Deduktionstheorem in der Vorlesung.

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für alle Mengen mit n Formeln.

Induktionsbehauptung: Dann gilt die Behauptung für alle Mengen mit $n + 1$ Formeln, also $\{A_1, \dots, A_{n+1}\} \models B$ gdw. $(A_1 \wedge \dots \wedge A_{n+1}) \to B$ eine Tautologie ist.

Induktionsschritt: Mit dem Deduktionstheorem und der Induktionsvoraussetzung gilt

$$\begin{aligned} \{A_1, \dots, A_{n+1}\} \models B \text{ gdw. } & \{A_1, \dots, A_n\} \models A_{n+1} \to B \\ \text{gdw. } & (A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \to (A_{n+1} \to B) \text{ ist Tautologie.} \end{aligned}$$

Mit den De Morganschen Regeln und $A \to B \models\!\!\!\!\dashv \neg A \vee B$ (Folie 34) folgt nun

$$\begin{aligned} (A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \to (A_{n+1} \to B) & \models\!\!\!\!\dashv \neg(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \vee (\neg A_{n+1} \vee B) \\ & \models\!\!\!\!\dashv \neg(A_1 \wedge \dots \wedge A_n \wedge A_{n+1}) \vee B) \\ & \models\!\!\!\!\dashv (A_1 \wedge \dots \wedge A_{n+1}) \to B. \end{aligned}$$

on **Exercise 7:**
Zu zeigen: Die folgendermaßen definierte Menge Σ ist erfüllbar:

$$\Sigma := \{p_i \vee p_{i+1} | i \in \mathbb{N}\} \cup \{(p_i \wedge p_{i+1}) \to \neg p_{i+2} | i \in \mathbb{N}\}$$

Zunächst halten wir fest, dass die folgende Äquivalenz gilt:

$$(p_i \wedge p_{i+1}) \to \neg p_{i+2} \models\!\!\!\!\!\!\!\!\;\;\;\;\;\; \dashv \neg p_i \vee \neg p_{i+1}) \vee \neg p_{i+2}.$$

Diese Darstellung ist etwas übersichtlicher und wird im Folgenden benutzt.

Laut Kompaktheitssatz (Folie 31) genügt es zu zeigen, dass jede endliche Teilmenge von Σ erfüllbar ist. In diesen endlichen Teilmengen kommen nur endlich viele Formeln und daher auch nur endlich viele Atome vor. Deshalb kann eine Induktion über den größten Index n eines Atoms in der Teilmenge geführt werden:

Induktionsanfang: Die leere Menge und die Menge $\{A_1 \vee A_2\}$ sind erfüllbar, damit ist die Aussage für $n \leq 2$ gezeigt.

Induktionsvoraussetzung: Alle endlichen Teilmengen von Σ, bei denen der größte Index eines Atoms n ist, sind erfüllbar.

Induktionsschritt: Zu zeigen: Dann sind alle endlichen $\Sigma' \subset \Sigma$, in denen $n+1$ der größte Index eines Atoms ist, erfüllbar. Sei Σ' eine solche Teilmenge mit höchstem Index $n+1$. Die Idee ist nun, zuerst eine Menge Σ'' zu konstruieren, deren höchster Index n ist. Diese Menge ist dann erfüllbar und aus deren erfüllender Bewertung können wir eine erfüllende Bewertung für Σ' konstruieren. $Sigma''$ sei durch $\Sigma'' := \{A \in \Sigma' | p_{n+1}$ kommt nicht in A vor$\}$ definiert. Nach Induktionsvoraussetzung ist diese Menge erfüllbar. Wenn φ'' die erfüllende Belegung für Σ'' ist, dann sei φ' wie folgt definiert:

$$\varphi'(p_i) := \varphi''(p_i), \text{ falls } i \leq n$$
$$\varphi'(p_{n+1}) := \begin{cases} 1, \text{ falls } \varphi''(p_n = 0) \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases}$$

Für $i \leq n$ ist $\varphi'(p_i) = \varphi''(p_i)$, also erfüllt φ' auch Σ''. Außerdem erfüllt es auch $p_n \vee p_{n+1}$ und $\neg p_{n-1} \vee \neg p_n \vee \neg p_{n+1}$, da immer eines der Atome p_n und p_{n+1} erfüllt sind. Damit ist φ' eine erfüllende Belegung von Σ'.

on **Exercise 8:**
Jede endliche Teilmenge $\Sigma' \subset \Sigma$ ist in einer erfüllbaren (Teil-)Menge Σ_i enthalten, muss also selbst erfüllbar sein. Damit muss nach dem Kompaktheitssatz auch Σ selbst erfüllbar sein.

on **Exercise 9:**
Der Beweis der Aussage erfolgt per Induktion über den Aufbau von C.

Induktionsanfang: Sei C atomar, d.h. $C \equiv p_i$ mit $i \in \mathbb{N}$.

Ist A nicht in C enthalten, so ist nichts zu zeigen. Sei also A Teilformel von C, dann muss $A \equiv p_i$ sein. C' entsteht durch Ersetzen von A durch B, also gilt $C' \equiv B$. Nach Voraussetzung ist $A \models\!\!\dashv B$, daher gilt $C \models\!\!\dashv C'$.

Induktionsschritt: Sei C nicht atomar und die Behauptung gelte für alle Teilterme von C.

Ist $A \equiv C$, folgt die Behauptung wegen $C \equiv A \models\!\!\dashv B \equiv C'$. Dieser Fall kann sehr kurz abgehandelt werden, ist aber von zentraler Bedeutung: Wenn A nicht atomar ist, dann muss es irgendwann einmal aus Teilformeln zusammengesetzt werden, die A nicht enthalten. Wenn man dies nicht im Induktionsschritt behandelt, dann argumentiert man nur über das Ersetzen von Atomen in C, aber nicht von größeren Formeln.

Sei nun $A \not\equiv C$. Da C nicht atomar ist, ist C von der Form $C \equiv (\neg D)$ oder $C \equiv (D \star E)$ mit $D, E \in F$ und $\star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$.

1. Fall: C ist von der Form $C \equiv (\neg D)$ mit $D \in F$. Dann ist $C' \equiv (\neg D')$ mit einem $D' \in F$, das aus D durch Ersetzen ein oder mehrerer Vorkommen von A (als Teilterm) durch B entsteht. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $D \models\!\!\dashv D'$, d.h. $\varphi(D) = \varphi(D')$ für jede Bewertung φ.

Sei nun φ eine Bewertung. Dann gilt

$$\varphi(C) = \varphi(\neg D) = 1 - \varphi(D) = 1 - \varphi(D') = \varphi(\neg D') = \varphi(C').$$

Dies zeigt, dass $\varphi(C) = \varphi(C')$ für jede Bewertung φ gilt, also gilt $C \models\!\!\dashv C'$.

2. Fall: C ist von der Form $C \equiv (D \star E)$ mit $D, E \in F$ und $\star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$. Dann ist $C' \equiv (D' \star E')$ mit $D', E' \in F$. Außerdem entsteht D' (bzw. E') aus D (bzw. E) durch Ersetzen von Vorkommen von A (als Teilterm) durch B (eventuell null Vorkommen).

Betrachte D'. Entsteht D' aus D indem A nullmal ersetzt wird, gilt natürlich $D \equiv D'$. Ansonsten folgt nach Induktionsvoraussetzung $D' \models\!\!\dashv D$. In beiden Fällen gilt $D' \models\!\!\dashv D$.

Analog sieht man $E' \models\!\!\dashv E$.

Sei φ eine Bewertung. Da $D' \models\!\!\dashv D$ und $E' \models\!\!\dashv E$ gilt, ist $\varphi(D') = \varphi(D)$ und $\varphi(E') = \varphi(E)$. Es folgt

$$\varphi(C) = \varphi(E \star D) = \varphi(E' \star D') = \varphi(C').$$

Dabei wurde benutzt, dass $\star$ extentional[1] ist. Also gilt auch hier $C \models\!\!\dashv C'$.

[1] Alle Junktoren der Aussagenlogik sind extentional, das heißt z.B. für $\vee$, dass $\varphi(A \vee B)$ durch $\varphi(A)$ und $\varphi(B)$ eindeutig bestimmt ist.

on **Exercise 10:**

1. Zu zeigen: $\{\neg \rightarrow\}$ ist eine vollständige Operatorenmenge. Der Beweis erfolgt analog zu dem aus Aufgabe 2. Hier wird von der vollständigen Operatormenge $\{\neg, \vee\}$ ausgegangen und zunächst $A \vee B \models\!\!\!\!= \!\!\!\!\!\dashv \neg B \rightarrow B$ festgehalten. Nun bleibt zu zeigen, dass es zu jedem $A \in F(\{\neg, \vee\})$ ein $A' \in F(\{\neg \rightarrow\})$ mit $A \models\!\!\!\!= \!\!\!\!\!\dashv A'$ gibt.

   Der Beweis der Behauptung folgt nun mittels Induktion über den Aufbau von A.

   Induktionsanfang: Sei A atomar. Dann ist bereits $A \in F(\{\neg \rightarrow\})$. $\surd$

   Induktionsschritt: Sei A nicht atomar und für jeden Teilterm gebe es eine äquivalente Aussageform in $F(\{|\})$. Da A nicht atomar ist, ist A von der Form $A \equiv (\neg B)$ oder $A \equiv (B \vee C)$. **1. Fall:** A hat die Form $A \equiv (\neg B)$ mit $B \in F(\{\neg, \vee\})$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine zu B äquivalente Formel $B' \in F(\{\neg \rightarrow\})$. Setze $A' \equiv \neg B'$. Dann gilt $A' \in F(\{\neg \rightarrow\})$ und mit Aufgabe 9

   $$A \models\!\!\!\!= \!\!\!\!\!\dashv \neg B \models\!\!\!\!= \!\!\!\!\!\dashv \neg B' \models\!\!\!\!= \!\!\!\!\!\dashv A'.$$

   2. Fall: A hat die Form $A \equiv (B \vee C)$ mit $B, C \in F(\{\neg, \vee\})$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es zu B bzw. C äquivalente Aussageformen $B', C' \in F(\{\neg \rightarrow\})$. Wegen der Vorbemerkung und Aufgabe 9 gilt

   $$A' := \neg B' \rightarrow C' \models\!\!\!\!= \!\!\!\!\!\dashv B \vee C \equiv A$$

   und $A' \in F(\{\neg \rightarrow\})$.

   Es gibt also zu jedem $A \in F(\{\neg \vee\})$ ein äquivalentes $A' \in F(\{\neg \rightarrow\})$. Da $\{\neg \vee\}$ vollständig ist, ist damit auch $\{\neg \rightarrow\}$ vollständig.

2. Zu zeigen: $\{\neg, \leftrightarrow\}$ ist keine vollständige Operatorenmenge. Wir schätzen die Anzahl der booleschen Funktionen ab, die sich mit dieser Operatorenmenge ausdrücken lassen und werden zu dem Schluss kommen, dass es i.A. weniger als 2^{2^n} sind.

   In Aufgabe 4 wurde gezeigt, dass es zu jeder Formel aus $F(\{\neg, \leftrightarrow\})$ mit n Variablen eine äquivalente Formel mit höchstens $2n$ Literalen gibt. Die Anzahl der booleschen Funktionen, die sich mit Formeln aus $F(\{\neg, \leftrightarrow\})$ ausdrücken lassen, kann also nicht größer sein, als die Anzahl der verschiedenen Formeln mit höchstens $2n$ Literalen. Jedes Literal kann negiert oder nicht negiert sein und damit gibt es 2^{2n} Möglichkeiten, solche Formeln zu bilden. Also ist die Anzahl der darstellbaren booleschen Funktionen durch 2^{2n} beschränkt. Es gibt aber 2^{2^n} verschiedene boolesche Funktionen mit n Variablen und für $n \geq 3$ ist dies größer als 2^{2n}.

   Bemerkungen:

   a) Tatsächlich ist diese Schranke ungenau, es gibt i.A. weniger als 2^{2n} darstellbare boolesche Funktionen. Eine präzisere Schranke ist aber nicht notwendig, da ja nur gezeigt werden muss, dass nicht jede boolesche Funktion darstellbar ist.

b) Man könnte noch vermuten, dass auch die Formeln mit weniger als n Variablen mitgezählt werden müssen, da ja nicht jede Funktion wirklich von allen ihren Argumenten abhängt. Dies ist hier aber nicht der Fall, jede darstellbare boolesche Funktion mit n Variablen ist auch durch eine Formel mit genau n Variablen darstellbar. Ist A eine Formel mit weniger Variablen und kommt z.B. p nicht in A vor, dann ist ja (wie oben bereits überlegt) $A \models\!\!\!\!\;\dashv A \leftrightarrow (p \leftrightarrow p)$. Man kann die fehlenden Variablen also immer „hinzufügen". Selbst wenn man alle kleineren Formel hinzuzählen würde, käme man allerdings nur auf eine Schranke von 2^{2n+1}.

on **Exercise 11:**

Wir kürzen die Teile der Aussage wie folgt ab:

T**:** Die Abgabe ist getackert

K**:** Es gibt keine Punkte.

„Es kann sein "bedeutet, dass es so ist, oder nicht. D.h. mit den obigen Abkürzungen wird die Aussage zu

$$\neg T \to (K \vee \neg K).$$